Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, Н. В. Булатов, Р. В. Горбачев, Космология Фридмана с неположительно определенными потенциалами Хиггса, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 160–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6969>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 03:40:55

© 2012 г. И. Я. Арефьева*, Н. В. Булатов†, Р. В. Горбачев*

КОСМОЛОГИЯ ФРИДМАНА С НЕПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ ХИГГСА

Рассмотрены классические аспекты динамики скалярных моделей с неположительно определенными потенциалами в космологии Фридмана. Такие модели появляются как эффективные локальные модели в рамках нелокальных моделей, связанных с полевой теорией струн. В эффективном локальном приближении после соответствующего переопределения поля в этих моделях возникает потенциал Хиггса с отрицательной эффективной космологической постоянной. Отличительной особенностью рассматриваемых моделей является отсутствие фазы постинфляционного разогрева, вместо которого возникает фаза смены режимов от расширения к сжатию. Изучено поведение модели в окрестности точки смены режима.

Ключевые слова: космология, потенциал Хиггса, тахион, полевая теория струн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скалярные поля играют важную роль в современных моделях ранней Вселенной, большинство существующих моделей инфляции требует введения дополнительного скалярного поля – инфлатона [1]–[5]. Хотя масса инфлатона не фиксирована, обычно рассматривают тяжелые скалярные поля с массой 10^{13} ГэВ [6]. Потенциал инфлатона (самодействующего и взаимодействующего с полями материи) также не фиксирован, более того, в типичных примерах расширение Вселенной происходит за счет плотности потенциальной энергии самодействия инфлатона, которая действует как эффективная космологическая постоянная. Детальная эволюция все же зависит от формы потенциала. В последние годы инфляция Хиггса стала привлекать большое внимание [7]–[12]. Кинетический член обычно имеет стандартную форму, однако также рассматривались модели с нестандартными кинетическими членами [13]–[15] как в случае минимального, так и в случае неминимального взаимодействия с гравитацией.

В настоящей работе рассматриваются модели, в основном связанные с нелокальным кинетическим членом определенной формы [15]–[28]. Замечательное свойство

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru, rgorbachev@mi.ras.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: nick_bulatov@mail.ru

этих моделей заключается в том, что они происходят из полевой теории струн [29]. Исходная мотивация рассмотрения нелокальных космологических моделей такого типа была связана с изучением темной энергии [15]. В то же время на возможность рассмотрения подобных моделей в контексте изучения эпохи ранней Вселенной было указано в работах [23], [24]. В обоих случаях скалярное поле является тахионом фермионной струны Невё–Шварца–Рамона, а взаимодействие определяется нелокальным потенциалом Хиггса. Нелокальность скалярной материи ведет к существенным изменениям свойств по сравнению с чисто локальными космологическими моделями. Вследствие эффективной перерастяжки кинетической части лагранжиана материи [23], [24] изменяется соотношение между константой связи, массовым членом и величиной космологической постоянной. Таким образом, возникает потенциал Хиггса с отрицательной эффективной космологической постоянной, который не является положительно определенным.

В настоящей работе рассмотрены классические аспекты динамики моделей со скалярным полем с неположительно определенным потенциалом Хиггса. Поскольку нелокальная теория может приводить к эффективной локальной теории с достаточно малой константой связи, некоторые стадии эволюции могут быть описаны с помощью приближения свободного тахиона. Вследствие этого мы уделяем основное внимание рассмотрению динамики свободного тахиона в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ). Мы показываем, что имеются четыре стадии эволюции тахиона в метрике ФРУ: достижение неустойчивого вакуума из состояния космологической сингулярности, скатывание с неустойчивого вакуума, переход от расширения к сжатию, сжатие вплоть до достижения космологической сингулярности. Используя метод работы [30], мы находим вид решений уравнений Фридмана в окрестности космологических сингулярностей и детально изучаем эволюцию в области смены режимов.

Отметим, что появление перехода от расширения к сжатию для неположительно определенных потенциалов отмечалось ранее в работе [31]. Специфика динамики в окрестности вершины потенциала в космологии Фридмана изучалась также в статьях [32], [33].

План настоящей статьи следующий. Раздел 2 посвящен описанию фазового портрета свободного тахиона в метрике ФРУ. Здесь также отмечено наличие космологической сингулярности. Затем мы показываем, что, стартуя с вершины потенциала, тахион сначала эволюционирует, как инфлатон, т. е. сохраняет инфляционный режим, затем, набирая конечное число e -фолдингов $N_{\max}$, тахион достигает границы запрещенной области в некоторой точке $(\phi_{\max}, \dot{\phi}_{\max})$ фазового портрета. В этой точке параметр Хаббла становится равным нулю, и тахион продолжает эволюционировать с отрицательными H , т. е. становится контрактоном. В разделе 3 мы изучаем эволюцию вблизи космологической сингулярности. Для этого применяется параметризация, схожая с использованной в работе [30]. В разделе 4 для изучения динамики системы вблизи границы разрешенной области мы используем другую специальную параметризацию, которая является обобщением параметризации, применявшейся для описания динамики инфлатона с положительно определенными потенциалами в метрике ФРУ [34]. Используя эту параметризацию, мы находим асимптотику поведения вблизи границы разрешенной области. В разделе 5 мы суммируем полученные результаты и обсуждаем их возможные обобщения.

