Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, Условие единственности
слабопериодической меры Гиббса для модели жесткой
сердцевины, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 60–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:00:20

© 2012 г.

У. А. Розиков*, Р. М. Хакимов†

УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБОПЕРИОДИЧЕСКОЙ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ЖЕСТКОЙ СЕРДЦЕВИНЫ

Изучается модель жесткой сердцевины на дереве Кэли. Показано, что эта модель имеет только периодические меры Гиббса с периодом два. Найдены достаточные условия, при которых все слабопериодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, НС-модель, мера Гиббса, периодические меры, слабопериодические меры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой гамильтониана является описание всех отвечающих ему мер Гиббса. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работах [1]–[3]. Для модели Изинга на дереве Кэли эта задача изучена достаточно полно. Так, например, в работе [4] построено несчетное множество крайних мер Гиббса, а в работе [5] найдено необходимое и достаточное условие крайности неупорядоченной фазы модели Изинга на дереве Кэли.

В многочисленных работах (см., например, [6]–[13]) изучены периодические меры Гиббса на дереве Кэли для различных моделей статистической механики. Эти меры в основном трансляционно-инвариантны либо периодические с периодом два. Более того, для многих моделей на дереве Кэли доказано, что множество периодических мер Гиббса очень бедно, т. е. существуют *только* периодические меры Гиббса с периодом два (см., например, работы [8]–[12]).

Чтобы расширить множество мер Гиббса, в работах [14], [15] введено более общее понятие периодической меры Гиббса – слабопериодическая мера Гиббса – и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли.

*Институт математики им. В. И. Романовского, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru

†Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: rustam-7102@rambler.ru

В работе [13] изучена модель жесткой сердцевины (НС (hard core)-модель) на дереве Кэли и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса для этой модели единственна. Кроме того, при некоторых условиях для параметров НС-модели доказана неединственность периодических мер Гиббса с периодом два.

Настоящая работа посвящена изучению слабопериодических мер для НС-модели на дереве Кэли и доказательству единственности таких мер при некоторых условиях.

Структура работы такова. В разделе 2 даются основные определения и известные факты. В разделе 3 описаны системы функциональных уравнений и показано, что НС-модель имеет только периодические меры Гиббса с периодом два. В разделе 4 найдены достаточные условия, при которых все слабопериодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли τ^k порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\tau^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин τ^k , L – множество ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и используется обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}. \quad (1)$$

Для $x \in W_n$ положим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободна.

Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из V (V_n или W_n соответственно). Множество таких конфигураций обозначим через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Гамильтониан НС-модели определяется формулой

$$H(\sigma) = \begin{cases} J \sum_{x \in V} \sigma(x), & \text{если } \sigma \in \Omega, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbf{B}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω . Для любого n обозначим через $\mathbf{B}_{V_n} = \{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}$ подалгебру $\mathbf{B}$, где $\sigma|_{V_n}$ – сужение σ на V_n , $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma_n(x)$ – допустимая конфигурация в V_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для $\lambda > 0$ НС-мера Гиббса есть вероятностная мера μ на $(\Omega, \mathbf{B})$ такая, что для любого n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\} = \int_{\Omega} \mu(d\omega) P_n(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}), \quad (3)$$

где

$$P_n(\sigma_n \mid \omega_{W_{n+1}}) = \frac{e^{-H(\sigma_n)}}{Z_n(\lambda; \omega_{W_{n+1}})} \mathbf{1}(\sigma_n \vee \omega_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}).$$

Здесь символ $\vee$ означает объединение конфигураций и $Z_n(\lambda; \omega_{W_{n+1}})$ – нормировочный множитель с граничным условием $\omega|_{W_n}$:

$$Z_n(\lambda; \omega_{W_{n+1}}) = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} e^{-H(\tilde{\sigma}_n)} \mathbf{1}(\tilde{\sigma} \vee \omega_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}). \quad (4)$$

Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$ соответственно.

Пусть $\hat{G}_k$ – подгруппа группы G_k .

