Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Морозов, Загадки β -деформации, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 104–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6967>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:22:45

© 2012 г.

А. Ю. Морозов*

ЗАГАДКИ β -ДЕФОРМАЦИИ

Дано краткое описание проблем, возникающих при изучении β -деформации, которая оказывается самым сложным элементом в целом ряде современных задач: отклонение β от единицы связано с уходом из “точки свободных фермионов” в двумерных конформных теориях, из симметричного гравифотонного поля с $\epsilon_2 = -\epsilon_1$ в инстантонных суммах четырехмерных суперсимметричных теориях Янга–Миллса, с переходом от матричных моделей к бета-ансамблям, от полиномов HOMFLY к суперполиномам в теории Черна–Саймонса, от квантовых групп к эллиптическим и гиперболическим алгебрам и т.д. Основное внимание уделено вопросам, связанным с соотношением Алдая–Гайотто–Тачикавы и его возможными обобщениями.

Ключевые слова: матричные модели, бета-ансамбли, конформные теории, соотношение Алдая–Гайотто–Тачикавы, инварианты узлов, симметрические функции.

1. β -ДЕФОРМАЦИЯ

Настоящая статья представляет собой краткий обзор недавних результатов о новой роли β -деформации – классического сюжета из теории матричных моделей и симметрических функций. Сегодня β -деформация оказалась в центре внимания вследствие ее роли в таких современных проблемах теоретической физики, как соотношения Алдая–Гайотто–Тачикавы (АГТ) [1], топологическая рекурсия [2], [3], теория узлов (теория Черна–Саймонса (ЧС)) [4]–[11] и матричных моделей [12]. Далее мы приводим в основном конкретные ссылки на новые результаты, более ранние основополагающие работы цитируются в указанных статьях.

Простейший пример, объясняющий необходимость β -деформации, можно найти в элементарной комбинаторике. Известная функция Дедекинда определяет число диаграмм Юнга с заданным числом клеток: если $2\#_k$ – число целочисленных разбиений натурального k , то

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2\#_k \cdot q^k = 1 + q + 2q^2 + \dots = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1}.$$

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: morozov@itep.ru

Точно так же функция Мак-Махона дает число трехмерных диаграмм Юнга:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3\#_k \cdot q^k = 1 + q + 3q^2 + \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-k}.$$

Однако эта формула не выглядит как разложение на элементарные составляющие, и вместо нее следует рассмотреть более “тонкую” (refined) структуру типа $\prod_{i,j} (1 - q^i t^j)^{-1}$. Тогда исходная формула Мак-Махона возникает в специальной точке $t = q$. В этом примере видно, как разложение на элементарные составляющие требует введения в производящие функции дополнительных параметров (в данном случае перехода от однократного к двойному разложению), и в довольно большом числе случаев такое “утончение” происходит по одной и той же схеме, имеющей теоретико-групповую природу, что позволяет говорить о существовании естественного “второго квантования”. Параметр β возникает в (q, t) -параметризации следующим образом: $t = q^\beta$; при этом недеформированной ситуации отвечает значение $\beta = 1$. Пределы $\beta = 0$ и $\beta = \infty$, как и $q \rightarrow 0$ при фиксированной β , нетривиальны и в равной степени интересны.

Далее мы разбираем различные примеры того, как и где в современных исследованиях возникает β -деформация, и предпринимаем попытку выделить общие свойства и взаимозависимости этих примеров.

1.1. Теория групп. До сих пор наиболее эффективным остается описание β -деформации в терминах симметрических функций. В таком контексте она сводится к замене линейного базиса в пространстве симметрических функций, а именно к замене функций Шура $S_R\{p_k\}$, являющихся характеристиками алгебры $GL(\infty)$, на полиномы Макдональда $M_R\{p_k\}$ [13]. Функции Шура являются собственными для операторов переклейки (cut-and-join) $\widehat{W}(\Delta)$:

$$\widehat{W}(\Delta)S_R = \varphi_R(\Delta)S_R,$$

где через $\Delta = \{\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq 0\}$ обозначены целочисленные разбиения, или диаграммы Юнга. Если с помощью преобразования Мивы выразить бесконечное множество временных переменных $\{p_k\}$ через собственные значения $(N \times N)$ -матрицы X как $p_k = \text{tr } X^k = k t_k$, то функции Шура на таком подпространстве становятся характеристиками группы $SL(N)$ и

$$\widehat{W}(\Delta) = : \prod_i \text{tr} \left(X \frac{\partial}{\partial X} \right)^{\delta_i} :$$

(здесь нормальное упорядочение определено так, что все производные по X стоят справа от всех X). Аналогичным образом полиномы Макдональда являются собственными функциями гамильтонианов Рейсенарса [14].

1.2. Редукции. Одномерная интегрируемая система Рейсенарса является обобщением (деформацией) системы Калоджеро, так что полиномы Макдональда представляют собой обобщение обычных функций Шура, которые являются собственными функциями гамильтонианов Калоджеро. Между ними располагаются два важных промежуточных случая: полиномы Холла–Литлвуда и полиномы Джека,

которые получаются из полиномов Макдональда при $q = 0$ и в пределе $q = t \rightarrow 1$, взятом вдоль линии $t = q^\beta$, соответственно (см. диаграмму).

1.3. Ортогональные полиномы. На языке матричных моделей указанная иерархия полиномов связана с иерархией мер интегрирования:

$$\begin{aligned}
 \text{полиномы Шура :} \quad & \oint \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \prod_i \frac{dx_i}{x_i} \longrightarrow \\
 \text{полиномы Джека :} \quad & \oint \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{2\beta} \prod_i \frac{dx_i}{x_i} \longrightarrow \\
 \text{полиномы Макдональда :} \quad & \oint \prod_{i \neq j} \prod_{k=0}^{\beta-1} (x_i - q^k x_j) \prod_i \frac{dx_i}{x_i}.
 \end{aligned}$$

Конкретная интерпретация и роль этих мер могут быть разными в зависимости от выбора контуров интегрирования: в некоторых случаях соответствующие полиномы ортогональны, в общем случае линейные и квадратичные средние от этих полиномов полностью факторизуются – принадлежат классу интегралов Сельберга [15].

1.4. Примеры. Простейшие полиномы Макдональда имеют вид

$$\begin{aligned}
 M_1 = p_1 = \text{tr } X = \sum_i x_i, \quad M_{11} = \frac{1}{2}(-p_2 + p_1^2) = \sum_{i < j} x_i x_j, \\
 M_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{(q - q^{-1})(t + t^{-1})}{qt - (qt)^{-1}} p_2 + \frac{(q + q^{-1})(t - t^{-1})}{qt - (qt)^{-1}} p_1^2 \right), \quad \dots
 \end{aligned}$$

Особенно важны размерности Макдональда, представляющие собой β -деформации квантовых размерностей. Размерности Макдональда определены как значения M_R^*

Рис. 1. Формула крюков.

полиномов Макдональда на подпространстве $p = p^*$, где

$$p_k^* = \frac{A^k - A^{-k}}{t^k - t^{-k}} = \frac{\{A^k\}}{\{t^k\}}, \quad A = t^N, \quad \{A\} = A - \frac{1}{A}.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} M_1^* &= \frac{\{A\}}{\{t\}} \xrightarrow{t=q} [N]_q \xrightarrow{q=1} N, \\ M_{11}^* &= \frac{\{A/t\}}{\{t\}} \frac{\{A\}}{\{t^2\}} \xrightarrow{t=q} \frac{[N-1]_q [N]_q}{[2]_q} \xrightarrow{q=1} \frac{(N-1)N}{2}, \\ M_2^* &= \frac{\{A\}}{\{t\}} \frac{\{Aq\}}{\{qt\}} \xrightarrow{t=q} \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q} \xrightarrow{q=1} \frac{N(N+1)}{2}, \quad \dots \end{aligned}$$

Размерности Макдональда даются формулой крюков (см. также рис. 1):

$$M_R^* = \prod_{(i,j) \in R} \frac{\{Aq^{i-1}/t^{j-1}\}}{\{q^k t^{l+1}\}}.$$

Эти соотношения легко могут узнать те, кто знаком с функциями Некрасова [16] или с формулами из теории топологических вертексов [17], [18]. При $\beta \neq 1$ только $M_{11\dots 1}^*$ в полностью антисимметричных (фундаментальных) представлениях являются полиномами после подстановки $A = t^N$.

1.5. Роль β -деформации. Сегодня β -деформация вышла на авансцену: она больше не является игрушкой ума, а естественным образом возникает в изучаемых нами физических теориях. Приведем лишь два примера.