Рис. 1. Фазовые портреты уравнения (2.1); доступная область разделена на четыре части, отделенные друг от друга двумя сепаратрисами S_1 и S_2 (штриховые линии); сплошные линии с номерами 1, 2, ..., 5 представляют траектории, выходящие из различных точек фазовой диаграммы (а). Фазовый портрет уравнения (2.2); продолжения траекторий в левой части, имеющие место в случае уравнения Фридмана с отрицательными значениями H , обозначены теми же числами со штрихами (б).

2. СВОБОДНЫЙ ТАХИОН В ПРОСТРАНСТВЕ ФРУ

2.1. Точный фазовый портрет для свободного тахиона. Динамика свободного тахиона в метрике ФРУ, соответствующая расширению ($H > 0$), описывается следующим уравнением:

$$\ddot{\phi} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \Lambda\right)}\dot{\phi} = \mu^2\phi. \quad (2.1)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, μ^2 – массовый параметр тахиона, Λ – космологическая постоянная.

Фазовый портрет для уравнения (2.1) представлен на рис. 1а. Видно, что в фазовом пространстве присутствуют две запрещенные области, расстояние между которыми определяется величиной космологической постоянной. Граница разрешенной области дается соотношением $\dot{\phi} = \pm\sqrt{\mu^2\phi^2 - 2\Lambda}$. Разрешенная область состоит из четырех частей, которые отделены друг от друга двумя сепаратрисами S_1 и S_2 . Верхняя и нижняя части сепаратрисы S_1 являются аттракторами (“правым” и “левым” соответственно). Сепаратриса S_2 состоит из двух “отталкивающих” частей. На рис. 1а видны несколько стадий тахионной эволюции. Рассмотрим траектории, начинающиеся в области I. Сначала тахион достигает области “правого” аттрактора. В частности, стартуя с нулевого начального значения $\phi(0) = 0$, тахион попадает

Рис. 2. Тот же фазовый портрет, что и на рис. 1а, штриховые линии соответствуют постоянным значениям H , в частности $H^2 = 8\pi\Lambda/3m_{\text{Pl}}^2$, где $m_{\text{Pl}}^2 = 1/G$ (жирная штриховая линия); жирная сплошная линия отвечает значению $H = 0$ и определяет границу запрещенной области (а). График функционала $(8\pi/3m_{\text{Pl}}^2)(\dot{\phi}^2/2 - \mu^2\phi^2/2 + \Lambda)$, который определяет значение H^2 (б). Пересечение с плоскостью нулевых значений функционала соответствует границе разрешенной области.

в окрестность границы разрешенной области, где $H = 0$, во время этого процесса величина H уменьшается.

На рис. 2а уровни постоянного положительного H обозначены с помощью штриховых линий. На рис. 2б представлен трехмерный график зависимости H от положения точки на фазовой диаграмме $(\phi, \dot{\phi})$. В конце этой стадии эволюции тахион достигает линии, соответствующей $H = 0$. Затем он продолжает движение в области отрицательных значений H (см. рис. 1б, области V и VI). Таким образом, начиная движение в области I, тахион продолжает эволюционировать в области V. Уравнение движения тахиона в областях V и VI имеет следующий вид:

$$\ddot{\phi} - 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \Lambda\right)}\dot{\phi} = \mu^2\phi. \quad (2.2)$$

Из фазового портрета (см. рис. 1) видно, что при конечных значениях ϕ и $\dot{\phi}$ отсутствуют критические точки. Для поиска критических точек в бесконечном фазовом пространстве, а также для обоснования приближений в различных областях фазового пространства (в частности, вблизи запрещенных областей) удобно, следуя работе [30], переписать уравнение скалярного поля в пространстве-времени ФРУ как систему уравнений для трехмерной динамической системы. Существуют два способа сделать это. Один из них описан в работе [30], в нем используются переменные, определенные ниже в формулах (3.2), а второй приведен в работе [35] для

Рис. 3. Зависимости параметров медленного скатывания ε от ϕ (а) и η от ϕ (б) в случае, когда условия медленного скатывания выполнены. Фазовые портреты для рассматриваемой модели, когда условия медленного скатывания выполнены на некотором интервале значений ϕ вблизи нуля (в) и увеличенная часть фазовых портретов вблизи точки $(0,0)$, где выполнены условия медленного скатывания (г). Сплошные линии соответствуют различным точным траекториям, штрихпунктирная линия – траектории медленного скатывания.

положительно определенных потенциалов и описывается формулами (4.1) настоящей статьи. Первый способ удобен для изучения космологической сингулярности (см. раздел 3), а второй – для изучения перехода от расширения к сжатию (см. раздел 4).