Если мера Гиббса инвариантна относительно некоторой подгруппы конечного индекса $\hat{G}_k \subset G_k$, то она называется $\hat{G}_k$ -периодической.

Известно [13], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставить совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих равенству

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \quad (5)$$

где $\lambda = e^J > 0$ – параметр.

Обозначим

$$f(z) \equiv f(z, \lambda) = \frac{1}{(1 + \lambda z)^k}, \quad \lambda_{\text{cr}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k+1}}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [13]. Если $\lambda \leq \lambda_{\text{cr}}$, то функциональное уравнение (5) имеет единственное решение $z_x = z^*$, где $z^* > 0$ – единственное решение для $z = f(z)$.

Если $\lambda > \lambda_{\text{cr}}$, то любое решение z_x функционального уравнения (5) удовлетворяет неравенству

$$z_- \leq z_x \leq z_+ \quad \forall x \in V,$$

где $z_-, z_+ > 0$ однозначно определены как $z_- = f(f(z_-))$, $z_+ = f(z_-)$, или, эквивалентно,

$$z_- = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(2n-1)}(1), \quad z_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(2n)}(1).$$

Здесь $f^{(n+1)}(z) = f(f^{(n)}(z))$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

В частности, $(1 + \lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для каждого $x \in G_k$, $y \in \hat{G}_k$.

G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который мы обозначим через $x_{\downarrow}$ (см. работы [14], [16]).

Пусть $G_k / \hat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа, где $\hat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -слабо-периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_{\downarrow} \in H_j$ для каждого $x \in G_k$.

Заметим, что слабопериодическая совокупность z совпадает с обычной периодической (см. определение 2), если значение z_x не зависит от $x_\downarrow$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мера μ называется $\widehat{G}_k$ -(слабо)периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$ -(слабо)периодической совокупности величин z .

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ И СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

В работе [13] при некоторых условиях на λ и k показано существование $G_k^{(2)}$ -периодических мер Гиббса, где $G_k^{(2)}$ – подгруппа, состоящая из слов четной длины.

Следующая теорема показывает, что для НС-модели на дереве Кэли могут существовать *только* $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса.

ТЕОРЕМА 1. Для любого нормального делителя $\mathcal{G} \subset G_k$ всякая $\mathcal{G}$ -периодическая мера Гиббса НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$ -периодической мерой Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(z, \lambda) = (1 + \lambda z)^{-1}$. Ясно, что $g(y, \lambda) = g(z, \lambda)$ тогда и только тогда, когда $y = z$. Поэтому доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из работы [9].

Следующая теорема дает условие для нормального делителя $\mathcal{G} \subset G_k$, при котором всякая $\mathcal{G}$ -периодическая мера Гиббса НС-модели является трансляционно-инвариантной.

ТЕОРЕМА 2. Если для нормального делителя $\mathcal{G} \subset G_k$ имеет место $\mathcal{G} \cap \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \neq \emptyset$ (т.е. $\mathcal{G}$ содержит хотя бы одну образующую), то всякая $\mathcal{G}$ -периодическая мера Гиббса НС-модели является трансляционно-инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3 из работы [9].

В настоящей работе мы изучаем $\mathcal{G}$ -слабопериодические меры Гиббса для любого нормального делителя $\mathcal{G}$ индекса 2.

Пусть $\emptyset \neq A \subset N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$. Известно, что любая подгруппа индекса 2 группы G_k имеет вид

$$H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четное число} \right\},$$

где $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$ [6].