Соотношение АГТ [1], [19]. Исходным пунктом является шестимерная конформная теория, компактифицированная на риманову поверхность. Соотношение АГТ связывает “нечто двумерное”, живущее на римановой поверхности, с “чем-то четырехмерным”, живущим в некомпактифицированных измерениях. Например, конформным блокам [20] соответствуют интегралы Лосева–Мура–Некрасова–Шаташвили (ЛМНШ) [21], которые представляются в виде сумм функций Некрасова по набору $R_1, \dots, R_N$ диаграмм Юнга. Соотношение АГТ подразумевает следующую связь между параметрами c, g_s, β, b в конформной теории поля (КТП) с характеристиками ϵ_1, ϵ_2 гравифотонного фона и рангом $N-1$ калибровочной группы

$SU(N)$ в интегралах ЛМНШ:

$$c = (N-1) \left\{ 1 - N(N+1) \left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^2 \right\},$$

$$g_s = \sqrt{-\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \beta = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = b^2.$$

Функции Некрасова имеют типичную форму произведения по крюкам, похожую на размерности Макдональда.

Трехмерное соотношение АГТ пока остается гипотетическим, поиски его продолжают по разным направлениям [22]. Самой интересной кажется версия, включающая в игру трехмерную теорию ЧС, она связывает, например, (модулярные) преобразования S -дуальности с инвариантами узлов. Вильсоновское среднее в теории ЧС есть полином HOMFLY от двух переменных $q = e^{2\pi i/(k+N)}$ и $a = q^N$. В представлении Хиками через квантовые дилогарифмы [23] полиномы HOMFLY напоминают формулы Тешнера для модулярных преобразований [24], хотя поиск точного соответствия наталкивается на известные трудности [25]. После β -деформации полином HOMFLY (от a и q) переходит при $\beta \neq 1$ в суперполином $P(A|q|t)$:

$$P_R[K](A|q|t) = \sum_{Q \vdash m|R|} c_R^Q[K] M_Q^*; \quad (1)$$

здесь сумма берется по диаграммам Юнга, размер которых превышает размер $|R|$ диаграммы R в m раз, где m – число нитей в представлении в виде кос проекции узла K на двумерную плоскость. В последнем равенстве $t = q^\beta$, и вся зависимость от $A = t^N$ сосредоточена в β -квантовой размерности (Макдональда) M_Q^* .

В общем случае разложение (1) неоднозначно, зафиксировать произвол можно с помощью R -матричного представления [26], [27]. После этого можно использовать формулу (1) для того, чтобы распространить (супер)полиномы на все пространство временных переменных, просто сделав замену $M_Q^* \rightarrow M_Q\{p\}$ [28]. Коэффициенты $c_R^Q[K]$ зависят от узла, они являются рациональными функциями от q , t и для торических узлов описываются простым W -представлением.

1.6. Что сохраняется при β -деформации? Ответ на этот вопрос таков: все, что связано с исчислением характеров, а именно уравнения Зайберга–Виттена (ЗВ)

$$a_i = \oint_{A_i} \Omega, \quad \frac{\partial \ln Z}{\partial a_i} = \oint_{B_i} \Omega, \quad (2)$$

из которых вытекает квазиклассическая интегрируемость и уравнения ВДВВ, а также уравнения Вирасоро и, следовательно, топологическая рекурсия АММ/ЭО [2], [3], W -представления, соотношения АГТ, инварианты узлов.

1.7. Что теряется при β -деформации? Ответ на этот вопрос таков: все, связанное с интегрируемостью типа Кадомцева–Петвиашвили (КП), а именно τ -функция Z , детерминантные представления, рекурсия Харера–Цагира, матричная модель Концевича, конструкция Тураева–Решетихина.

Во всех этих случаях представляется естественной гипотеза, что существуют какие-то неизвестные на сегодняшний день β -модификации.

1.8. Существуют ли естественные и изящные разложения? Одной из загадок β -деформации является то, что при $\beta \neq 1$ величины, пока что кажущиеся естественными с точки зрения квантовой теории поля, перестают совпадать с теми, которые обладают самыми простыми алгебраическими свойствами. Судя по всему соотношение АГТ должно быть дуальностью Хаббарда–Стратоновича, однако функции Некрасова не являются дуальными конформным блокам. Более того, у них возникают лишние полюсы [29]. Наивные инварианты узлов в нефундаментальных представлениях $R \neq [1^{|R|}]$ не являются цветными суперполиномами [11] (см. табл. 1).

ТАБЛИЦА 1

	Естественные величины	Факторизуемые компоненты
Интеграл Доценко–Фатеева	Корреляторы Сельберга	Функции Некрасова
Инварианты узлов	Суперполиномы	Размерности Макдональда

2. МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

Особо важную роль τ -функции матричных моделей играют в теории струн, что делает их предпочтительными кандидатами на роль следующего поколения специальных функций [2]. Собственнозначные матричные модели могут быть определены различными взаимосвязанными способами [30].

2.1. Многократные интегралы (по собственным значениям). Мы имеем

$$Z = \left(\prod_{i=1}^N \int dx_i e^{V(x_i)/g_s} \right) \Delta^2\{x\}. \quad (3)$$

Когда-нибудь станет возможным точное описание этих интегралов в рамках *нелинейной алгебры* [31]. Простейшими примерами являются интегральные дискриминанты. В общем случае обычные дискриминанты определяют лишь сингулярности интегральных дискриминантов, а полные ответы для них более сложны [32]:

$$\begin{aligned} \iint dx dy e^{ax^2+bx y+dy^2} &\sim D_{2|2}^{-1/2}, \\ \iiint dx dy e^{ax^3+bx^2 y+cx y^2+dy^3} &\sim D_{2|3}^{-1/6}, \end{aligned}$$

где

$$D_{2|2} = 4ad - b^2, \quad D_{2|3} = 27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d.$$

Хотя в общем случае формулы такого типа не существуют, изучение интегральных дискриминантов разными методами говорит о наличии множества скрытых структур.

2.2. Тождества Уорда. Эти соотношения также известны как петлевые уравнения, или уравнения Вирасоро [33]–[35]. Они задают рекурсивные соотношения для корреляторов:

$$\left(\sum_k k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{a+b=n} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \right) Z = 0.$$

При β -деформации тождества Уорда сохраняются, только слегка модифицируются [36].

2.3. Интегрируемая структура. Как функция параметров t_k в выражение

$$V(x) = \sum_k t_k x^k$$

интеграл $Z\{t\}$ является τ -функцией из семейства τ -функций уравнений КП и цепочки Тоды [37]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln Z_N = \frac{Z_{N+1} Z_{N-1}}{Z_N^2}.$$

Это свойство нарушается (по крайней мере, серьезно модифицируется) при β -деформации.

2.4. Топологическое разложение. Мера $\Delta^2(x)$ и действие в интеграле (3) по-разному зависят от N ,

$$\Delta\{x\} = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)^\beta, \quad \ln \Delta + \sum_i \frac{1}{g_s} V(x_i) \sim N^2 \oplus N/g_s,$$

поэтому удобно перейти от N к новой переменной $a = Ng_s$ – константе связи т'Хоофта, так что в результате интегрирования свободная энергия получается как ряд по степеням g_s :

$$F = g_s^2 \ln Z = \sum_{p=0}^{\infty} g_s^{2p} F_p(a).$$

Если различные множества собственных значений интегрируются по разным контурам, то вместо одного параметра a имеется несколько (по числу контуров) параметров a_I . В теории возмущений F_0 дается суммой планарных диаграмм, старшие F_p отвечают диаграммам, лежащим на поверхностях старшего рода p . Спектральная (комплексная) кривая Σ вводится на уровне нулевого рода, т. е. информация о ней содержится в структуре F_0 . Спектральная кривая играет определяющую роль в двух случаях: при описании резольвент и уравнений ЗВ.

Резольвентами называются специального вида производящие функции корреляторов:

$$\rho^{(p|m)}(z_1, \dots, z_m) = \left\langle \prod_{i=1}^m \operatorname{tr} \frac{dz_i}{z_i - X} \right\rangle_p = \sum_{\{k_i\}} \frac{1}{z_i^{k_i+1}} \left\langle \prod_i \operatorname{tr} X^{k_i} \right\rangle_p.$$

Это определение имеет следующие (заранее не очевидные) достоинства. Резольвенты являются мероморфными полидифференциалами на спектральной кривой Σ ; вследствие соотношений Вирасоро резольвенты для данной кривой Σ могут быть построены рекуррентно с помощью рекурсии АММ/ЭО [2], [3] по начальным данным:

затравочному (классическому) дифференциалу ЗВ $\Omega^{(0)} = \rho^{(0|1)} \sim y(z) dz$ и ядру Бергмана $\rho^{(2|0)}$. У данного подхода есть, однако, и недостаток: сумму по всем родам, в частности

$$\Omega(z) = \rho^{(\cdot|1)}(z) = \sum_p g_s^{2p} \rho^{(p|1)}(z),$$

с помощью рекурсии АММ/ЭО построить практически невозможно. В то же время сумма $\Omega(z)$ по-настоящему важна, она является дифференциалом ЗВ для полной свободной энергии $F(a) = \sum_p g_s^{2p} F_p(a)$, т.е. именно она входит в полные уравнения ЗВ.