2.2. Свободный тахион в режиме медленного скатывания. В режиме медленного скатывания обычно пренебрегают второй производной поля по времени в уравнении движения и кинетическим слагаемым в уравнении для H . В этом

случае уравнение движения для тахиона принимает вид

$$3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\Lambda - \frac{\mu^2}{2}\phi^2\right)}\dot{\phi} = \mu^2\phi.$$

Это уравнение, как легко видеть, имеет смысл только при $|\phi| < \sqrt{2\Lambda}/\mu$. В соответствии с общим подходом мы можем использовать приближение медленного скатывания, когда параметры медленного скатывания ε и η малы:

$$\varepsilon = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{16\pi}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1, \quad |\eta| = \left|\frac{m_{\text{Pl}}^2}{8\pi}\left(\frac{V''}{V}\right)\right| \ll 1.$$

Типичное поведение этих параметров для рассматриваемой модели представлено на рис. 3а и 3б в случае, когда условия медленного скатывания выполнены. Видно, что на некотором интервале значений ϕ вблизи нуля параметры медленного скатывания достаточно малы. Таким образом, можно ожидать, что решение уравнения, полученного в приближении медленного скатывания, будет хорошо описывать точные фазовые траектории на этом интервале.

Из фазовых портретов, приведенных на рис. 3в и 3г, видно, что действительно в этом случае на некотором интервале значений ϕ вблизи нуля точные фазовые траектории достаточно близки к траектории медленного скатывания. Когда параметры медленного скатывания становятся достаточно большими, появляются различия между точными траекториями и траекторией медленного скатывания.

Если условия медленного скатывания не выполнены, то параметры медленного скатывания эволюционируют, как показано на рис. 4а и 4б. Фазовые портреты для этого случая представлены на рис. 4в и 4г. Легко видеть, что точные траектории пересекают траекторию медленного скатывания, но не продолжают двигаться вдоль нее. Это означает, что приближение медленного скатывания действительно нельзя использовать для описания точных траекторий в этом случае. Заметим, что в области, где $\dot{\phi}$ достаточно мало, минимумы точных фазовых траекторий расположены на траектории медленного скатывания. Это связано с тем, что минимум точной фазовой траектории соответствует точке, в которой $\ddot{\phi} = 0$, и если мы также пренебрегаем $\dot{\phi}$ в выражении для H , то из точного уравнения движения мы получаем точку на фазовой плоскости, лежащую на траектории медленного скатывания.

3. ДИНАМИКА ТАХИОНА ВБЛИЗИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

Чтобы изучить динамику тахиона вблизи космологической сингулярности, рассмотрим для простоты случай нулевой космологической постоянной:

$$\ddot{\phi} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2\right)}\dot{\phi} = \mu^2\phi. \quad (3.1)$$

Этот подход уместен, когда значения ϕ и $\dot{\phi}$ достаточно велики.

Введем безразмерные переменные

$$X = \frac{\sqrt{12\pi}}{3m_{\text{Pl}}}\phi, \quad Y = \frac{\sqrt{12\pi}}{3\mu m_{\text{Pl}}}\dot{\phi}, \quad Z = \frac{H}{\mu}, \quad \tau = \mu t. \quad (3.2)$$

Рис. 4. Случай, когда условия медленного скатывания не выполнены. Зависимости параметров медленного скатывания ε от ϕ (а) и η от ϕ (б). Фазовые портреты для рассматриваемой модели (в) и увеличенная часть фазовых портретов вблизи точки $(0, 0)$ (г). Сплошные линии соответствуют различным точным траекториям, штрихпунктирная линия – траектории медленного скатывания.

Тогда (3.1) можно переписать как систему уравнений

$$X_\tau = Y, \quad Y_\tau = X - 3ZY, \quad Z_\tau = -X^2 - 2Y^2 - Z^2.$$

Для изучения динамики вблизи космологической сингулярности удобно использовать компактифицированную версию фазового пространства. Для этого введем координаты на единичном шаре:

$$X = \frac{\rho}{1-\rho} \sin \theta \cos \psi, \quad Y = \frac{\rho}{1-\rho} \sin \theta \sin \psi, \quad Z = \frac{\rho}{1-\rho} \cos \theta.$$

Рис. 5. Трехмерное изображение динамики тахиона, которая описывается системой уравнений (3.3). Все траектории, начинающиеся на конусе, продолжают двигаться по конусу от расширения к сжатию.

В этих новых координатах уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}\rho_\sigma &= -(1-\rho)\rho[\rho \cos \theta(1+4\sin^2 \psi \sin^2 \theta) - (1-\rho)\sin^2 \theta \sin 2\psi], \\ \psi_\sigma &= -(1-\rho)(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) - \frac{3}{2}\rho \sin 2\psi \cos \theta, \\ \theta_\sigma &= \sin \theta[(1-\rho)\cos \theta \sin 2\psi - 4\rho \cos^2 \theta \sin^2 \psi - \rho \cos^2 \psi + 2\rho],\end{aligned}\tag{3.3}$$