Заметим, что H_A -слабопериодическая совокупность z имеет вид

$$z_x = \begin{cases} z_{00}, & x \in H_A, x_\downarrow \in H_A, \\ z_{01}, & x \in H_A, x_\downarrow \in G_k \setminus H_A, \\ z_{10}, & x \in G_k \setminus H_A, x_\downarrow \in H_A, \\ z_{11}, & x \in G_k \setminus H_A, x_\downarrow \in G_k \setminus H_A. \end{cases} \quad (6)$$

Для простоты введем следующие обозначения: $z_1 = z_{00}$, $z_2 = z_{01}$, $z_3 = z_{10}$, $z_4 = z_{11}$ и $|A| = i$, где $|A|$ обозначает число элементов множества A . Тогда в силу

равенства (5) $z_i, i = 1, \dots, 4$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^i} \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}}, & z_2 &= \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^{i-1}} \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i+1}}, \\ z_3 &= \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{i-1}} \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}}, & z_4 &= \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^i} \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{k-i}}. \end{aligned} \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $A = N_k$ H_A -соответствующий ему нормальный делитель индекса 2 совпадает с $G_k^{(2)}$. Этот случай был изучен в работе [9]. Кроме того, легко видеть, что $G_k^{(2)}$ -слабопериодические меры Гиббса являются $G_k^{(2)}$ -периодическими. Поэтому мы не рассматриваем случай $H_A = G_k^{(2)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко проверить, что в решениях системы (7) $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $z_3 = z_4$. Решение (z_1, z_2, z_3, z_4) системы уравнений (7) является трансляционно-инвариантной мерой Гиббса, если $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$. Оно является $G_k^{(2)}$ -(слабо)периодической мерой Гиббса, если $(z_1 \neq z_2, z_3 \neq z_4)$ $z_1 = z_2, z_3 = z_4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, что $H_A \cap \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \neq \emptyset$ для любого $A \neq N_k$. Поэтому в силу теоремы 2 имеем, что H_A -периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной. Это означает, что система уравнений (7) не имеет решений вида (z_1, z_2, z_3, z_4) с условиями $z_1 = z_2, z_3 = z_4, z_1 \neq z_3$.

Перепишем систему уравнений (7) в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_3} \right)^i \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, & z_2 &= \left(\frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_3} \right)^{i-1} \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, \\ z_3 &= \left(\frac{1 + \lambda z_4}{1 + \lambda z_2} \right)^{i-1} \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}, & z_4 &= \left(\frac{1 + \lambda z_4}{1 + \lambda z_2} \right)^i \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}. \end{aligned} \quad (7')$$

Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на второе, а третье на четвертое, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_3}, \quad \frac{z_3}{z_4} = \frac{1 + \lambda z_2}{1 + \lambda z_4}. \quad (8)$$

Используя эту систему уравнений, систему (7') можно переписать как

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^i \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, & z_2 &= \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{i-1} \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}, \\ z_3 &= \left(\frac{z_4}{z_3} \right)^{i-1} \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}, & z_4 &= \left(\frac{z_4}{z_3} \right)^i \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первого уравнения системы (9) найдем z_2 , из четвертого – z_3 и, подставив их в четвертое и первое уравнения системы уравнений (7) соответственно, получим

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1 + \lambda z_4)^k}{((1 + \lambda z_4)^{k/i} + \lambda z_4^{1-1/i})^i} \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_4 &= \frac{(1 + \lambda z_1)^k}{((1 + \lambda z_1)^{k/i} + \lambda z_1^{1-1/i})^i} \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{k-i}}, \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$z_1 = \varphi(z_4)\psi(z_1), \quad z_4 = \varphi(z_1)\psi(z_4), \quad (11)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{(1 + \lambda z)^k}{((1 + \lambda z)^{k/i} + \lambda z^{1-1/i})^i}, \quad \psi(z) = \frac{1}{(1 + \lambda z)^{k-i}}.$$

4. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБОПЕРИОДИЧЕСКОЙ МЕРЫ ГИББСА

Для наших исследований полезна следующая лемма.