2.5. Уравнения ЗВ. Это совместная система уравнений (2), которые, по-видимому, справедливы и для матричных моделей, и для β -ансамблей (в это многие верят, но доказательство пока неизвестно). Простейшим является гауссов пример с $\beta = 1$, где спектральная кривая Σ задается уравнением $y^2(z) = z^2 - 4g_s N$:

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{N!} \int dx_i (x_i - x_j)^2 e^{-x_i^2/2g_s} \sim g_s^{N^2/2} \prod_{k=1}^{N-1} k!, \\ \frac{\partial}{\partial N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) &= \sum_k \frac{B_k}{k!} \partial^k f(N), \\ \frac{\partial}{\partial N} \ln Z_N &= N(\ln g_s N - 1) + \sum_k \frac{B_{2k}}{k} \frac{1}{N^{2k-1}}, \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{y(z)}{2} + \frac{g_s^2}{y^5(z)} + \frac{21g_s^4(z^2 + g_s N)}{y^{11}(z)} + \dots, \\ \oint_A \Omega(z) &= N, \quad \oint_B \Omega(z) = \frac{\partial}{\partial N} \ln Z_N. \end{aligned}$$

В гауссовом случае $\beta = 1$ справедливость уравнений ЗВ удастся доказать, опираясь на свойство интегрируемости. Однако эти уравнения выполняются и при $\beta \neq 1$, хотя интегрируемость при этом утрачивается или как-то модифицируется. Обобщение на негауссов случай в матричных моделях дается теорией фаз Диркграафа–Вафы [38].

2.6. Как определить $\rho^{(\cdot|1)}$? Возможным ключом к этой задаче является рекурсия Харера–Цагира. Но в отличие от рекурсии АММ/ЭО, индуцированной соотношениями Вирасоро [35], эта рекурсия является следствием интегрируемости [39], и потому гораздо хуже ведет себя при β -деформации [40].

Рассмотрим гауссову модель $V(x) = x^2/2$. Имется целый ряд производящих функций для гауссовых корреляторов:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \sum_k \frac{1}{z^{2k+1}} \langle \text{tr } X^{2k} \rangle, \\ \phi(t) &= \sum_k \frac{t^{2k}}{(2k-1)!!} \langle \text{tr } X^{2k} \rangle, \end{aligned}$$

$$e(s) = \sum_k \frac{s^{2k}}{(2k)!} \langle \text{tr } X^{2k} \rangle.$$

Поскольку

$$\langle \text{tr } X^{2k} \rangle^{N=1} \sim (2k-1)!! \longrightarrow \langle \text{tr } X^{2k} \rangle_0 \sim \frac{(2k-1)!!}{(k+1)!}$$

(выражения в правой части представляют собой числа Каталана), наиболее простой должна быть вторая из этих функций. В самом деле

$$\phi(t|N) = \frac{1}{2t^2} \left(\left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^N - 1 \right).$$

При $N \rightarrow \lambda$

$$\hat{\phi}(t|\lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} \phi(t|N) \lambda^N = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{1-\lambda-(1+\lambda)t^2}.$$

Многоточечные корреляторы записываются как

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\text{odd}}(t_1, t_2|\lambda) &= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda+(1+\lambda)(t_1^2+t_2^2)}} \times \\ &\times \arctg \frac{t_1 t_2 \sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{1-\lambda+(1+\lambda)(t_1^2+t_2^2)}}, \end{aligned}$$

а другие производящие функции суть

$$\begin{aligned} \hat{e}(s|\lambda) &= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \exp \left\{ \frac{1+\lambda}{1-\lambda} s^2 \right\}, \\ \hat{\rho}(z|\lambda) &= \frac{i\lambda}{(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda^2}} \text{erf} \left(iz \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(1+\lambda)^k}{(1-\lambda)^{k+2}} \frac{(2k-1)!!}{z^{2k+1}}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\rho(z) = \frac{z-y(z)}{2} + \frac{N}{y^5(z)} + \frac{21N(z^2+N)}{y^{11}(z)} + \dots$$

При β -деформации мы имеем следующее: для $\beta = 2$ и $\beta = 1/2$ одноточечные функции все еще выражаются через арктангенс, а в случае $\beta = 3$ для одноточечной функции удастся написать дифференциальное уравнение.

2.7. W -представления [41]. Статистическая сумма может быть описана как результат “эволюции”, порождаемой W -оператором переклейки, которая начинается при очень простых “начальных условиях”: $Z\{p\} = e^{g\bar{W}} \tau_0\{p\}$. Если $W \in UGL(\infty)$, то эволюция сохраняет интегрируемость типа интегрируемости уравнений КП и цепочки Тоды.

Мы имеем

$$\widehat{W}_n = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \left((a+b+n) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b+n}} + b p_{a+b-n} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right).$$

В случае эрмитовой матричной модели

$$Z_N = \int dX \exp \left\{ \sum_k \frac{p_k}{k} \operatorname{tr} X^k \right\} = e^{\widehat{W}_{-2}} e^{N p_0}.$$

В модели Концевича [42]

$$Z = \int dX \exp \left\{ \operatorname{tr} \left(\frac{1}{3} X^3 - L^2 X \right) \right\} = e^{\widehat{W}_{-1}^K} \cdot \mathbf{1}, \quad \widehat{W}_{-1}^K = \frac{2}{3} \sum \left(k + \frac{1}{2} \right) \tau_k L_{k-1}^K$$

и $p_k = \operatorname{tr} L^{-k}$. В случае модели Гурвица [43] $Z = e^{t \widehat{W}_0} e^{p_1}$. В теории торических узлов и зацеплений [11], [44]

$$Z = q^{n \widehat{W}_0 / m} \prod \tilde{\chi}_R,$$

где произведение берется по компонентам линка. Эти формулы указывают на некоторую замечательную связь между теориями Гурвица и торических узлов.

3. СООТНОШЕНИЯ АГТ

В истории с соотношениями АГТ особый интерес представляют следующие четыре сюжета: матричная модель Доценко–Фатеева [45], дуальность Хаббарда–Стратоновича [29], связь с интегрируемыми системами [46], [47] и интегралы Бора–Зоммерфельда [48]. Центральным фактом (наблюдением) является совпадение определенных нетривиальных величин в теориях, принадлежащих четырем совершенно разным классам, и даже в разных размерностях (см. диаграмму).

Каждый элемент на этой диаграмме может быть выбран в качестве представителя класса универсальности. Для каждого типа теорий существуют свои “естественные” деформации и обобщения, и можно изучать вопрос о том, что соответствует им в других частях диаграммы.

3.1. Квантование интегрируемых систем. Соответствие, обозначенное левой вертикальной стрелкой на диаграмме из предыдущего пункта, хорошо изучено в исходном контексте теорий ЗВ [49]: уравнения ЗВ для непертурбативного (индуцированного инстантонами) препотенциала в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса выражаются через переменные действия для классических одномерных интегрируемых систем [46]. Когда такая теория деформируется за счет погружения в гравифотонный Ω -бэкграунд (в сохраняющую часть суперсимметрий фоновое гравифотонное поле) [21], характеризуемый двумя параметрами ϵ_1 и ϵ_2 , интегрируемая система деформируется. Первая естественная догадка состоит в том, что деформация связана с квантованием интегрируемой системы. Возникающие при этом

уравнения типа Шредингера могут рассматриваться как фурье-преобразования уравнений Бакстера, а последние действительно связываются с помощью соотношений АГТ с уравнениями для конформных корреляторов с дополнительными вставками вырожденных состояний. Описание типа ЗВ при этом связано с интегралами Бора–Зоммерфельда [48]: если волновая функция равна $\Psi(z) = \exp\{\int^z \Omega\}$, где $\Omega = P dz$, с квантово-подправленным импульсом $P(z)$, то $\partial F/\partial a = \oint_B \Omega$, $a = \oint_A \Omega$. Но на самом деле это квантование интегрируемой системы отвечает только пределу Некрасова–Шаташвили $\epsilon_1 \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$.

3.2. Представление конформных блоков в теории матричных моделей.

В простейшем четырехточечном примере конформный блок параметризуется следующими данными:

$$\begin{array}{ccc} V_{\alpha_2}(q) & & V_{\alpha_3}(1) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \alpha & \\ & \nwarrow \quad \searrow & \\ V_{\alpha_1}(0) & & V_{\alpha_4}(\infty) \end{array}.$$

Фактически он равен (здесь $\alpha_1 + \alpha_2 + bN_1 = \alpha$ и $\alpha + \alpha_3 + \alpha_4 + bN_2 = 0$)

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{\alpha_1 \phi(0)} e^{\alpha_2 \phi(q)} e^{\alpha_3 \phi(1)} e^{\alpha_4 \phi(\infty)} \prod_{i=1}^{N_1} \int_0^q dx_i e^{b\phi(x_i)} \prod_{j=1}^{N_2} \int_0^1 dy_j e^{b\phi(y_j)} \right\rangle = \\ &= \int dx_i \int dy_j (x_i - x_{i'})^{2\beta} (y_j - y_{j'})^{2\beta} \underline{(x_i - y_j)^{2\beta}} (x_i y_j)^{2\alpha_1 b} \times \\ & \quad \times ((q - x_i)(q - y_j))^{2\alpha_2 b} ((1 - x_i)(1 - y_j))^{2\alpha_3 b} = \\ &= \int d\mu(x) \int d\mu(y) \text{Mixt}^2(x|y), \end{aligned} \quad (4)$$

где подчеркиванием выделен “смешивающий” фактор – единственный член, зависящий и от x , и от y . При $\beta = 1$

$$d\mu(x) = \prod_{i < i'} (x_i - x_{i'})^2 \prod_i x_i^a (1 - x_i)^c dx_i$$

есть мера Сельберга. Естественными являются средние по мере Сельберга от функций Шура: они хорошо факторизуются и в точности совпадают с функциями Некрасова. При этом β -деформация подразумевает замену меры на меру Макдональда:

$$\int \prod_{k=0}^{\beta-1} dx_i \prod_{i \neq i'} (x_i - q^k x_{i'}), \quad q^\beta = t$$

(здесь имеется в виду интеграл Джексона), однако средние от полиномов Джека и Макдональда по такой мере часто не факторизуются, но вместо этого разлагаются как линейные композиции факторизуемых величин (функций Некрасова).