где

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Данная система имеет четыре критические точки при $\rho = 1$, которые лежат на конусе $Y^2 = X^2 + Z^2$, его уравнение в сферических координатах записывается как $\tan^2 \theta = -1/\cos 2\psi$ (см. рис. 5). Координаты этих критических точек таковы:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{\pi}{4}, & \psi_0 &= \frac{\pi}{2}, & \theta_0 &= \frac{\pi}{4}, & \psi_0 &= -\frac{\pi}{2}, \\ \theta_0 &= \frac{3\pi}{4}, & \psi_0 &= \frac{\pi}{2}, & \theta_0 &= \frac{3\pi}{4}, & \psi_0 &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Рассмотрим поведение системы вблизи первой критической точки с координатами $\rho = 1$, $\theta_0 = \pi/4$, $\psi_0 = \pi/2$. Вблизи этой точки в линейном приближении мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}\Delta\rho(\sigma) &= \frac{3}{2}\Delta\rho(\sigma)\sqrt{2}, \\ \frac{d}{d\sigma}\Delta\psi(\sigma) &= -\Delta\rho(\sigma) + \frac{3}{2}\sqrt{2}\Delta\psi(\sigma), \\ \frac{d}{d\sigma}\Delta\theta(\sigma) &= 2\sqrt{2}\Delta\theta(\sigma).\end{aligned}$$

Решения этой линейной системы имеют следующий вид:

$$\Delta\rho(\sigma) = C_2 e^{3\sqrt{2}\sigma/2}, \quad \Delta\psi(\sigma) = (C_1 - C_2\sigma)e^{3\sqrt{2}\sigma/2}, \quad \Delta\theta(\sigma) = C_3 e^{2\sqrt{2}\sigma}.$$

4. ОТ РАСШИРЕНИЯ К СЖАТИЮ

4.1. Динамика тахиона в терминах е-фолдингов как трехмерная динамическая система. Для изучения перехода от стадии расширения к стадии сжатия удобно ввести аналог координат, предложенных в работах [35], [36],

$$x = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \frac{\dot{\phi}}{H}, \quad y = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \frac{\mu\phi}{H}, \quad z = \frac{\mu}{H}, \quad (4.1)$$

и переписать уравнение (2.1) как систему уравнений с дифференцированием по числу е-фолдингов $N = \ln(a/a_{\text{initial}})$ (далее мы опускаем a_{initial}):

$$x' = 3x(y^2 - b^2 z^2) + zy, \quad y' = 3x^2 y + zx, \quad z' = 3x^2 z, \quad b^2 = \Lambda \frac{8\pi G}{3\mu^2}, \quad (4.2)$$

где $X' = dX/dN$. Заметим, что вследствие соотношений $dN/dt = \dot{a}/a = H$ мы имеем $X' = \dot{X}/H$. Можно проверить, что

$$I(x, y, z) \equiv x^2 - y^2 + b^2 z^2 \quad (4.3)$$

является интегралом движения. Следовательно, если мы рассмотрим начальные условия $x(0), y(0), z(0)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(0) - y^2(0) + b^2 z^2(0) = 1, \quad (4.4)$$

то такое же уравнение будет справедливо при любом t .

На рис. 6 представлен фазовый портрет системы уравнений (4.2). Он имеет несколько интересных особенностей. Во-первых, видно, что справедливо ограничение (4.4) (см. рис. 6а). Также видно (см. рис. 6б), что для каждой траектории существует фиксированное максимальное число е-фолдингов N_{max} , которое получается в результате эволюции тахиона с заданными начальными условиями. Каждая траектория достигает этого числа при $z \rightarrow \infty$.

4.2. Динамика тахиона в терминах е-фолдингов как двумерная динамическая система.

4.2.1. Уравнения. Следует сначала решить уравнение, задающее связь (4.3), а затем изучить динамику редуцированной двумерной системы. Введем следующую параметризацию:

$$x = \sin \psi \operatorname{ch} \vartheta, \quad y = \operatorname{sh} \vartheta, \quad z = \frac{1}{b} \cos \psi \operatorname{ch} \vartheta,$$

где $-\pi < \psi < \pi$, $-\infty < \vartheta < \infty$. Заметим, что решения, описывающие расширение ($H > 0$), соответствуют случаю, когда $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Соотношения между ψ , ϑ и исходными ϕ , $\dot{\phi}$, H даются следующими формулами:

$$\phi' = \frac{\sqrt{2}}{l} \sin \psi \operatorname{ch} \vartheta, \quad \dot{\phi} = \sqrt{2\Lambda} \operatorname{tg} \psi, \quad \phi = \frac{\sqrt{2}b}{l} \frac{\operatorname{th} \vartheta}{\cos \psi}, \quad H = \frac{\mu b}{\cos \psi \operatorname{ch} \vartheta}, \quad (4.5)$$

Рис. 6. Динамика системы (4.2) в плоскости (z, N) (а) и в плоскости (y, N) (б).

Рис. 7. Фазовые портреты системы уравнений (4.6) при $-\pi < \psi < \pi$ и $-2 < \vartheta < 2$ (а); для малых $\psi > 0$ и малых ϑ , здесь виден аттрактор, к которому траектории приближаются с обеих сторон (б); при $0 < \psi < \pi/2$ и больших ϑ (в). При достаточно больших ϑ значение ψ является примерно постоянным вдоль траекторий.

где $l = b\sqrt{\mu}/\Lambda$. Уравнения (4.2) в новых переменных принимают вид

$$\begin{aligned}\vartheta' &= \frac{3}{2} \sin^2 \psi \operatorname{sh} 2\vartheta + \frac{1}{2b} \sin 2\psi \operatorname{ch} \vartheta, \\ \psi' &= \frac{1}{b} \cos^2 \psi \operatorname{sh} \vartheta - \frac{3}{2} \sin 2\psi.\end{aligned}\quad (4.6)$$

4.2.2. *Фазовые портреты системы уравнений (4.6).* Фазовый портрет системы уравнений (4.6) представлен на рис. 7. Видно (см. рис. 7а и 7в), что значение ψ примерно постоянно при больших ϑ . Таким образом, при $\vartheta(N) > \vartheta_0 = \vartheta(N_0)$ мы имеем $\psi(N) \approx \psi(N_0)$.