ЛЕММА 1. 1. Если в системе уравнений (7) выполнены равенства $z_1 = z_4$, $z_2 = z_3$, то $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

2. Равенство $z_1 = z_4$ выполняется тогда и только тогда, когда $z_2 = z_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} z_1 - z_3 &= \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_1)^{k-i}} - \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}} = \\ &= \frac{(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_4)^{k-i+1} - (1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_1)^{k-i}}{(1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_1)^{k-i}(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}} = \\ &= \frac{(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_4)^{k-i+1} - (1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_1)^{k-i+1}}{(1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_1)^{k-i}(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}} + \\ &\quad + \frac{(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_1)^{k-i+1} - (1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_1)^{k-i}}{(1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_1)^{k-i}(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}} = \\ &= A_1(z_4 - z_1) + B_1(z_2 - z_3) + C_1(z_1 - z_3), \end{aligned}$$

т. е.

$$z_1 - z_3 = A_1(z_4 - z_1) + B_1(z_2 - z_3) + C_1(z_1 - z_3), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\lambda[(1 + \lambda z_4)^{k-i} + (1 + \lambda z_4)^{k-i-1}(1 + \lambda z_1) + \dots + (1 + \lambda z_1)^{k-i}]}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}(1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}}, \\ B_1 &= \frac{\lambda(1 + \lambda z_1)[(1 + \lambda z_2)^{i-2} + (1 + \lambda z_2)^{i-3}(1 + \lambda z_3) + \dots + (1 + \lambda z_3)^{i-2}]}{(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_3)^i(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}}, \\ C_1 &= \frac{\lambda}{(1 + \lambda z_2)^{i-1}(1 + \lambda z_3)(1 + \lambda z_4)^{k-i+1}}. \end{aligned}$$

Здесь A_1, B_1, C_1 положительны. Более того, в силу третьего уравнения системы (7) находим, что $C_1 = \lambda z_3/(1 + \lambda z_3)$. Из условия леммы $z_1 = z_4$, $z_2 = z_3$ и равенства (12) получаем, что $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

2. Пусть $z_1 = z_4$. Тогда из системы (8) имеем $z_3/z_2 = (1 + \lambda z_2)/(1 + \lambda z_3)$, откуда $z_2 = z_3$. Пусть $z_2 = z_3$. Тогда $z_1/z_4 = (1 + \lambda z_1)/(1 + \lambda z_4)$, откуда получим $z_1 = z_4$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняется одно из следующих условий:

- 1) $i = 1$;
- 2) $i = (k + 1)/2$;
- 3) $i = k$;
- 4) $i = k - 1$, где $i = |A|$.

Тогда для НС-модели все H_A -слабопериодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что система функциональных уравнений (11) имеет корни только вида $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$. Для этого в системе (11) вычтем из первого уравнения второе и, используя теорему Лагранжа о среднем для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на (z_1, z_4) , получим

$$\begin{aligned} z_1 - z_4 &= \varphi(z_4)\psi(z_1) - \varphi(z_1)\psi(z_4) = \\ &= \varphi(z_4)\psi(z_1) - \varphi(z_1)\psi(z_1) + \varphi(z_1)\psi(z_1) - \varphi(z_1)\psi(z_4) = \\ &= \psi(z_1)[\varphi(z_4) - \varphi(z_1)] + \varphi(z_1)[\psi(z_1) - \psi(z_4)] = \\ &= \psi(z_1)\varphi'(\xi)(z_4 - z_1) + \varphi(z_1)\psi'(\eta)(z_1 - z_4), \end{aligned}$$

где $\xi \in (z_1, z_4)$, $\eta \in (z_1, z_4)$.

Отсюда

$$(z_1 - z_4)[1 + \psi(z_1)\varphi'(\xi) - \varphi(z_1)\psi'(\eta)] = 0. \quad (13)$$

Из этого уравнения получим, что $z_1 = z_4$, или

$$1 + \psi(z_1)\varphi'(\xi) - \varphi(z_1)\psi'(\eta) = 0. \quad (14)$$

Здесь $\psi'(\eta) = -\lambda(k - i)/(1 + \lambda\eta)^{k-i+1} \leq 0$, т. е. функция $\psi(\eta)$ убывает, так как $i \leq k$, $\lambda > 0$, $\eta > 0$, а производная функции $\varphi(z)$ в точке $\xi \in (z_1, z_4)$ имеет вид

$$\varphi'(\xi) = \frac{\lambda(1 + \lambda\xi)^{k-1}[\lambda\xi(k - i + 1) - i + 1]}{\xi^{1/i}[(1 + \lambda\xi)^{k/i} + \lambda\xi^{1-1/i}]^{i+1}}.$$