3.3. Предел чисто калибровочной теории, модель Брезана–Гросса–Витена. Данный предел, который представляется естественным с точки зрения теорий Янга–Миллса, сопряжен с нарушением конформной инвариантности, и потому отвечает чему-то интересному на стороне конформных теорий. В этом “чисто калибровочном” пределе логарифмический β -ансамбль превращается в модель

Брезана–Гросса–Виттена (БГВ) (уже при $\beta = 1$ это модель унитарных, а не эрмитовых матриц!) [50]. Эллиптический случай, связанный с конформными блоками на торе, по-видимому, требует рассмотрения фазы с двумя разрезами в модели БГВ [51]. Отметим также, что модель БГВ является важным “кирпичиком” в теории матричных моделей [52].

3.4. Конформный блок как среднее от характеров. Если продолжить соотношения (4), то выяснится, что конформный блок фактически равен [53]

$$\begin{aligned}
 & \int d\mu(x) \int d\mu(y) \exp\left(2\beta \sum_{i,j} \ln(1 - x_i y_j)\right) = \\
 & = \int d\mu(x) \int d\mu(y) \exp\left(2\beta \sum_k \frac{p_k \bar{p}_k}{k}\right) = \\
 & = \int d\mu(x) \int d\mu(y) \sum_A \chi_A(X) \chi_A(Y) \sum_B \chi_B(X) \chi_B(Y) = \\
 & = \sum_{A,B} \left(\int d\mu(x) \chi_A(X) \chi_B(X) \right) \left(\int d\mu(y) \chi_A(Y) \chi_B(Y) \right). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Здесь $p_k = \text{tr } X^k$, $\bar{p}_k = \text{tr } Y^k$ полиномиальны, и для произвольного β роль характеров играют полиномы Макдональда, удовлетворяющие следующему условию полноты:

$$\exp \sum_k \frac{[\beta]_q p_k \bar{p}_k}{k} = \sum_A \frac{C_A}{C_{A'}} M_A(X) M_A(Y).$$

3.5. Соотношение АГТ как дуальность Хаббарда–Стратоновича.

Конформный блок (5) имеет вид двойной суммы четырех характеров, каждый из которых зависит от двух аргументов. Такие суммы можно брать в разном порядке, и получающееся равенство – это именно то, что лежит в основе любой дуальности. В данном случае мы можем описать в таких базовых терминах соотношение АГТ,

и мы имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{X,Y} \left(\sum_A \chi_A(X) \chi_A(Y) \right) \left(\sum_B \chi_B(X) \chi_B(Y) \right) = \\
 & = \sum_{A,B} \left(\sum_X \chi_A(X) \chi_B(X) \right) \left(\sum_Y \chi_A(Y) \chi_B(Y) \right).
 \end{aligned}$$

Согласно соотношению АГТ конформный блок (5) равен $\sum_{A,B} N_{A,B}$, и естественно ожидать, что

$$\int d\mu(X) \chi_A(X) \chi_B(X) \int d\mu(Y) \chi_A(Y) \chi_B(Y) \stackrel{?}{=} N_{A,B}$$

(вопросительный знак здесь стоит потому, что функция Некрасова получается таким образом только при $\beta = 1$).

3.6. Проблема лишних полюсов при $\beta \neq 1$. При $\beta \neq 1$ ситуация не столь проста. Уже в простейшем примере

$$\begin{aligned} \langle \chi_{[1]} \chi_{\bullet} \rangle \langle \chi_{[1]} \chi_{\bullet} \rangle + \langle \chi_{\bullet} \chi_{[1]} \rangle \langle \chi_{\bullet} \chi_{[1]} \rangle &= \frac{1}{(z - \epsilon)} \frac{1}{(z + \epsilon)} + \frac{1}{(z + \epsilon)} \frac{1}{(z - \epsilon)} = \\ &= \frac{2}{z^2 - \epsilon^2} = \frac{1}{z(z - \epsilon)} + \frac{1}{z(z + \epsilon)} = N_{[1], \bullet} + N_{\bullet, [1]}. \end{aligned}$$

Отдельные функции Некрасова при $\epsilon \neq 0$ ($\beta \neq 1$) приобретают дополнительные полюсы (при $z = 0$), отсутствующие в списке нулей детерминанта Каца, а значит, и в конформных блоках. Зато функции Некрасова прекрасно факторизуются, чего не скажешь о корреляторах по мере Сельберга при $\beta \neq 1$:

$$\begin{aligned} \langle \chi_{[3]} \chi_{\bullet} \rangle_{\text{ВГВ}} &\sim z^2 - (5\epsilon_1 + 8\epsilon_2)z + 6\epsilon_1^2 + 23\epsilon_1\epsilon_2 + 19\epsilon_2^2 \xrightarrow{\epsilon_2 \rightarrow -\epsilon_1} \\ &\xrightarrow{\epsilon_2 \rightarrow -\epsilon_1} z^2 + 3\epsilon_1 z + 2\epsilon_1^2 = (z + \epsilon_1)(z + 2\epsilon_1). \end{aligned}$$

Таким образом, естественные величины, например корреляторы по мере Сельберга, фигурирующие в соотношениях дуальности, оказываются нетривиальными линейными комбинациями факторизуемых величин (функций Некрасова), которые к тому же обладают дополнительными фиктивными особенностями.

Очень схожей оказывается ситуация с инвариантами узлов: суперполиномы для тривиального узла (unknot) (естественные величины), по-видимому, являются линейными комбинациями размерностей Макдональда, т. е. величин факторизуемых.

4. УЗЛЫ

На самом деле эта история не столько об узлах, сколько опять о средних от характеров. Обычно в теории узлов нас интересует следующая цепочка объектов и связанных с ними производящих функций [28]:

$$\begin{aligned} \text{узел(knot)} &\longrightarrow \text{вильсоновское среднее} \quad K = \left\langle \text{Pexp} \oint_{\text{knot}} \mathcal{A} \right\rangle_{\text{CS}} \longrightarrow \\ &\longrightarrow K\{\bar{p}|\text{knot}\} = \sum_R K_R(\text{knot}) \chi_R\{\bar{p}\} \longleftrightarrow \tau\{\bar{p}|G\}. \end{aligned}$$

Вильсоновское среднее K по существу оказывается полиномом от двух переменных q и $A = q^N$ (который называется полиномом HOMFLY), а функция τ в конце цепочки должна оказаться чем-то вроде обобщенной τ -функции, где G – точка универсального пространства модулей (обобщения универсального грассманиана). Ситуация должна оказаться похожей на теорию матричных моделей, где различным моделям отвечают разные точки G . Точно так же здесь разные G могли бы отвечать разным узлам. Однако для того чтобы этот сценарий был реализован, может потребоваться пока что неизвестная модификация τ -функций, выходящая за пределы τ -функций семейства уравнений КП и цепочек Тоды.

4.1. “Специальные” полиномы [11]. При $q = 1$ полиномы HOMFLY сводятся к $S_R(A) = (S_{[1]}(A))^{|R|} D_R$. Коэффициенты этих “специальных” полиномов $S(A)$ являются числами типа чисел Каталана, задающими количество путей определенного вида на двумерной решетке. Они удовлетворяют соотношениям Плюккера, и потому определяют обычную τ -функцию иерархии КП:

$$\tau\{p\} = \sum_R S_R(A) \chi_R\{p\}.$$

Однако при $q \neq 0$ это уже не так, и τ -функцию необходимо как-то деформировать, выйдя за пределы локуса КП (выйти из “точки свободных фермионов”).

4.2. β -Деформация полиномов HOMFLY. Для данного узла K и данного представления (диаграммы Юнга) R мы имеем иерархию полиномов (см. диаграмму)

Здесь $A = t^N = q^{\beta N}$ и $q = e^{2\pi i/(k+N)}$, а параметр A , пропорциональный экспоненте от константы связи т’Хоофта, остается фиксированным параметром топологического разложения.

