Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Ильичев, Фотоотсчеты в системе “источник–поле–детектор”, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 264–273

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:01:24

© 1999 г.

Л. В. Ильичев*

ФОТООТСЧЕТЫ В СИСТЕМЕ “ИСТОЧНИК–ПОЛЕ–ДЕТЕКТОР”

В рамках “квантовой теории с событиями” рассмотрена задача о статистике фотоотсчетов в поле квантованной моды, контактирующей с равновесным источником, классическим гармоническим током и детектором. Найдены характеристическая функция распределения фотоотсчетов в равновесных условиях и само распределение в присутствии только равновесного источника. Кратко рассмотрены глауберовские условные вероятности случайных процессов на α -плоскости, сопровождающихся регистрацией определенного числа фотонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее важных в квантовой оптике является проблема описания процесса регистрации фотонов (см., например, [1]). В наиболее общей постановке необходим анализ эволюции системы “источник + квантованное поле + детектор”. Необходимо также научиться решать обратную задачу – извлекать из статистики фотоотсчетов информацию о состоянии поля и его источников. В последние десять лет в этой области достигнут значительный прогресс. Мы не беремся представить сколько-нибудь подробный обзор соответствующих работ. Отметим, что в настоящее время хорошо известно, как следует описывать обратное влияние детектора на квантованное поле. Основы обстоятельной и работоспособной теории непрерывного фотодетектирования заложены Килиным в работе [2]. Подробно проанализирован процесс детектирования свободных полей (одномодовых и многомодовых) (см. [3] и цитируемую там литературу). Значительно меньше известно о решениях, включающих источники поля. Именно такие решения представляют наибольший интерес. Хорошим примером служит анализ статистики фотоотсчетов в системе с полупроводниковым лазером и детектором, включенными в систему обратной связи [4].

В настоящей работе рассмотрен процесс детектирования фотонов в рамках недавно сформировавшегося “событийного” подхода Бланшара и Яджика к теории непрерывных квантовых измерений, названного Event Enhanced Quantum Theory (EEQT) [5].

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: shalagin@iae.nsk.su

Теория фотодетектирования как часть теории непрерывных квантовых измерений представляется идеальной площадкой для приложения идей ЕЕQT.

Введем необходимые понятия и обозначения и рассмотрим кратко основные моменты ЕЕQT на примере процесса возникновения фотоотсчетов в поле одной квантованной моды излучения, описываемой бозонными операторами $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$. Матрица плотности $\hat{\rho}_t$ полевой моды, контактирующей с детектором, подчиняется квантовому управляющему уравнению

$$\partial_t \hat{\rho}_t = \mathcal{L}[\hat{\rho}_t] + 2\gamma \hat{a} \hat{\rho}_t \hat{a}^\dagger - \gamma \{\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_t\}_+ \quad (1.1)$$

(см., например, [6]). Здесь $\mathcal{L}$ – так называемый лиувиллиан системы, описывающий эволюцию матрицы плотности поля в отсутствие детектора. Он включает в себя коммутатор матрицы плотности со свободным гамильтонианом поля и члены, отвечающие за взаимодействие с источниками. Остальные два слагаемых в (1.1) отражают взаимодействие полевой моды с детектором. Заметим, что в приведенном уравнении детектор выступает как обыкновенный поглотитель. Параметр γ имеет смысл обратного среднего времени жизни фотона в моде до его поглощения детектором.

В подходе ЕЕQT вместо матрицы плотности $\hat{\rho}_t$ в пространстве состояний полевой моды вводится набор положительных (и, следовательно, эрмитовых) ядерных операторов $\{\hat{\rho}_t^{(n)}\}_{n=0}^\infty$, индексированных номером n – числом фотонов, зарегистрированных к моменту времени t . Каждый оператор $\hat{\rho}_t^{(n)}$ описывает совместные вероятностные характеристики поля и детектора¹⁾. Суммирование по полевым переменным приводит к распределению вероятности числа фотоотсчетов:

$$p_t(n) = \text{Tr } \hat{\rho}_t^{(n)}, \quad (1.2)$$

а суммирование по n дает обычную полевую матрицу плотности

$$\hat{\rho}_t = \sum_{n=0}^\infty \hat{\rho}_t^{(n)}. \quad (1.3)$$

Вместо одного уравнения для оператора $\hat{\rho}_t$ вводится в рассмотрение система зацепляющихся квантовых кинетических уравнений для $\hat{\rho}_t^{(n)}$. Установим на основании простых соображений вид этих уравнений (подробная мотивировка содержится в работах [5]). Отметим прежде всего, что процессы, учтенные в лиувиллиане $\mathcal{L}$, не затрагивают детектор и не меняют его показания. Из второго слагаемого в (1.1), имеющего “сэндвичную” структуру, возникнет член прихода для $\hat{\rho}_t^{(n)}$. Это следует из того, что, как легко заметить рассматривая эволюцию диагональных по числу фотонов элементов матрицы плотности, оно описывает поглощение детектором одного фотона и, следовательно, изменение показания детектора с $n - 1$ на n . Антиккоммутатор, фигурирующий в (1.1) со

¹⁾ Совокупность $\{\hat{\rho}_t^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ есть не что иное, как совместная матрица плотности квантовой подсистемы – поля и классической подсистемы – детектора. Классичность детектора отражена в отсутствии элементов совместной матрицы плотности, недиагональных по показаниям детектора.

знаком минус, описывает убыль $\hat{\rho}_t^{(n)}$ из-за появления $(n + 1)$ -го фотоотсчета. Окончательно имеем следующее уравнение:

$$\partial_t \hat{\rho}_t^{(n)} = \mathcal{L}[\hat{\rho}_t^{(n)}] + 2\gamma \hat{a} \hat{\rho}_t^{(n-1)} \hat{a}^\dagger - \gamma \{\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_t^{(n)}\}_+. \quad (1.4)$$

Заметим, что суммирование обеих частей (1.4) по n восстанавливает уравнение (1.1).

Стоит упомянуть, что ЕЕQT включает в себя также алгоритм генерации отдельных индивидуальных реализаций процесса непрерывного измерения [5]. Мы не будем его описывать, т.к. этот алгоритм нам ниже не понадобится.

Иллюстрируя связи между ЕЕQT и теорией детектирования квантов, необходимо отметить работу [7], в которой при решении задачи о статистике фотоотсчетов в резонансной флуоресценции двухуровневого атома в рамках модели “квантовых скачков” фактически предвосхищена общая идея ЕЕQT.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Проблема заключается в решении системы (1.4) с различными лиувиллианами. В настоящей работе исследуется, возможно, простейший случай:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\hat{\rho}] = & \nu_1 ([\hat{a}^\dagger \hat{\rho}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho} \hat{a}]) + (\nu_1 + \nu_2) ([\hat{a} \hat{\rho}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}, \hat{\rho} \hat{a}^\dagger]) - \\ & - i\Omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}] - i\lambda [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] - i\bar{\lambda} [\hat{a}, \hat{\rho}]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Лиувиллиан (2.1) моделирует взаимодействие квантованной моды с термостатом и классическим гармоническим током амплитуды λ (см., например, [6]). Ω есть разность собственной частоты моды ω_0 и частоты тока ω . Частота ν_2 задает общую скорость релаксации к равновесию в отсутствие тока, а отношение ν_1/ν_2 является средним равновесным числом фотонов в моде (в отсутствие детектора и тока). Отметим, что лиувиллиан (2.1) записан в представлении взаимодействия относительно гамильтониана $\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$, поэтому в нем отсутствует явная зависимость тока от времени.

Рассматриваемая нами модель близка при $\lambda = 0$ к классической задаче анализа статистики фотоотсчетов в поле гауссовского излучения [8–10]. Однако в упомянутых работах не ставилась задача согласованного анализа трехкомпонентной системы “источник – мода поля – детектор”.