1) Случай $i = 1$. В этом случае из вышеприведенных формул получим $\varphi'(\xi) > 0$. Так как $\psi'(\eta) \leq 0$, то уравнение (14) не имеет решения. Следовательно, $z_1 = z_4$, и в силу леммы 1 $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

2) Случай $i = (k + 1)/2$. Покажем, что уравнение (14) не имеет решений, т. е.

$$\psi(z_1)\varphi'(\xi) - \varphi(z_1)\psi'(\eta) > -1. \quad (15)$$

В силу утверждения 1

$$\frac{1}{(1 + \lambda)^k} < \xi < 1, \quad \frac{1}{(1 + \lambda)^k} < z_1 < 1.$$

Тогда при $i = (k + 1)/2$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \psi(z_1)\varphi'(\xi) - \varphi(z_1)\psi'(\eta) &= \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-(k+1)/2}} \frac{\lambda(1 + \lambda\xi)^{k-1}[\lambda\xi(k - (k + 1)/2 + 1) - (k + 1)/2 + 1]}{\xi^{2/(k+1)}[(1 + \lambda\xi)^{2k/(k+1)} + \lambda\xi^{1-2/(k+1)}]^{(k+1)/2+1}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1 + \lambda z_1)^k}{[(1 + \lambda z_1)^{2k/(k+1)} + \lambda z_1^{1-2/(k+1)}]^{(k+1)/2}} \frac{\lambda(k - (k+1)/2)}{(1 + \lambda\eta)^{k-(k+1)/2+1}} > \\
> \frac{\lambda(1 + \lambda/(1 + \lambda)^k)^{k-1}[(\lambda/(1 + \lambda)^k)(k+1)/2 - (k+1)/2 + 1]}{(1 + \lambda)^{(k-1)/2}[(1 + \lambda)^{2k/(k+1)} + \lambda]^{(k+3)/2}} + \\
& + \frac{(1 + \lambda/(1 + \lambda)^k)^k \lambda(k-1)}{2[(1 + \lambda)^{2k/(k+1)} + \lambda]^{(k+1)/2} (1 + \lambda)^{(k+1)/2}} > \\
> \frac{\lambda[(1 + \lambda)^k + \lambda]^{k-1}[\lambda(k+1) - (k-1)(1 + \lambda)^k]}{2(1 + \lambda)^{k^2+k+1}[(1 + \lambda)^{2k} + \lambda]^{k+3}} + \\
& + \frac{[(1 + \lambda)^k + \lambda]^k \lambda(k-1)}{2(1 + \lambda)^{k^2+k+1}[(1 + \lambda)^{2k} + \lambda]^{k+3}} > -1.
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
& \lambda[(1 + \lambda)^k + \lambda]^{k-1}[\lambda(k+1) - (k-1)(1 + \lambda)^k] + \\
& + \lambda(k-1)[(1 + \lambda)^k + \lambda]^k + 2(1 + \lambda)^{k^2+k+1}[(1 + \lambda)^{2k} + \lambda]^{k+3} = \\
& = \lambda[(1 + \lambda)^k + \lambda]^{k-1}[\lambda(k+1) - (k-1)(1 + \lambda)^k + (k-1)[(1 + \lambda)^k + \lambda]] + \\
& + 2(1 + \lambda)^{k^2+k+1}[(1 + \lambda)^{2k} + \lambda]^{k+3} > 0,
\end{aligned}$$

так как

$$\lambda(k+1) - (k-1)(1 + \lambda)^k + (k-1)[(1 + \lambda)^k + \lambda] = 2k\lambda > 0.$$

Значит, система уравнений (7) в этом случае имеет корни только вида $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