4.3. Некоторые объекты, предположительно ассоциированные с узлами. В идеале хотелось бы рассмотреть и понять следующие отображения:

$$\text{узел} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{точка универсального грассманиана (мечта);} \\ \text{вектор в гильбертовом пространстве,} \\ \text{где действуют модулярные операторы } S \text{ и } T; \\ \text{вектор в пространстве характеров} \\ \text{(квантовые размерности или размерности Макдональда).} \end{array} \right.$$

Однако для начала их еще предстоит четко определить.

4.4. R -матричное представление полиномов HOMFLY [26], [27]. В калибровке $A_0 = 0$ инварианты узлов описываются в терминах узловых диаграмм, так что узел заменяется косой, элемент группы кос является произведением квантовых R -матриц (и требует дальнейшего обобщения при β -деформации), а K есть “след” этого элемента группы кос.

Рис. 2. Специальный элемент для торического узла $[5, \cdot]$.

4.5. Торические узлы $T[m, n]$. Торические узлы и зацепления получаются из специального элемента $\mathcal{R}_m$ группы кос, см. рис. 2, где изображен этот элемент, связанный с торическим узлом типа $[5, \cdot]$.

Полином HOMFLY при этом просто равен $H_R^{[m, n]} = \text{Tr}(\mathcal{R}_m)^n$, где след определен как

$$\text{Tr}_Q I^{\otimes m} = \text{tr}_Q q^\rho = \sum_{\vec{\alpha} \in Q} q^{\vec{\rho}\vec{\alpha}} = \chi_Q^*$$

и равен квантовой размерности представления Q . Степень исходного представления разлагается в сумму неприводимых представлений:

$$R_1 \otimes \cdots \otimes R_m = \bigoplus_{Q \vdash (|R_1| + \cdots + |R_m|)} c_R^Q Q.$$

Важно отметить, что Q являются собственными пространствами для произведения элементов $\mathcal{R}_m$ с определенными собственными значениями λ_Q , поэтому [44]

$$H_R^{[m, n]}(A|q) = \sum_Q c_R^Q \lambda_Q^{n/m} \chi_Q^* = e^{n\widehat{W}_0/m} \sum_Q c_R^Q \chi_Q \{p\} \big|_{p=p^*}.$$

4.6. W -представление полиномов HOMFLY для торических узлов. Возникающий в этой задаче W -оператор оказывается простейшим из нетривиальных операторов переклейки:

$$\widehat{W}_0 = \widehat{W}[2] = \sum_{a, b \geq 1} \left((a+b)p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right),$$

для которого функции Шура

$$s_1\{p\} = p_1, \quad s_2\{p\} = \frac{1}{2}(p_2 + p_1^2), \quad s_{11}\{p\} = \frac{1}{2}(-p_2 + p_1^2), \quad \dots$$

являются собственными функциями (общими для всех остальных операторов переклейки):

$$\widehat{W}[2]s_Q\{p\} = \kappa_Q s_Q\{p\}, \quad \lambda_Q = q^{\kappa_Q}.$$

Собственные значения оператора $\widehat{W}[2]$ имеют очень простой вид:

$$\kappa_Q = \sum_i q_i(q_i - 2i + 1) = \nu_Q - \nu_{Q^T}, \quad \nu_Q = \sum_i (i-1)q_i.$$

С теорией операторов переклейки можно ознакомиться в работах [54]. В общем случае собственные значения зависят от пары диаграмм Юнга и практически совпадают с общими характеристиками симметрической группы $S(\infty)$.

4.7. Начальные условия для эволюции по n . Эти “начальные условия” вполне тривиальны, например

$$H_1^{[m,n]} = q^{n\widehat{W}[2]/m} p_m|_{p=p^*}, \quad H_R^{[m,n]} = q^{n\widehat{W}[2]/m} s_R\{p_{mk}\}|_{p=p^*}$$

при условии, что n и m взаимно простые, и

$$H_{R_1 \dots R_m}^{[m,mk]} = q^{k\widehat{W}[2]} s_{R_1}\{p_{mk}\} \dots s_{R_m}\{p_{mk}\}|_{p=p^*}.$$

В последнем случае (полностью несвязного зацепления) начальные условия просто определяются тем, что при $n = 0$ зацепление $T[m, n]$ оказывается набором из m тривиальных узлов. В первом случае (связного узла) при $n = 1$ мы имеем один тривиальный узел, т. е. $H_R^{[m,1]} \sim s_R^*$:

$$H_R^{[m,n]}(A|q) = e^{n\widehat{W}/m} \sum_Q c_R^Q \chi_Q\{p\}|_{p=p^*} = \sum_Q c_R^Q q^{n\kappa_Q/m} \chi_Q^*.$$

4.8. Переформулировка в терминах алгебры Фробениуса. Алгебра Фробениуса – это набор следующих данных: линейное пространство, операция умножения и линейная форма. В этих терминах

$$H_R^{[m,n]}(A|q)|_{A=q^N} = \langle s_R[U^m] \rangle = \sum_Q c_R^Q \langle s_Q[U] \rangle, \quad \langle s_Q[U] \rangle \sim q^{n\kappa_Q/m} s_Q^*.$$

Реализация этой линейной формы в рамках теории матричных моделей выглядит так [55]:

$$\langle F[U] \rangle = \int du_i e^{u_i^2/\hbar} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{n}{m}} \frac{u_i - u_j}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{m}{n}} \frac{u_i - u_j}{2}\right) F\left[\exp\left(\sqrt{\frac{n}{m}} u_i\right)\right],$$

где $q = e^{\hbar}$.

4.9. Расщепленное W -представление торических суперполиномов [11]. Данное представление фактически задается непосредственной деформацией функций Шура в полиномы Макдональда,

$$\begin{aligned} H_R^{[m,n]}(A|q) &= \sum_Q c_R^Q q^{-n(\nu_Q - \nu_{Q'})/m} s_Q^* \longrightarrow P_R^{[m,n]}(A|q|t) = \\ &= \sum_Q c_R^Q q^{-n\nu_Q/m} t^{n\nu_{Q'}/m} M_{Q'}^*, \end{aligned} \quad (6)$$

и имеет вид расщепленного (“утонченного”) W -представления.

4.10. Как выбрать коэффициенты c_R^Q [11]? Эти коэффициенты зависят от числа $p = 0, 1, \dots, m-1$, которое равно остатку от деления n на m , нумерующего “серии” узлов $T[m, mk + p]$, и удовлетворяют “начальным условиям” при $k = 0$:

$T[m, p] = T[p, m]$ для $p < m$. Кроме того, они таковы, что $P_R^{[m, mk+p]}(A|q|t)$ является полиномом от всех трех своих переменных с целыми положительными коэффициентами, причем сразу при всех k .

Начальные условия могли бы зафиксировать коэффициенты полностью, если бы они были наложены при всех значениях временных переменных p_k . На самом деле в теории узлов начальные условия налагаются только на подпространстве $p_k = p_k^* = \{A^k\}/\{t^k\}$, и этого недостаточно для определения всех коэффициентов при $|Q| \geq 4$. Поэтому приходится использовать третье, плохо формализуемое требование:

$$p_m = \sum_{Q \vdash m} \bar{c}_{[1]}^Q M_Q\{p\}, \quad c_{[1]}^Q = \bar{c}_{[1]}^Q \cdot \gamma_{[1]}^Q.$$

Это не просто, но это работает. При этом

$$\begin{aligned} \gamma^{[2]} &= \frac{1+q^2}{1+q^2} = 1, & \gamma^{[11]} &= \frac{1+t^2}{1+q^2}, \\ \gamma^{[3]} &= \frac{1+q^2+q^2q^2}{1+q^2+q^2q^2} = 1, & \gamma^{[21]} &= \frac{1+q^2+q^2t^2}{1+q^2+q^2q^2}, & \gamma^{[111]} &= \frac{1+t^2+t^2t^2}{1+q^2+q^2q^2}. \end{aligned}$$

Общие формулы можно вывести и для других серий, но они выглядят более изящно после выявления дополнительных структур (см. вторую работу в ссылке [11]).

4.11. Подтверждения формулы (6) для торических суперполиномов.

Формула (6) воспроизводит все до сих пор найденные торические полиномы в фундаментальном представлении $R = [1^{|R|}]$. Она (по определению) совместна с цепочкой редукций полиномы HOMFLY $\longrightarrow$ полиномы Джонса (при $N = 2$) $\longrightarrow$ полиномы Александера (при $N = 0$). Кроме того, данная формула совместна с известными результатами для полиномов Хегарда–Флоера $HF_R(q|t)$ [7] и с формулами для суперполиномов, полученными путем суммирования по путям в двумерных решетках $((q, t)$ -числами Каталана) [9]. Отметим также, что (6) воспроизводит полином $P_{[2]}^{[2,3]}$, найденный в работе [10], но не воспроизводит суперполиномы для зацепления Хопфа $P_{[2],[1^s]}^{[2,2]}$ из статей [6] и [8] (вследствие другого выбора тривиального узла для суперполиномов).