4.2.3. *Критические точки.* Фазовый портрет на рис. 7а показывает, что система обладает критическими точками, координаты которых являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \sin^2 \psi_0 \operatorname{sh} 2\vartheta_0 + \frac{1}{2b} \sin 2\psi_0 \operatorname{ch} \vartheta_0 &= 0, \\ \frac{1}{b} \cos^2 \psi_0 \operatorname{sh} \vartheta_0 - \frac{3}{2} \sin 2\psi_0 &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет только действительные решения вида

$$\psi_0 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \vartheta_0 = 0, \quad \psi_0 = \pi, \quad \vartheta_0 = 0.$$

4.2.4. *Поведение вблизи критических точек.* Проанализируем поведение системы вблизи критических точек $\psi_0 = \pm \pi/2$, $\vartheta_0 = 0$. Рассмотрим для примера $\psi \approx \pi/2 - \Delta\psi$, $\vartheta \approx \Delta\vartheta$ и линеаризуем уравнения (4.6):

$$\Delta\vartheta' = 3\Delta\vartheta + \frac{1}{b}\Delta\psi, \quad \Delta\psi' = 3\Delta\psi.$$

Решения линеаризованных уравнений даются следующими соотношениями:

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{2}(C_2N + 2C_1b)e^{3N}, \quad \Delta\psi = C_2\frac{b}{2}e^{3N}.$$

Запишем выражения для ϕ , $\dot{\phi}$, H вблизи критической точки. Принимая во внимание соотношения (4.5), получаем

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{\sqrt{2}}{l}, \\ \dot{\phi} &\approx \sqrt{2\Lambda} \left(\frac{2}{C_2be^{3N}} - \frac{b}{6}C_2e^{3N} \right), \\ \phi &\approx \frac{\sqrt{2}b}{l} \left(\frac{1}{2}(C_2N + 2C_1b)e^{3N} \right) \left(\frac{2}{C_2be^{3N}} + \frac{b}{12}C_2e^{3N} \right), \\ H &\approx b\mu \left(\frac{2}{C_2be^{3N}} + \frac{b}{12}C_2e^{3N} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(C_2N + 2C_1b)e^{3N} \right)^2 \right).\end{aligned}$$

4.2.5. *Решения в пределе больших ϑ .* Сохраним в уравнениях (4.6) только члены, которые доминируют в области больших ϑ . В этом случае уравнения принимают вид

$$\vartheta' = \frac{3}{4}e^{2\vartheta} \sin^2 \psi, \quad \psi' = \frac{1}{2b}e^{\vartheta} \cos^2 \psi. \quad (4.7)$$

Отсюда

$$\frac{d\vartheta}{e^{\vartheta}} = \frac{3b \sin^2 \psi}{2 \cos^2 \psi} d\psi,$$

следовательно,

$$e^{-\vartheta} = \frac{3b}{2}(\psi - \operatorname{tg} \psi) + C, \quad C \equiv \frac{3b}{2}(\operatorname{tg} \psi_0 - \psi_0) + e^{-\vartheta_0}. \quad (4.8)$$

Рис. 8. Зависимость правой части уравнения (4.9) от ψ , $0 < \psi < \pi/2$, при $b = 2$ и различных значениях C : при $C = 1$ (штрихпунктирная линия), $C = -5$ (штриховая линия), $C = 5$ (пунктирная линия) и $C = 0$ (сплошная линия).

Подставив (4.8) во второе уравнение в (4.7), получаем

$$\psi' = \frac{1}{2b} \frac{\cos^2 \psi}{(3b/2)(\psi - \operatorname{tg} \psi) + C}. \quad (4.9)$$

Вследствие того что знаменатель в правой части, возможно, обращается в ноль, могут возникнуть точки сингулярности. Поскольку величина $\psi - \operatorname{tg} \psi$ является отрицательной, неравенство $C > 0$ неизбежно ведет к наличию точек сингулярности.

Важным фактом является возрастание N в процессе эволюции (это соответствует расширению), при этом ψ может как возрасти, так и убывать. Можно сказать, что если правая часть уравнения (4.9) является положительной, то ψ возрастает с возрастанием N , если же правая часть уравнения (4.9) является отрицательной, то ψ убывает с возрастанием N . В случае наличия точки сингулярности ψ возрастает вплоть до сингулярности, а далее убывает (см. рис. 8).

Решим уравнение (4.9) явно, чтобы получить точную форму зависимости ψ от N :

$$\Upsilon(\psi, C, b) - \Upsilon(\psi_0, C, b) = N - N_0, \quad (4.10)$$

где

$$\Upsilon(\psi, C, b) \equiv 3b^2 \psi \operatorname{tg} \psi + 3b^2 \ln \cos \psi - \frac{3b^2}{2 \cos^2 \psi} + 2 \frac{Cb \sin \psi}{\cos \psi}.$$

Рис. 9. Зависимость $\Upsilon(\psi, C, b)$ от ψ при $b = 2$ и различных значениях C : при $C = 5$ (жирная сплошная линия), $C = -5$ (штриховая линия), $C = 0$ (тонкая сплошная линия) (а). Зависимость $\Upsilon(\psi, C, b)$ от ψ при $b = 2$ и $C = 0$ (б).