Приступая к решению системы (1.4), мы введем операторнозначную производящую функцию

$$\hat{Q}_t(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \hat{\rho}_t^{(n)}, \quad (2.2)$$

где s – действительный параметр, для определенности принимающий значения на отрезке $[0, 1]$. Перейдем к представлению Глаубера, т.е. к разложению по когерентным состояниям (см., например, [6]), для $\hat{Q}_t(s)$:

$$\hat{Q}_t(s) = \int Q_t(s; \alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha. \quad (2.3)$$

Результатом решения уравнения для $Q_t(s; \alpha)$ при начальных условиях $\hat{\rho}_0 = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$ (показание детектора при $t = 0$ считается нулевым) является выражение (некоторые детали решения приведены в приложении)

$$Q_t(s; \alpha) \equiv Q_t(s; \alpha | \alpha_0) = \frac{\nu(s)e^{\nu t}}{\pi D \operatorname{sh}[\nu(s)t]} \times \\ \times \exp \left[-\frac{2\nu(s)|\alpha + \beta(s) - (\alpha_0 + \beta(s))e^{-\nu(s)t - i\Omega t}|^2}{D(1 - e^{-2\nu(s)t})} + \frac{\nu(s) - \nu}{D}(\alpha\bar{\alpha} - \alpha_0\bar{\alpha}_0) \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{2(s-1)\gamma|\lambda|^2}{\nu(s)^2 + \Omega^2} \right] \exp \left[i\frac{\nu - \nu(s)}{\nu(s) - i\Omega} \frac{\lambda}{D}(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0) - i\frac{\nu - \nu(s)}{\nu(s) + i\Omega} \frac{\bar{\lambda}}{D}(\alpha - \alpha_0) \right]. \quad (2.4)$$

Здесь

$$\nu(s) = \sqrt{\nu^2 + 2(s-1)\gamma D}, \quad \beta(s) = i\frac{(\nu - i\Omega)\lambda}{\nu(s)^2 + \Omega^2},$$

$\nu = \gamma + \nu_2$, $D = 2\nu_1$. Это выражение играет роль пропагатора, позволяющего построить текущее значение глауберовской производящей функции $Q_t(s; \alpha)$ из (2.3) по начальному состоянию:

$$Q_t(s; \alpha) = \int Q_t(s; \alpha | \alpha_0) P_0(\alpha_0) d^2\alpha_0, \quad (2.5)$$

где $P_0(\alpha)$ – глауберовский представитель начальной матрицы плотности поля $\hat{\rho}_0$.

3. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В соответствии с определением производящей функции n -я производная от $Q_t(s; \alpha | \alpha_0)$ по s в нуле дает условную вероятность перехода за время t из точки α_0 в точку α плоскости комплексных амплитуд поля с регистрацией на отрезке $[0, t]$ n фотонов:

$$\frac{1}{n!} \partial_s^n Q_t(s; \alpha | \alpha_0) \Big|_{s=0} = p_t^{(n)}(\alpha | \alpha_0). \quad (3.1)$$

Интеграл

$$p_t(n | \alpha_0) \equiv \int p_t^{(n)}(\alpha | \alpha_0) d^2\alpha \quad (3.2)$$

есть полная вероятность регистрации n фотонов за время t при начальном состоянии поля $\hat{\rho}_0 = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$. Это распределение является частным случаем более общего, отвечающего произвольной начальной матрице поля:

$$p_t(n | [\hat{\rho}_0]) \equiv \int p_t(n | \alpha_0) P_0(\alpha_0) d^2\alpha_0. \quad (3.3)$$

Комбинация выражений (3.1) и (3.2) позволяет ввести совокупность случайных процессов на α -плоскости, которые специфицируются условием поглощения определенного числа фотонов за весь период от 0 до t :

$$p_t(\alpha | n, \alpha_0) = \frac{p_t^{(n)}(\alpha | \alpha_0)}{p_t(n | \alpha_0)}. \quad (3.4)$$

Условные вероятности (3.4) позволяют определить состояние поля по начальному состоянию и по известному числу фотоотсчетов с помощью выражения, аналогичного (2.5). Определяемое состояние оказывается огрубленным (в случае $n \neq 0$), т.к. в (3.4) не отражено положение фотоотсчетов на отрезке $[0, t]$. Отметим особый характер условного распределения (3.4): в то время как α_0 есть начальное условие, число фотоотсчетов n относится ко всему периоду наблюдения. Важным следствием этого является немарковость процессов (3.4) даже в расширенном смысле, а именно

$$p_t(\alpha | n, \alpha_0) \neq \sum_{n'=0}^n \int p_{t-t'}(\alpha | n - n', \alpha') p_{t'}(\alpha' | n', \alpha_0) d^2 \alpha', \quad (3.5)$$