4.12. Обобщения [11]. Приведем несколько направлений обобщения.

Старшие нефундаментальные представления $R \neq [1^{|R|}]$. Основная проблема здесь – выбор суперполиномов для тривиального узла: если взять в качестве ответа размерности Макдональда M_R^* , то уже простейший “кирпичик” $\{Aq\}/\{tq\}$ не является полиномом даже после подстановки $A = t^N$.

Инварианты зацеплений. Существуют ли вообще суперполиномы для торических зацеплений? Пока что имеются разные варианты того, чем можно было бы пожертвовать: лучше всего было бы ослабить условие полиномиальности, в качестве альтернативы предпринимаются попытки ослабить условие положительности [8]. Расщепленная W -эволюция для торических зацеплений нарушает оба этих условия и не воспроизводит ответы из статьи [6], тем не менее именно она кажется правильным рецептом. Даже если потребовать, чтобы эволюция начиналась с модифицированного выражения для тривиального узла и чтобы это выражение было полиномом, условие положительности будет нарушено.

Неторические узлы. Основы подхода к ним описаны в статьях [11] и [28], при этом снова могут рассматриваться серии узлов. Потенциально успешным примером применения такого подхода является подъем $5_2 \rightarrow 10_{139}$, описанный в работах [11]. В то же время обнаруженное в указанных работах нарушение положительности для эволюции узла 4_1 означает, что суперполиномы не будут обладать этим свойством и для композитных узлов [28] – положительность кажется сейчас характеристикой исключительно простых узлов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные примеры показывают, что β -деформация ведет нас в совершенно новый мир, где знакомые структуры изменяются нетривиально, но окончательные ответы обобщаются самым непосредственным образом: их можно легко написать и проверить, не имея ни малейшего представления о том, *почему* они верны. Такое сочетание делает проблему β -деформации исключительно интересной и важной для развития методов теории струн. Это развитие может оказаться чисто техническим с алгебраической (теоретико-групповой) точки зрения, но оно заведомо кажется концептуально содержательным с точки зрения геометрии, где β -деформация остается пока совершенно загадочной.

Благодарности. Я признателен за обсуждения и помощь моим коллегам, соавторам и друзьям: А. Александрову, В. Долотину, П. Дунину-Барковскому, Д. Галахову, Е. Горскому, С. Гукову, А. Забродину, Е. Зенкевичу, А. Маршакову, А. Миронову, Анд. Морозову, С. Натанзону, А. Пополитову, А. Слепцову, А. Смирнову, С. Харчеву, Ш. Шакирову и особо Максиму Забзину. Моя работа частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (контракт 14.740.11.081), РФФИ (грант № 10-02-00499 и совместные гранты № 11-02-90453-Ukr, 12-02-91000-ANF, 12-02-92108-Yaf_a, 11-01-92612-Royal Society).

Список литературы

- [1] D. Gaiotto, *$N = 2$ dualities*, arXiv:0904.2715; *Asymptotically free $N = 2$ theories and irregular conformal blocks*, arXiv:0908.0307; L. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv:0906.3219; N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002, 22 pp., arXiv:0907.2189; A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2009), 1–37, arXiv:0908.2569.
- [2] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163, arXiv:hep-th/0310113; A. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **142**:3 (2005), 419–488; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, P. Putrov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:27 (2009), 4939–4998, arXiv:0811.2825.
- [3] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv:hep-th/0407261; **12** (2005), 034, 44 pp., arXiv:math-ph/0504058; *Invariants of algebraic curves and topological expansion*, arXiv:math-ph/0702045; L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv:hep-th/0504116; *JHEP*, **12** (2006), 026, 29 pp., arXiv:math-ph/0604014; A. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192, arXiv:hep-th/0605171; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv:hep-th/0608228; B. Eynard, M. Mariño, N. Orantin, *JHEP*, **06** (2007), 058, 20 pp., arXiv:hep-th/0702110; N. Orantin, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, arXiv:0808.0635; R. Dijkgraaf, H. Fuji, *Fortschr. Phys.*, **57**:9 (2009), 825–856, arXiv:0903.2084; I. Kostov, N. Orantin, *JHEP*, **11** (2010), 56, arXiv:

- 1006.2028; Л. О. Чехов, Б. Эйнард, О. Маршал, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 163–215, arXiv: 1009.6007; R. Dijkgraaf, H. Fuji, M. Manabe, *Nucl. Phys. B*, **849**:1 (2011), 166–211, arXiv: 1010.4542; V. Bouchard, P. Sulkowski, *Topological recursion and mirror curves*, arXiv: 1105.2052.
- [4] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399; *Analytic continuation of Chern–Simons theory*, arXiv: 1001.2933; *Quantum Topol.*, **3**:1 (2012), 1–137, arXiv: 1101.3216; M. Khovanov, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426; S. Gukov, A. Schwarz, C. Vafa, *Lett. Math. Phys.*, **74**:1 (2005), 53–74, arXiv: hep-th/0412243; D. Gaiotto, E. Witten, *Knot invariants from four-dimensional gauge theory*, arXiv: 1106.4789.
- [5] M. Khovanov, L. Rozhansky, *Fund. Math.*, **199**:1 (2008), 1–91, arXiv: math.QA/0401268; *Geom. Topol.*, **12**:3 (2008), 1387–1425, arXiv: math.QA/0505056; N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, *Experiment. Math.*, **15**:2 (2006), 129–159; arXiv: math/0505662; S. Gukov, J. Walcher, *Matrix factorizations and Kauffman homology*, arXiv: hep-th/0512298; S. Gukov, *Surface operators and knot homologies*, arXiv: 0706.2369; T. Dimofte, S. Gukov, L. Hollands, *Vortex counting and Lagrangian 3-manifolds*, arXiv: 1006.0977; S. Gukov, P. Sulkowski, *JHEP*, **02** (2012), 070, 57 pp., arXiv: 1108.0002; N. Carqueville, D. Murfet, *Computing Khovanov–Rozansky homology and defect fusion*, arXiv: 1108.1081; I. Cherednik, *Jones polynomials of torus knots via DAHA*, arXiv: 1111.6195; Sh. Shakirov, *Beta deformation and superpolynomials of (n, m) torus knots*, arXiv: 1111.7035; S. Gukov, M. Stosic, *Homological algebra of knots and BPS states*, arXiv: 1112.0030; A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende, *The Hilbert scheme of a plane curve singularity and the HOMFLY homology of its link*, arXiv: 1201.2115.
- [6] S. Gukov, A. Iqbal, C. Kozcaz, C. Vafa, *Link homologies and the refined topological vertex*, arXiv: 0705.1368.
- [7] E. Gorsky, *J. Singul.*, **3** (2011), 48–82, arXiv: 0807.0491.
- [8] H. Awata, H. Kanno, *Changing the preferred direction of the refined topological vertex*, arXiv: 0903.5383; *J. Phys. A*, **44**:37 (2011), 375201, 21 pp., arXiv: 0910.0083.
- [9] E. Gorsky, “ q, t -Catalan numbers and knot homology”, *Zeta Functions in Algebra and Geometry*, Contemporary Mathematics, **566**, eds. A. Campillo et al., AMS, Providence, RI, 2012, 213–232, arXiv: 1003.0916.
- [10] M. Aganagic, Sh. Shakirov, *Knot homology from refined Chern–Simons theory*, arXiv: 1105.5117.
- [11] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, *Superpolynomials for toric knots from evolution induced by cut-and-join operators*, arXiv: 1106.4305; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Sleptsov, *JHEP*, **05** (2012), 070, 57 pp., arXiv: 1201.3339.
- [12] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **265**:1–2 (1991), 99–107; P. Di Francesco, M. Gaudin, C. Itzykson, F. Lesage, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:24 (1994), 4257–4351, arXiv: hep-th/9401163; H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, *Soryushiron Kenkyu*, **91** (1995), A69–A75, arXiv: hep-th/9503028; A. Zabrodin, *Random matrices and Laplacian growth*, arXiv: 0907.4929; P. Sulkowski, *JHEP*, **04** (2010), 063, 29 pp., arXiv: 0912.5476; Sh. Shakirov, *Phys. Lett. A*, **375**:6 (2011), 984–989, arXiv: 0912.5520; A. Morozov, Sh. Shakirov, *The matrix model version of AGT conjecture and CIV-DV prepotential*, arXiv: 1004.2917; L. Chekhov, *Logarithmic potential beta-ensembles and Feynman graphs*, arXiv: 1009.5940; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27** (2012), 1230001, 32 pp., arXiv: 1011.5629.
- [13] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [14] S. N. M. Ruijsenaars, *Commun. Math. Phys.*, **110**:2 (1987), 191–213; **115**:1 (1988), 127–165; S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Phys.*, **170**:2 (1986), 370–405.
- [15] A. Selberg, *Norsk. Mat. Tidskr.*, **24** (1944), 71–78; S. Iguri, T. Mansour, *J. Phys. A*, **43**:6 (2010), 065201, 11 pp., arXiv: 0912.3507; A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **843**:2 (2011), arXiv: 1003.5752.