Из рис. 9 видно, что при $C > 0$ функция $\Upsilon(\psi, C, b)$ имеет максимум. Этот максимум достигается в некоторой точке $0 < \psi_{\max} < \pi/2$, которая удовлетворяет равенству

$$3b(\psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\max}) + 2C = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \psi_{\max} - \psi_{\max} = \frac{2C}{3b}.$$

Если значение $\psi_{\max}$ расположено вблизи нуля, то $\psi_{\max} \approx (2C/b)^{1/3}$. Это, как легко видеть, справедливо для $2C/b < 1$.

При $C < 0$ максимум расположен в точке $\psi_{\max} = 0$, и эти решения соответствуют значениям N , убывающим при увеличении ψ .

Уравнения (4.5) в пределе больших ϑ принимают следующий вид:

$$\phi' = \frac{\sqrt{2}}{2l} e^{\vartheta} \sin \psi, \quad (4.11)$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{2\Lambda} \operatorname{tg} \psi, \quad \phi = \frac{\sqrt{2\Lambda}}{\mu} \frac{1}{\cos \psi}, \quad (4.12)$$

$$H = e^{-\vartheta} \frac{2l\sqrt{\Lambda}}{\cos \psi}. \quad (4.13)$$

Заметим, что в этом приближении уравнение Фридмана записывается как

$$\frac{8\pi G}{3} \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{8\pi G}{3} \frac{\dot{\phi}^2}{2} \approx \frac{8\pi G}{3} \Lambda.$$

Из уравнений (4.12) следует, что возрастанию ψ на интервале $0 < \psi < \pi/2$ соответствует возрастание $\dot{\phi}$ и ϕ . Фазовый портрет на рис. 1 показывает, что если мы сохраняем часть уравнения, соответствующую положительному, но очень малому

значению H , то $\dot{\phi}$ и ϕ увеличиваются с возрастанием времени. Таким образом, чтобы знать поведение фазовой траектории вблизи сепаратрисы с положительным H , мы можем рассматривать режим при значениях ψ , лежащих в малой окрестности слева от точки $\psi_{\max}$. Также можно сказать, что поле и его производная по времени достигают значений

$$\phi_{\text{boundary}} = \frac{\sqrt{2\Lambda}}{\mu} \frac{1}{\cos \psi_{\max}}, \quad \dot{\phi}_{\text{boundary}} = \sqrt{2\Lambda} \operatorname{tg} \psi_{\max}, \quad (4.14)$$

которые принадлежат границе запрещенной области, а затем динамика соответствует сжатию.

Итак, имеет место следующая картина. Мы стартуем с некоторого значения N_0 и некоторого значения ψ_0 , задав подходящие значения ϑ_0 (напомним, мы предполагаем, что ϑ_0 достаточно велико), чтобы гарантировать справедливость рассматриваемого приближения. Возможны три случая.

1. Пусть $C > 0$. Мы изучаем динамику при $H > 0$, т.е. число е-фолдингов должно увеличиваться, поэтому $N_0 < N_{\max}(C)$. В этом случае N увеличивается в процессе эволюции, пока не достигнет значения $N_{\max}(C)$, которое может быть найдено из уравнения (4.10):

$$N_{\max} = \Upsilon(\psi_{\max}, C, b) - \Upsilon(\psi_0, C, b) + N_0.$$

2. Пусть $C = 0$. В этом случае с увеличением ψ число е-фолдингов уменьшается, т.е. $H < 0$, и, как мы видели, увеличению ψ соответствует увеличение ϕ .

3. Пусть $C < 0$. В этом случае мы также имеем уменьшающееся число е-фолдингов, т.е. $H < 0$.

Получим оценки для динамики вблизи точки $\psi = \psi_{\max}$. Для этого разложим функцию Υ в окрестности $\psi = \psi_{\max}$:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\psi, C, b) &= \Upsilon(\psi_{\max}, C, b) + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \psi_{\max}}{\cos^2 \psi_{\max}} (6b^2 \psi_{\max} + 4bC - 9b^2 \operatorname{tg} \psi_{\max})(\psi - \psi_{\max})^2 + \\ &+ O((\psi - \psi_{\max})^3). \end{aligned}$$

Мы находимся вблизи максимума и $0 < \psi_{\max} < \pi/2$, откуда следует, что

$$6b^2 \psi_{\max} + 4bC - 9b^2 \operatorname{tg} \psi_{\max} = -3b^2 \operatorname{tg} \psi_{\max} < 0.$$

Теперь уравнение (4.10) принимает вид

$$v(\psi - \psi_{\max})^2 \approx -\Upsilon(\psi_0, C, b) + \Upsilon(\psi_{\max}, C, b) - N + N_0,$$

где

$$v \equiv -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \psi_{\max}}{\cos^2 \psi_{\max}} (6b^2 \psi_{\max} + 4bC - 9b^2 \operatorname{tg} \psi_{\max}) > 0,$$