где $0 < t' < t$. Это проще всего продемонстрировать на примере $p_t(\alpha | 0, \alpha_0)$ – условного распределения вероятности процесса, не сопровождающегося регистрацией фотонов. Матрица плотности поля $\hat{\rho}_t(0) \equiv \hat{\rho}_t^{(0)} / \text{Tr } \hat{\rho}_t^{(0)}$, отвечающая данной реализации эксперимента, в соответствии с (1.4) эволюционирует по закону

$$\partial_t \hat{\rho}_t(0) = \mathcal{L}[\hat{\rho}_t(0)] - \gamma \{ \hat{a}^\dagger \hat{a} - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t, \hat{\rho}_t(0) \}_+. \quad (3.6)$$

Из-за наличия множителя $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t \equiv \text{Tr } \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_t(0)$ уравнение (3.6) оказывается нелинейным. Это следствие непрерывного мониторинга со стороны детектора. Нелинейным, естественно, оказывается и уравнение для $p_t(\alpha | 0, \alpha_0)$. Его решение для случая отсутствия тока ($\lambda = 0$) согласно (3.4) имеет вид

$$p_t(\alpha | 0, \alpha_0) = \frac{1}{\pi f(t)} \exp \left[-\frac{1}{f(t)} \left| \alpha - \frac{\nu(0)f(t)}{D \text{sh}[\nu(0)t]} \alpha_0 \right|^2 \right], \quad (3.7)$$

где введена функция

$$f(t) = \frac{D \text{sh}[\nu(0)t]}{\nu(0) \text{ch}[\nu(0)t] + \nu \text{sh}[\nu(0)t]}. \quad (3.8)$$

По сравнению с обычной условной вероятностью для процесса Орнштейна–Уленбека, задаваемой выражением (2.4) при $s = 1$ и $\lambda = 0$, условная вероятность (3.7) демонстрирует более медленное расплывание начального пика $\delta(\alpha - \alpha_0)$, но более быстрое движение центра распределения к нулю α -плоскости. Это связано с тем, что молчание детектора вызывает переоценку вероятностей нахождения ненулевого числа фотонов в моде поля в сторону уменьшения²⁾. При этом из большого ансамбля, который описывался исходной матрицей плотности $\hat{\rho}_0 = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$, при отсутствии фотоотсчетов в течение времени t выделяется меньший подансамбль объема $p_t(n | \alpha_0)|_{n=0}$, характеризуемый P -распределением (3.7). Легко проверить, что это распределение не удовлетворяет уравнению (3.5), т.е. процесс не является марковским.

²⁾ Данное явление показывает, что несколько субъективистский взгляд на матрицу плотности как на состояние знания “внешнего наблюдателя” о квантовой системе не лишен оснований.

Вместо (3.5) имеет место выражение

$$p_t(n | [\hat{\rho}_0]) = \sum_{n'=0}^n p_{t-t'}(n - n' | [\hat{\rho}_{t'}(n')]) p_{t'}(n' | [\hat{\rho}_0]), \quad (3.9)$$

являющееся обобщением соотношения Чепмена–Колмогорова. Матрица плотности $\hat{\rho}_{t'}(n') \equiv \hat{\rho}_{t'}^{(n')} / \text{Tr } \hat{\rho}_{t'}^{(n')}$ (точнее, ее P -представитель) получена из начальной $\hat{\rho}_0$ с помощью условной вероятности (3.4), отвечающей поглощению n' фотонов. Счет фотонов имеет, таким образом, марковский характер, несколько модифицированный, как видно из (3.9), квантовой природой поля.

4. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ В УСЛОВИЯХ РАВНОВЕСИЯ

Определим производящую функцию $Q_t^{(\text{eq})}(s)$ распределения фотоотсчетов в условиях равновесия моды поля с окружением, состоящим из термостата и детектора. Для этого надо подставить в (2.5) в качестве $P_0(\alpha_0)$ P -представитель равновесной матрицы плотности

$$P^{(\text{eq})}(\alpha_0) = \frac{2\nu}{\pi D} \exp\left(-\frac{2\nu}{D} |\alpha_0 + \beta(s)|^2\right) \quad (4.1)$$