- [16] N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7** (2004), 831–864, arXiv:hep-th/0206161; R. Flume, R. Poghossian, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:14 (2003), 2541–2563, arXiv:hep-th/0208176; S. Shadchin, *JHEP*, **10** (2004), 033, 39 pp., arXiv:hep-th/0408066; *SIGMA*, **2** (2006), 008, 11 pp., arXiv:hep-th/0601167; N. Nekrasov, A. Okounkov, *Seiberg–Witten theory and random partitions*, arXiv:hep-th/0306238; A. Marshakov, N. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104, 39 pp., arXiv:hep-th/0612019; B. Eynard, *J. Stat. Mech.*, **07** (2008), P07023, 34 pp., arXiv:0804.0381; A. Klemm, P. Sułkowski, *Nucl. Phys. B*, **819**:3 (2009), 400–430, arXiv:0810.4944; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **680**:2 (2009), 188–194, arXiv:0908.2190.
- [17] M. Aganagic, M. Mariño, C. Vafa, *Commun. Math. Phys.*, **247**:2 (2004), 467–512, arXiv:hep-th/0206164; M. Aganagic, A. Klemm, M. Mariño, C. Vafa, *Commun. Math. Phys.*, **254**:2 (2005), 425–478, arXiv:hep-th/0305132.
- [18] P. Sułkowski, *Phys. Rev. D*, **83** (2011), 085021, 12 pp., arXiv:1012.3228; *Adv. High Energy Phys.*, **2011** (2011), 357016, 52 pp., arXiv:1106.4873; B. Eynard, C. Kozcaz, *Mirror of the refined topological vertex from a matrix model*, arXiv:1107.5181.
- [19] A. B. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 3–27, arXiv:0907.3946; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 125–129, arXiv:0909.2052; *JHEP*, **11** (2009), 048, arXiv:0909.3338; А. Д. Миронов, С. А. Миронов, А. Ю. Морозов, А. А. Морозов, *ТМФ*, **165**:3 (2010), 503–542, arXiv:0908.2064; R. Poghossian, *JHEP*, **12** (2009), 038, 14 pp., arXiv:0909.3412; G. Bonelli, A. Tanzini, *Hitchin systems, $N = 2$ gauge theories and W -gravity*, arXiv:0909.4031; H. Awata, Y. Yamada, *JHEP*, **01** (2010), 125, 11 pp., arXiv:0910.4431; L. Hadasz, Z. Jaskolski, P. Suchanek, *Recursive representation of the torus 1-point conformal block*, arXiv:0911.2353; *Proving the AGT relation for $N_f = 0, 1, 2$ antifundamentals*, arXiv:1004.1841; V. Alba, A. A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **90**:11 (2009), 803–807, arXiv:0911.0363; V. Alba, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **840**:3 (2010), 441–468, arXiv:0912.2535; H. Itoyama, K. Maruyoshi, T. Oota, *Progr. Theor. Phys.*, **123**:6 (2010), 957–987, arXiv:0911.4244; T. Eguchi, K. Maruyoshi, *Penner type matrix model and Seiberg–Witten theory*, arXiv:0911.4797; *Seiberg–Witten theory, matrix model and AGT relation*, arXiv:1006.0828; R. Schiappa, N. Wyllard, *An A_r threesome: matrix models, 2d CFTs and 4d $N = 2$ gauge theories*, arXiv:0911.5337; V. Fateev, I. Litvinov, *JHEP*, **02** (2010), 014, 17 pp., arXiv:0912.0504; V. Alba, V. Fateev, A. Litvinov, G. Tarnopolsky, *Lett. Math. Phys.*, **98**:1 (2011), 33–64, arXiv:1012.1312; A. Belavin, V. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **850**:1 (2011), 199–213, arXiv:1102.0343; A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov, G. M. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, arXiv:1111.2803.
- [20] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380; А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦНМО, М., 2009; V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103; G. Moore, N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.*, **123**:2 (1989), 177–254; A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:13 (1990), 2495–2589.
- [21] A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611, arXiv:hep-th/9711108; *Testing Seiberg–Witten solution*, arXiv:hep-th/9801061; A. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 97–121, arXiv:hep-th/9712241; 77–95, arXiv:hep-th/9803265.
- [22] D. Gaiotto, G. W. Moore, A. Neitzke, *Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation*, arXiv:0907.3987; T. Dimofte, S. Gukov, Y. Soibelman, *Lett. Math. Phys.*, **95** (2011), 1–25, arXiv:0912.1346; M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson–Thomas invariants and cluster transformations*, arXiv:0811.2435; V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **103** (2006), 1–211, arXiv:math/0311149; K. Hosomichi, S. Lee, J. Park, *JHEP*, **12** (2010), 079, arXiv:1009.0340; N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, *JHEP*, **03** (2011), 127, 14 pp., arXiv:1012.3512;

- SUSY Gauge theories on squashed three-spheres*, arXiv: [1102.4716](#); Yu. Terashima, M. Yamazaki, *JHEP*, **08** (2011), 135, arXiv: [1103.5748](#); T. Dimofte, D. Gaiotto, S. Gukov, *Gauge theories labelled by three-manifolds*, arXiv: [1108.4389](#); *3-Manifolds and 3d indices*, arXiv: [1112.5179](#).
- [23] K. Hikami, *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**:19 (2001), 3309–3333, arXiv: [math-ph/0105039](#); *Internat. J. Modern Phys. B*, **16**:14–15 (2002), 1963–1970; *J. Geom. Phys.*, **57**:9 (2007), 1895–1940, arXiv: [math/0604094](#); T. Dimofte, S. Gukov, J. Lenells, D. Zagier, *Commun. Number Theory Phys.*, **3**:2 (2009), 363–443, arXiv: [0903.2472](#).
- [24] J. Teschner, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19** (2004), 436–458, arXiv: [hep-th/0303150](#); “From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces”, *Prospects in Mathematical Physics*, Papers from the Young Researchers Symposium of the 14th International Congress on Mathematical Physics (Lisbon, Portugal, 28 July–2 August, 2003), *Contemporary Mathematics*, **437**, eds. J. C. Mourão, J. P. Nunes, R. Picken, J.-C. Zambrini, AMS, Providence, RI, 2007, 231–246, arXiv: [hep-th/0308031](#).
- [25] Д. В. Галахов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Смирнов, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 73–99; P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov, A. Smirnov, *Kontsevich integral for knots and Vassiliev invariants*, arXiv: [1112.5406](#); *J. Phys. A*, **45**:38 (2012), 385204, arXiv: [1201.0025](#).
- [26] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, “Chern–Simons field theory and quantum groups”, *Quantum Groups* (Clausthal, Germany, 1989), *Lecture Notes in Physics*, **370**, eds. H.-D. Doebner, J. D. Hennig, Springer, Berlin, 1990, 307–317; *Phys. Lett. B*, **235**:3–4 (1990), 275–281; N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Commun. Math. Phys.*, **127**:1–2 (1990), 1–26; R. K. Kaul, P. Ramadevi, *Commun. Math. Phys.*, **217**:2 (2001), 295–314, arXiv: [hep-th/0005096](#); Zodinmawia, P. Ramadevi, *SU(N) quantum Racah coefficients and non-torus links*, arXiv: [1107.3918](#).
- [27] A. Morozov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **835**:3 (2010), 284–313, arXiv: [1001.2003](#); A. Smirnov, “Notes on Chern–Simons theory in the temporal gauge”, *The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier*, Proceedings of the International School of Subnuclear Physics (Erice, Sicily, Italy, 29 August–7 September, 2009), The Subnuclear Series, **47**, ed. A. Zichichi, World Scientific, Singapore, 2011, 489–498, arXiv: [0910.5011](#).
- [28] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, *Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations*, arXiv: [1112.5754](#); *JHEP*, **03** (2012), 034, arXiv: [1112.2654](#).
- [29] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **02** (2011), 067, 41 pp., arXiv: [1012.3137](#); A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **855**:1 (2012), 128–151, arXiv: [1105.0948](#).
- [30] А. Ю. Морозов, *УФН*, **162**:8 (1992), 83–175; *УФН*, **164**:1 (1994), 3–62, arXiv: [hep-th/9303139](#); *Matrix models as integrable systems*, arXiv: [hep-th/9502091](#); *Challenges of matrix models*, arXiv: [hep-th/0502010](#); A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:25 (1994), 4355–4405, arXiv: [hep-th/9312212](#); *Phys. Part. Nucl.*, **33** (2002), 537–582, arXiv: [hep-th/9409190](#); А. Д. Миронов, *ТМФ*, **114**:2 (1998), 163–232, arXiv: [q-alg/9711006](#).
- [31] I. Gel’fand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, MA, 1994; A. Morozov, V. Dolotin, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, Singapore, 2007, arXiv: [hep-th/0609022](#); *Universal Mandelbrot Set. Beginning of the Story*, World Scientific, Singapore, 2006; *Algebraic geometry of discrete dynamics. The case of one variable*, arXiv: [hep-th/0501235](#); *Internat. J. Modern Phys. A*, **23**:22 (2008), 3613–3684, arXiv: [hep-th/0701234](#); E. T. Akhmedov, V. V. Dolotin, A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **81**:12 (2005), 776–779, arXiv: [hep-th/0504160](#); А. Ю. Морозов, М. Н. Сербин, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 316–343, arXiv: [hep-th/0703258](#); В. В. Долотин, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **156**:1 (2008), 3–37, arXiv: [0704.2609](#); *Phys. Lett. B*, **651**:1 (2007), 71–73, arXiv: [0704.2884](#); А. А. Морозов, *Письма в ЖЭТФ*, **86**:11 (2007), 856–859, arXiv: [0710.2315](#); A. Morozov, Sh. Shakirov, *Analogue of the identity Log Det = Trace Log for resultants*, arXiv: [0710.2315](#).