и мы получаем

$$\psi = \psi_{\max} - \frac{1}{v^{1/2}} \sqrt{\Upsilon(\psi_{\max}, C, b) - \Upsilon(\psi_0, C, b) - N + N_0}. \quad (4.15)$$

Поскольку $\psi_{\max}$ и C зависят от начальных условий, положив

$$\mathcal{N}_0 \equiv \Upsilon(\psi_{\max}, C, b) - \Upsilon(\psi_0, C, b) + N_0,$$

перепишем (4.15) следующим образом:

$$\psi(N) = \psi_{\max} - \sqrt{\frac{\mathcal{N}_0 - N}{v}}. \quad (4.16)$$

Найдем зависимость ψ от времени. Используя (4.13) и (4.8), получаем

$$\frac{dt}{dN} \approx \frac{1}{2l\sqrt{\Lambda}} \frac{\cos \psi}{(3b/2)(\psi - \operatorname{tg} \psi) + C}.$$

Таким образом,

$$t - t_0 \approx \int_{N_0}^N \frac{dN}{2l\sqrt{\Lambda}} \frac{\cos \psi(N)}{(3b/2)(\psi(N) - \operatorname{tg} \psi(N)) + C},$$

где зависимость $\psi(N)$ задана формулой (4.16). Введем обозначения

$$u \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{N}_0 - N}{v}}, \quad u_0 \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{N}_0 - N_0}{v}},$$

имеем

$$t - t_0 \approx - \int_{u_0}^u \frac{uv du}{l\sqrt{\Lambda}} \frac{\cos(\psi_{\max} - u)}{(3b/2)(\psi_{\max} - u - \operatorname{tg}(\psi_{\max} - u)) + C}.$$

Разлагая подынтегральное выражение вблизи точки $\psi_{\max}$ до членов первого порядка по u , получаем

$$\begin{aligned} t - t_0 \approx & \frac{1}{l\sqrt{\Lambda}\sqrt{3/2}\operatorname{tg} \psi_{\max}} (\sqrt{\mathcal{N}_0 - N_0} - \sqrt{\mathcal{N}_0 - N}) + \\ & + \frac{1}{l\sqrt{\Lambda}} \frac{\sin \psi_{\max} \cos \psi_{\max} - 1}{3b \sin^3 \psi_{\max}} \cos^2 \psi_{\max} (N - N_0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Сохраним только лидирующий член (линейный по u). Тогда уравнение (4.17) можно переписать как $t \approx t_0 - \nu \sqrt{\mathcal{N}_0 - N}$, где ν зависит от начальных условий и имеет следующий вид:

$$\nu = \frac{1}{l\sqrt{\Lambda}\sqrt{3/2}\operatorname{tg} \psi_{\max}}.$$

Подставляя это выражение в асимптотику для ϕ вблизи точки ϕ_{boundary} , которая задана первой формулой в (4.14), получаем

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{2\Lambda}}{\mu} \frac{1}{\cos(\psi_{\max} - (t_0 - t)/\nu^{1/2})}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что неположительно определенный потенциал в космологии Фридмана приводит к появлению стадии смены режимов от расширения к сжатию. Мы рассмотрели потенциал Хиггса, который возникает в эффективной локальной теории; характерной чертой такого потенциала Хиггса является малость константы взаимодействия и появление области неположительности потенциала. В определенной области потенциал Хиггса может быть аппроксимирован тахионным потенциалом

с положительной космологической постоянной. Рассматривая такое приближение, мы описали эволюцию тахиона вблизи космологической сингулярности, а также построили асимптотику решений вблизи границы разрешенной области. Интересно изучить эволюцию и поведение решения вблизи вершины потенциала.

Нужно учесть, что появление смены режимов ведет к тому, что в рассматриваемой модели отсутствует постинфляционный разогрев, который требуется для описания выхода из эпохи инфляции (или альтернативная стадия). Чтобы получить такой режим, можно ввести в рассматриваемую модель дополнительные поля, взаимодействующие с потенциалом Хиггса, что позволит использовать ее для описания инфляционной эпохи.

Интересно также изучить поведение системы во всех характерных областях и для точного потенциала Хиггса. В частности, в окрестности вершины потенциала можно применить гиперболический аналог [37], [38] метода Крылова–Боголюбова [39]. Интересно сравнить результаты этого метода с результатами других методов, принятых в космологии.

Благодарности. Мы хотим поблагодарить И. В. Воловича и С. Ю. Вернова за плодотворное обсуждение рукописи статьи. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 11-01-00894_a) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4612.2012.1).