3) Случай $i = k$. В силу утверждения 1

$$\frac{1}{(1 + \lambda)^k} < \xi < 1.$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\xi) & = \frac{\lambda(1 + \lambda\xi)^{k-1}[\lambda\xi(k-i+1) - i + 1]}{\xi^{1/i}[(1 + \lambda\xi)^{k/i} + \lambda\xi^{1-1/i}]^{i+1}} > \\
& > \frac{\lambda(1 + \lambda/(1 + \lambda)^k)^{k-1}[\lambda(k-i+1)/(1 + \lambda)^k - i + 1]}{[(1 + \lambda)^{k/i} + \lambda]^{i+1}}. \tag{16}
\end{aligned}$$

При $i = k$ функция $\psi(z) = 1$, значит, $\psi'(z) = 0$ и уравнение (14) имеет вид

$$\varphi'(\xi) + 1 = 0,$$

а неравенство (16) выглядит как

$$\varphi'(\xi) > \frac{\lambda[(1 + \lambda)^k + \lambda]^{k-1}[\lambda + (1 - k)(1 + \lambda)^k]}{(1 + 2\lambda)^{k+1}(1 + \lambda)^{k^2}}.$$

Ясно, что если $\varphi'(\xi) > -1$, то уравнение (14) не имеет решений. Для проверки этого достаточно показать, что правая часть последнего неравенства больше -1 :

$$\frac{\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1}[\lambda + (1-k)(1+\lambda)^k]}{(1+2\lambda)^{k+1}(1+\lambda)^{k^2}} > -1.$$

Действительно,

$$\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1}[\lambda + (1-k)(1+\lambda)^k] + (1+2\lambda)^{k+1}(1+\lambda)^{k^2} > 0,$$

или

$$\lambda^2[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1} + (1+\lambda)^k[(1+2\lambda)^{k+1}(1+\lambda)^{k^2-k} - (k-1)\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1}] > 0.$$

Покажем, что разность

$$(1+2\lambda)^{k+1}(1+\lambda)^{k^2-k} - (k-1)\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1}$$

положительна. Для этого разложим $(1+2\lambda)^{k+1}$ и $[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1}$ по биному Ньютона и сгруппируем следующим образом:

$$\begin{aligned} (1+2\lambda)^{k+1}(1+\lambda)^{k^2-k} - (k-1)\lambda[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1} &= \\ &= (2\lambda)^{k+1}(1+\lambda)^{k^2-k} + \lambda^k[(k+1)2^k(1+\lambda)^{k^2-k} - k+1] + \\ &+ (1+\lambda)^k \lambda^{k-1} \left[\frac{k(k+2)}{2} 2^{k-1}(1+\lambda)^{k^2-2k} - (k-1)^2 \right] + \\ &+ (1+\lambda)^{2k} \lambda^{k-2} (k-1) \left[\frac{k(k+1)}{3} 2^{k-2}(1+\lambda)^{k^2-3k} - \frac{(k-1)(k-2)}{2} \right] + \\ &+ \dots + (1+\lambda)^{k^2-3k} \lambda^3 (k-1) \left[\frac{k(k+1)}{3} 2^3(1+\lambda)^{2k} - \frac{(k-1)(k-2)}{2} \right] + \\ &+ (1+\lambda)^{k^2-2k} \lambda^2 \left[\frac{k(k+1)}{2} 2^2(1+\lambda)^k - (k-1) \right] + \\ &+ (1+\lambda)^{k^2-k} \lambda[(k+1)2 - (k-1)] + (1+\lambda)^{k^2-k}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что каждая разность в квадратных скобках в правой части этого равенства при соответствующих значениях k положительна. Следовательно, $\varphi'(\xi) > -1$, а это значит, что уравнение (13) при $i = k$ имеет корни только вида $z_1 = z_4$. Следовательно, по лемме 1 система уравнений (7) при этом условии имеет единственное решение вида $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