- 0804.4632; *Resultants and contour integrals*, arXiv:0807.4539; A. С. Анохина, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 403–433, arXiv:0812.5013.
- [32] V. V. Dolotin, *On discriminants of polylinear forms*, arXiv:alg-geom/9511010; A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 002, 39 pp., arXiv:0903.2595; *New and old results in resultant theory*, arXiv:0911.5278; K. Fujii, *SIGMA*, **7** (2011), 022, 12 pp., arXiv:0912.2135; K. Fujii, H. Oike, *Beyond the Gaussian II: A mathematical experiment*, arXiv:1103.4428; U. Svensson, *A note on a certain non-Gaussian integral*, arXiv:0912.3172; A. Stoyanovsky, *On integral of exponent of a homogeneous polynomial*, arXiv:1103.0514; J. Lasserre, *Level sets and non Gaussian integrals of positively homogeneous functions*, arXiv:1110.6632.
- [33] A. A. Migdal, *Phys. Rep.*, **102**:4 (1983), 199–290; J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, Yu. M. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **251**:4 (1990), 517–524; Y. Makeenko, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **356**:3 (1991), 574–628.
- [34] M. Fukuma, H. Kawai, R. Nakayama, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:8 (1991), 1385–1406; R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **348**:3 (1991), 435–455.
- [35] A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **252**:1 (1990), 47–52; F. David, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:13 (1990), 1019–1029; J. Ambjørn, Yu. M. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:22 (1990), 1753–1763; H. Itoyama, Y. Matsuo, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 202–208.
- [36] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Пополитов, Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **171**:1 (2012), 96–115, arXiv:1103.5470.
- [37] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [38] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 3–20, arXiv:hep-th/0206255; *A perturbative window into non-perturbative physics*, arXiv:hep-th/0208048; L. Chekhov, A. Mironov, *Phys. Lett. B*, **552**:3–4 (2003), 293–302, arXiv:hep-th/0209085; A. Klemm, M. Mariño, S. Theisen, *JHEP*, **03** (2003), 051, 23 pp., arXiv:hep-th/0211216; V. Kazakov, A. Marshakov, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3107–3136, arXiv:hep-th/0211236; H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **657**:1–3 (2003), 53–78, arXiv:hep-th/0211245; *Phys. Lett. B*, **555**:3–4 (2003), 287–295, arXiv:hep-th/0211259; *Prog. Theor. Phys.*, **109**:3 (2003), 433–463, arXiv:hep-th/0212032; *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:32 (2003), 5889–5906, arXiv:hep-th/0301136; L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562**:3–4 (2003), 323–338, arXiv:hep-th/0301071; Л. О. Чехов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. Васильев, *Тр. МИАН*, **251** (2005), 265–306, arXiv:hep-th/0506075; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2481–2517, arXiv:hep-th/0412099; *Fortschr. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521, arXiv:hep-th/0412205; А. Д. Миронов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 77–89, arXiv:hep-th/0506158.
- [39] E. T. Akhmedov, Sh. Shakirov, *Gluing of surfaces with polygonal boundaries*, arXiv:0712.2448; A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 003, 33 pp., arXiv:0906.0036; *From Brezin–Hikami to Harer–Zagier formulas for Gaussian correlators*, arXiv:1007.4100.
- [40] J. Harer, D. Zagier, *Invent. Math.*, **85**:3 (1986), 457–485; S. Lando, A. Zvonkin, *Embedded graphs*, Preprint No. 63, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2001.
- [41] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **04** (2009), 064, 33 pp., arXiv:0902.2627; *Modern Phys. Lett. A*, **24**:33 (2009), 2659–2666, arXiv:0906.2573; G. Borot, B. Eynard, M. Mulase, B. Safnuk, *J. Geom. Phys.*, **61**:2 (2011), 522–540, arXiv:0906.1206.
- [42] A. Alexandrov, *Nucl. Phys. B*, **851**:3 (2011), 620–650, arXiv:1005.5715; *Modern Phys. Lett. A*, **26**:29 (2011), 2193–2199, arXiv:1009.4887.
- [43] V. Bouchard, M. Mariño, “Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry”, *From Hodge Theory to Integrability and TQFT: tt*-geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **78**, eds. R. Y. Donagi, K. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 263–283, arXiv:0709.1458; A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **02** (2009), 024, 52 pp., arXiv:0807.2843; M. Kazarian, *KP hierarchy for Hodge integrals*, arXiv:0809.3263.
- [44] M. Rosso, V. F. R. Jones, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**:1 (1993), 97–112; J. M. F. Labastida, M. Marino, *J. Knot Theory Ramifications*, **11**:2 (2002), 173–197; X.-S. Lin, H. Zheng,

- Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:1 (2010), 1–18, arXiv: math/0601267; S. Stevan, *Ann. Henri Poincaré*, **11**:7 (2010), 1201–1224, arXiv: 1003.2861.
- [45] V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348; **251** (1985), 691–734; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, S. Pakuliak, *Nucl. Phys. B*, **404**:3 (1993), 717–750, arXiv: hep-th/9208044; R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and $N = 2$ gauge systems*, arXiv: 0909.2453; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **02** (2010), 030, 26 pp., arXiv: 0911.5721; *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:16 (2010), 3173–3207, arXiv: 1001.0563; *J. Phys. A*, **44**:8 (2011), 085401, 11 pp., arXiv: 1010.1734; K. Maruyoshi, F. Yagi, *JHEP*, **01** (2011), 042, 18 pp., arXiv: 1009.5553.
- [46] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–477; R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334.
- [47] N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **177** (2009), 105–119, arXiv: 0901.4748.
- [48] A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **04** (2010), 040, 15 pp., arXiv: 0910.5670; *J. Phys. A*, **43**:19 (2010), 195401, 11 pp., arXiv: 0911.2396; A. Popolitov, *On relation between Nekrasov functions and BS periods in pure $SU(N)$ case*, arXiv: 1001.1407; W. He, Y.-G. Miao, *Phys. Rev. D*, **82**:2 (2010), 025020, arXiv: 1006.1214; K. Maruyoshi, M. Taki, *Deformed pre-potential, quantum integrable system and Liouville field theory*, arXiv: 1006.4505; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *J. Geom. Phys.*, **61**:7 (2011), 1203–1222, arXiv: 1011.4491; F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, D. Ricci Pacifici, *JHEP*, **05** (2011), 098, 27 pp., arXiv: 1103.4495; Y. Zenkevich, *Phys. Lett. B*, **701**:5 (2011), 630–639, arXiv: 1103.4843; N. Dorey, T. J. Hollowood, S. Lee, *Quantization of integrable systems and a 2d/4d duality*, arXiv: 1103.5726.
- [49] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv: hep-th/9407087; **431**:3 (1994), 484–550.
- [50] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **03** (2011), 102, 25 pp., arXiv: 1011.3481.
- [51] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 21–39, arXiv: hep-th/0207106.
- [52] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **12** (2009), 053, 49 pp., arXiv: 0906.3305.
- [53] H. Itoyama, T. Oota, *Method of generating q -expansion coefficients for conformal block and $N = 2$ Nekrasov function by beta-deformed matrix model*, arXiv: 1003.2929.
- [54] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, С. М. Натанзон, *ТМФ*, **166**:1 (2011), 3–27, arXiv: 0904.4227; A. D. Mironov, A. Yu. Morozov, S. M. Natanzon, *J. Geom. Phys.*, **62**:2 (2012), 148–155, arXiv: 1012.0433.
- [55] R. Lawrence, L. Rozhansky, *Commun. Math. Phys.*, **205**:2 (1999), 287–314; M. Mariño, *Commun. Math. Phys.*, **253**:1 (2004), 25–49, arXiv: hep-th/0207096; C. Beasley, E. Witten, *J. Diff. Geom.*, **70**:2 (2005), 183–323, arXiv: hep-th/0503126; Y. Dolivet, M. Tierz, *J. Math. Phys.*, **48**:2 (2007), 023507, 20 pp., arXiv: hep-th/0609167; A. Brini, B. Eynard, M. Mariño, *Torus knots and mirror symmetry*, arXiv: 1105.2012.

Поступила в редакцию 22.02.2012