Список литературы

- [1] A. D. Linde, *Inflation and Quantum Cosmology*, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [2] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [3] С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.
- [4] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной*, УРСС, М., 2008.
- [5] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B*, **91**:1 (1980), 99–102; A. H. Guth, *Phys. Rev. D*, **23**:2 (1981), 347–356; A. D. Linde, *Phys. Lett. B*, **108**:6 (1982), 389–393; A. Albrecht, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 1220–1223.
- [6] A. D. Linde, *Phys. Lett. B*, **129**:3–4 (1983), 177–181; **162**:4–6 (1985), 281–286.
- [7] F. L. Bezrukov, M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B*, **659**:3 (2008), 703–706, arXiv: 0710.3755.
- [8] J. Garcia-Bellido, D. G. Figueroa, J. Rubio, *Phys. Rev. D*, **79**:6 (2009), 063531, 22 pp., arXiv: 0812.4624.
- [9] A. De Simone, M. P. Hertzberg, F. Wilczek, *Phys. Lett. B*, **678**:1 (2009), 1–8, arXiv: 0812.4946.
- [10] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, C. Kiefer, A. A. Starobinsky, C. F. Steinwachs, *Higgs boson, renormalization group, and naturalness in cosmology*, arXiv: 0910.1041.
- [11] J. L. F. Barbón, J. R. Espinosa, *Phys. Rev. D*, **79**:8 (2009), 081302, 5 pp., arXiv: 0903.0355.
- [12] F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov, S. Sibiryakov, *JHEP*, **1** (2011), 16, 26 pp., arXiv: 1008.5157.
- [13] E. Babichev, V. Mukhanov, A. Vikman, *JHEP*, **02** (2008), 101, 45 pp., arXiv: 0708.0561.
- [14] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty, S. Mukohyama, *JHEP*, **05** (2004), 074, 36 pp., arXiv: hep-th/0312099.
- [15] I. Ya. Aref’eva, “Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy”, *p-Adic Mathematical Physics*, 2nd International Conference (Belgrade, Serbia, Montenegro, 15–21 September 2005), AIP Conference Proceedings, **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, AIP, Melville, NY, 2006, 301–311, arXiv: astro-ph/0410443.
- [16] I. Ya. Aref’eva, L. V. Joukovskaya, *JHEP*, **10** (2005), 087, 23 pp., arXiv: hep-th/0504200.

- [17] G. Calcagni, *JHEP*, **05** (2006), 012, 25 pp., arXiv: hep-th/0512259.
- [18] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, *JHEP*, **02** (2007), 041, 19 pp., arXiv: hep-th/0605085.
- [19] N. Barnaby, T. Biswas, J. M. Cline, *JHEP*, **04** (2007), 056, 35 pp., arXiv: hep-th/0612230.
- [20] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 3–12, arXiv: hep-th/0612098.
- [21] A. S. Koshelev, *JHEP*, **04** (2007), 029, 19 pp., arXiv: hep-th/0701103.
- [22] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, *JHEP*, **07** (2007), 087, arXiv: hep-th/0701184.
- [23] J. E. Lidsey, *Phys. Rev. D*, **76**:4 (2007), 043511, 5 pp., arXiv: hep-th/0703007.
- [24] N. Barnaby, J. M. Cline, *JCAP*, **07** (2007), 017, arXiv: 0704.3426.
- [25] L. Joukovskaya, *Phys. Rev. D*, **76**:10 (2007), 105007, 12 pp., arXiv: 0707.1545.
- [26] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, *J. Phys. A*, **41**:30 (2008), 304003, 14 pp., arXiv: 0711.1364.
- [27] N. Barnaby, J. M. Cline, *JCAP*, **06** (2008), 030, 23 pp., arXiv: 0802.3218.
- [28] N. J. Nunes, D. J. Mulryne, “Non-linear non-local cosmology”, *The Dark Side of the Universe*, 4th International Workshop on the Dark Side of the Universe (Cairo, Egypt, 1–5 June 2008), AIP Conference Proceedings, **1115**, eds. S. Khalil, 2009, 329–334, arXiv: 0810.5471.
- [29] I. Ya. Arefeva, D. M. Belov, A. A. Giryavets, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Noncommutative field theories and (super)string field theories*, arXiv: hep-th/0111208.
- [30] V. A. Belinsky, L. P. Grishchuk, I. M. Khalatnikov, Ya. B. Zeldovich, *Phys. Lett. B*, **155**:4 (1985), 232–236.
- [31] G. N. Felder, A. V. Frolov, L. Kofman, A. D. Linde, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 023507, 26 pp., arXiv: hep-th/0202017.
- [32] L. Boubekur, D. H. Lyth, *JCAP*, **07** (2005), 010, 23 pp., arXiv: hep-ph/0502047.
- [33] K. Tzirakis, W. H. Kinney, *Phys. Rev. D*, **75** (2007), 123510, arXiv: astro-ph/0701432.
- [34] L. A. Ureña-López, M. J. Reyes-Ibarra, *Internat. J. Modern Phys. D*, **18**:4 (2009), 621–634, arXiv: 0709.3996.
- [35] A. R. Liddle, P. Parsons, J. D. Barrow, *Phys. Rev. D*, **50**:12 (1994), 7222–7232, arXiv: astro-ph/9408015.
- [36] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. Wands, *Phys. Rev. D*, **57**:8 (1998), 4686–4690, arXiv: gr-qc/9711068.
- [37] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *JHEP*, **08** (2011), 102, arXiv: 1103.0273.
- [38] I. Ya. Arefeva, E. V. Piskovskiy, I. V. Volovich, *Rolling in the Higgs model and elliptic functions*, arXiv: 1202.4395.
- [39] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Изд-во АН УССР, Киев, 1937.

Поступила в редакцию 6.03.2012