и проинтегрировать результат по α . Получим

$$Q_t^{(\text{eq})}(s) = Q_t^{(\text{eq})}(s)|_{\lambda=0} \exp\left[\frac{2(s-1)\gamma|\lambda|^2 t}{\nu(s)^2 + \Omega^2}\right] \times \\ \times \exp\left[\frac{8(s-1)^2 \gamma^2 D |\lambda|^2}{[\nu(s)^2 + \Omega^2]} \frac{\nu(0) \text{ch}[\nu(s)t] + \nu \text{sh}[\nu(s)t] - \nu(s) \cos(\Omega t)}{2\nu\nu(s) \text{ch}[\nu(s)t] + [\nu(s)^2 + \nu^2] \text{sh}[\nu(s)t]}\right]. \quad (4.2)$$

Здесь выделен множитель

$$Q_t^{(\text{eq})}(s)|_{\lambda=0} = \frac{2\nu\nu(s) \exp(\nu t)}{2\nu\nu(s) \text{ch}[\nu(s)t] + [\nu^2(s) + \nu^2] \text{sh}[\nu(s)t]}. \quad (4.3)$$

Отметим внешнее совпадение (4.3) с производящей функцией распределения фотоотсчетов в гауссовском поле [8–10]. Отличие состоит в очевидном переопределении (в нашем случае) частоты ν , отражающем влияние детектора на моду поля. Легко заметить, что при $D = 0$ (4.3) и последний сомножитель в (4.2) обращаются в единицу, а второй сомножитель превращается в производящую функцию пуассоновского распределения. Первая и вторая производные $Q_t^{(\text{eq})}(s)$ по s в точке $s = 1$ дают, как известно, две важнейшие характеристики случайного процесса фотоотсчетов – среднее число отсчетов за время t ,

$$\langle n \rangle_t = \frac{\gamma D}{\nu} t + \frac{2\gamma|\lambda|^2 t}{\nu^2 + \Omega^2}, \quad (4.4)$$

и дисперсию числа фотоотсчетов

$$\begin{aligned} \langle (\Delta n)^2 \rangle_t \equiv \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t^2 &= \left(1 + \frac{\gamma D}{\nu^2}\right) \frac{\gamma D}{\nu} t - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma D}{\nu^2}\right)^2 (1 - e^{-2\nu t}) + \\ &+ \frac{2\gamma|\lambda|^2 t}{\nu^2 + \Omega^2} + \frac{8D\gamma^2|\lambda|^2}{\nu(\nu^2 + \Omega^2)^2} (1 + \nu t - e^{-\nu t} \cos(\Omega t)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Как легко проверить, в общем случае ($D \neq 0$, $\lambda \neq 0$) статистика при всех временах является суперпуассоновской. При $D \neq 0$, $\lambda = 0$ и при $\nu t \ll 1$ мы имеем $\langle (\Delta n)^2 \rangle_t \simeq \langle n \rangle_t$. При $D = 0$, $\lambda \neq 0$ наблюдается тривиальный случай пуассоновской статистики.

В общем случае получить явное выражение для распределения числа фотоотсчетов не удается. Это, однако, можно сделать при отсутствии тока:

$$\begin{aligned} p_t^{(\text{eq})}(n)|_{\lambda=0} &= \frac{1}{n!} \partial_s^n Q_t^{(\text{eq})}(s) \Big|_{\lambda=0, s=0} = \\ &= \frac{1}{q_t^{(0)}} \sum_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0 \\ \sum_{k=1}^n k \alpha_k = n}} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)! \prod_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k!} \left(-\frac{q_t^{(k)}}{q_t^{(0)}} \right)^{\alpha_k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь внешнее суммирование осуществляется по всевозможным разбиениям числа n , а α_k — индексы, показывающие, сколько раз в данном разбиении встречается число $k = 1, 2, \dots, n$; для функций $q_t^{(k)}$ имеет место выражение

$$\begin{aligned} q_t^{(k)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\nu t} \left(\frac{\gamma D t}{\nu(0)} \right)^k \sqrt{\nu(0)t} \times \\ &\times \left[\left(1 + \frac{k}{\nu t} \right) I_{k-1/2}[\nu(0)t] + \frac{\nu^2 - \gamma D}{\nu \nu(0)} I_{k+1/2}[\nu(0)t] \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $I_{k \pm 1/2}[x]$ — модифицированные функции Бесселя. Выражение (4.6), к сожалению, не является строго доказанным. Его достоинства, однако, несомненны в тех случаях, когда вычисление комбинаторного фактора (при наличии эффективного алгоритма генерации всевозможных разбиений числа n) предпочтительнее взятия n -й производной от производящей функции.

5. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Заметим, что распределение (4.6) не дает исчерпывающего описания процесса фотоотсчетов. Полная информация содержится в плотности вероятностей $p_t(t_1, \dots, t_n)$ того, что фотоотсчеты произойдут в моменты времени $0 < t_1 < \dots < t_n \leq t$. Распределение числа фотоотсчетов получается из $p_t(t_1, \dots, t_n)$ очевидным образом:

$$p_t(n) = \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_t(t_1, \dots, t_n). \quad (5.1)$$

После незначительной модификации ЕЕQT способна включать в себя объекты, отражающие временное распределение событий. Проиллюстрируем это на нашем примере. Вместо (1.4) должна появиться система уравнений для операторов $\hat{\rho}_t(t_1, \dots, t_n)$, связанных с $\hat{\rho}_t^{(n)}$ соотношением, аналогичным (5.1). Нетрудно выписать результат такого обобщения:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\rho}_t(t_1, \dots, t_n) = & \mathcal{L}[\hat{\rho}_t(t_1, \dots, t_n)] + 2\gamma \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \delta(t - t_n - \varepsilon) \hat{a} \hat{\rho}_t(t_1, \dots, t_{n-1}) \hat{a}^\dagger - \\ & - \gamma \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_t(t_1, \dots, t_n) \}_+. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь отражено появление n -го фотоотсчета в момент времени t . Смещение ε показывает, что δ -функция сосредоточена слева от t . Это важно для устранения неопределенности при интегрировании. Уравнения (5.2) приобретают наиболее простой вид после применения многомерных преобразований Лапласа:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\omega; \omega_n, \dots, \omega_1) = & \int_0^\infty dt \exp(i\omega t) \int_0^t dt_n \exp(i\omega_n t_n) \times \dots \\ & \dots \times \int_0^{t_2} dt_1 \exp(i\omega_1 t_1) \hat{\rho}_t(t_1, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Левая часть из (5.3) подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} -\delta_{n,0} \hat{\rho}_0 - i\omega \hat{\rho}(\omega; \omega_n, \dots, \omega_1) = & \mathcal{L}[\hat{\rho}_t(\omega; \omega_n, \dots, \omega_1)] + 2\gamma \hat{a} \hat{\rho}_t(\omega + \omega_n; \omega_{n-1}, \dots, \omega_1) \hat{a}^\dagger - \\ & - \gamma \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_t(\omega; \omega_n, \dots, \omega_1) \}_+. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Представляют интерес решения такого рода уравнений для разных $\mathcal{L}$. К этому классу задач относится и анализ систем с обратной связью. В этом случае сам лиувиллиан зависит от моментов $t_1, \dots, t_n$ как от параметров. Особенностью этой ситуации является, как легко увидеть, отсутствие замкнутого уравнения для матрицы плотности $\hat{\rho}_t$ моды поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведен пример точного решения задачи описания в рамках ЕЕQT-процесса счета фотонов в системе “источник (тепловой резервуар и гармонический ток) + квантованная мода + детектор”. С лиувиллианом (2.1) задача оказывается простейшей в своем классе.

В части, касающейся статистики фотоотсчетов в равновесных условиях и при отсутствии тока, результаты оказались практически совпадающими с полученными при исследовании гауссовских полей. Учет обратного влияния детектора на поле в рассмотренном случае является тривиальным.

Помимо статистики фотоотсчетов, используемый подход позволяет определять состояние поля по начальному состоянию и числу зарегистрированных фотонов с помощью условного распределения вероятностей (3.4).

В перспективе представляется интересным развить обобщенный подход, кратко очерченный в разделе 5, в приложении к задачам с различными источниками и в особенности к системам с обратной связью.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-03-33124а) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (проект № 274).