4) Случай $i = k-1$. Доказательство аналогично предыдущим случаям. Используя утверждение 1, докажем неравенство (15) для этого случая, т. е. при $i = k-1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \psi(z_1)\varphi'(\xi) - \varphi(z_1)\psi'(\eta) &= \frac{\lambda(1+\lambda\xi)^{k-1}(2\lambda\xi - k + 2)}{(1+\lambda z_1)\xi^{1/(k-1)}[(1+\lambda\xi)^{k/(k-1)} + \lambda\xi^{(k-2)/(k-1)}]^k} + \\ &+ \frac{\lambda(1+\lambda z_1)^k}{[(1+\lambda z_1)^{k/(k-1)} + \lambda z_1^{(k-2)/(k-1)}]^{k-1}(1+\lambda\eta)^2} > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{\lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^{k-1}(2\lambda + (2-k)(1+\lambda)^k)}{(1+\lambda)^{k^2+1}[(1+\lambda)^{k/(k-1)} + \lambda]^k} + \\
&\quad + \frac{\lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^k}{[(1+\lambda)^{k/(k-1)} + \lambda]^{k-1}(1+\lambda)^{k^2+2}} > \\
&> \frac{\lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^{k-1}(2\lambda + (2-k)(1+\lambda)^k)}{(1+\lambda)^{k^2+2}[(1+\lambda)^k + \lambda]^k} + \\
&\quad + \frac{\lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^k}{[(1+\lambda)^k + \lambda]^{k-1}(1+\lambda)^{k^2+2}} = \\
&= \frac{\lambda[2\lambda + (2-k)(1+\lambda)^k] + \lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^2}{(1+\lambda)^{k^2+2}[(1+\lambda)^k + \lambda]} > -1.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$2\lambda^2 + \lambda((1+\lambda)^k + \lambda)^2 + (1+\lambda)^k[(1+\lambda)^{k^2+2} + \lambda(1+\lambda)^{k^2-k+2} - (k-2)\lambda] > 0,$$

так как выражение в квадратных скобках положительно. Теорема доказана.

Из этой теоремы при $i \in \{1, (k+1)/2, k-1, k\}$ следует, что независимо от значений λ все слабопериодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

Следующая теорема дает условия для λ при всех значениях i .

ТЕОРЕМА 4. При $\lambda \in (0, \lambda_{\text{cr}}] \cup [(i-1)/(z_-(k-i+1)), +\infty)$ для НС-модели все H_A -слабопериодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Здесь z_- и λ_{cr} определены в утверждении 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\lambda \in (0, \lambda_{\text{cr}}]$ следует из утверждения 1. Рассмотрим уравнение (14). Ясно, что оно не имеет решений, если $\varphi'(\xi) \geq 0$, а это значит, что $\lambda\xi(k-i+1) - i + 1 \geq 0$, или

$$\lambda \geq \frac{i-1}{\xi(k-i+1)}.$$

В силу утверждения 1 имеем $z_- \leq \xi$. Тогда, заменив ξ на z_- , в правой части последнего неравенства получим утверждение теоремы 4.

Благодарности. У. А. Розиков благодарит Institute des Hautes Etudes Scientifiques (Бюр-сюр-Ивет, Франция) за финансовую поддержку пребывания в IHES в январе–апреле 2012 г., а также программу IMU/CDC за поддержку.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35:2** (1990), 220–230.
- [5] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, *J. Stat. Phys.*, **79:1–2** (1995), 473–482.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111:1** (1997), 109–117.
- [7] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112:1** (1997), 170–175.
- [8] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9:3** (2006), 471–488.

- [9] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [10] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **12**:2 (2009), 141–156.
- [11] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **119**:1–2 (2005), 427–446, arXiv: math-ph/0510020.
- [12] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 412–424.
- [13] Yu. M. Suhov, U. A. Rozikov, *Queueing Syst.*, **46**:1–2 (2004), 197–212.
- [14] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.
- [15] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.
- [16] S. Zachary, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.

Поступила в редакцию 20.02.2012