ПРИЛОЖЕНИЕ

При решении кинетического уравнения для операторной функции распределения $\hat{Q}_t(s)$ удобно ввести вместо операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ смещенные операторы $\hat{b}(s) = \hat{a} + \beta(s)$ и $\hat{b}^\dagger(s) = \hat{a}^\dagger + \bar{\beta}(s)$, где комплексная функция $\beta(s)$ подлежит определению. Разложим $\hat{Q}_t(s)$ по смещенным когерентным состояниям:

$$\hat{Q}_t(s) = \int \tilde{Q}_t(s; \alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (\text{П.1})$$

где подразумевается $\hat{b}(s)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. $\tilde{Q}_t(s; \alpha)$ подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{Q}_t(s; \alpha) = & [(\nu + i\Omega)\partial_\alpha \alpha + (\nu - i\Omega)\partial_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + D\partial_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}] \tilde{Q}_t(s; \alpha) + \\ & + 2(s-1)\gamma|\alpha - \beta(s)|^2 \tilde{Q}_t(s; \alpha) + [i\lambda - (\nu + i\Omega)\beta(s)] \partial_\alpha \tilde{Q}_t(s; \alpha) - \\ & - [i\bar{\lambda} + (\nu - i\Omega)\bar{\beta}(s)] \partial_{\bar{\alpha}} \tilde{Q}_t(s; \alpha), \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

здесь $\nu = \gamma + \nu_2$, $D = 2\nu_1$. Последние две строки в уравнении (П.2) отличают его от хорошо известного уравнения Фоккера–Планка для случайного процесса Орнштейна–Уленбека³⁾. Выражение (П.2), однако, сводится к указанному уравнению. Для этого введем новую переменную $R_t(s; \alpha)$:

$$\tilde{Q}_t(s; \alpha) = \exp[x(s)t + y(s)\bar{\alpha} + \bar{y}(s)\alpha + z(s)\alpha\bar{\alpha}] R_t(s; \alpha). \quad (\text{П.3})$$

Если положить

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{2(s-1)\gamma|\lambda|^2}{\nu(s)^2 + \Omega^2} + \nu - \nu(s), & y(s) &= i \frac{2(s-1)\gamma\lambda}{\nu(s)^2 + \Omega^2}, \\ z(s) &= \frac{\nu(s) - \nu}{D}, & \beta(s) &= i \frac{(\nu - i\Omega)\lambda}{\nu(s)^2 + \Omega^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где

$$\nu(s) = \sqrt{\nu^2 + 2(s-1)\gamma D}, \quad (\text{П.5})$$

то $R_t(s; \alpha)$ будет подчиняться уравнению

$$\partial_t R_t(s; \alpha) = [(\nu(s) + i\Omega)\partial_\alpha \alpha + (\nu(s) - i\Omega)\partial_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + D\partial_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}] R_t(s; \alpha), \quad (\text{П.6})$$

³⁾ Необходимо отметить явную аналогию между уравнением (П.2) и соответствующим вариантом основного уравнения квантовой теории непрерывного фотодетектирования из [3].

которое является хорошо известным уравнением Фоккера–Планка для случайного процесса Орнштейна–Уленбека. При начальном условии $\hat{\rho}_0 = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$ имеем решение

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_t(s; \alpha | \alpha_0) = & \exp[x(s)t + y(s)(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0) + \bar{y}(s)(\alpha - \alpha_0) + z(s)(\alpha\bar{\alpha} - \alpha_0\bar{\alpha}_0)] \times \\ & \times \frac{2\nu(s)}{\pi D(1 - e^{-2\nu(s)t})} \exp\left[-\frac{2\nu(s)|\alpha - \alpha_0 e^{-\nu(s)t - i\Omega t}|^2}{D(1 - e^{-2\nu(s)t})}\right]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Чтобы найти $Q_t(s; \alpha | \alpha_0)$, необходимо вспомнить, что $|\alpha\rangle = |\alpha - \beta(s)\rangle$. Следовательно, $Q_t(s; \alpha | \alpha_0) = \tilde{Q}_t(s; \alpha + \beta(s) | \alpha_0 + \beta(s))$.

Список литературы

- [1] *B. Saleh*. Photoelectron Statistics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] *С. Я. Килин*. Изв. АН СССР. Сер. физ. 1989. Т. 53. С. 1038.
- [3] *С. Я. Килин*. Квантовая оптика. Поля и их детектирование. Минск: Наука и техника, 1990.
- [4] *Y. Yamamoto, N. Itano, S. Machida*. Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 3243.
- [5] Полная библиография по ЕЕQT содержится в Internet: <http://iris.ift.uni.wroc.pl/~ajad/qf.htm>.
- [6] *К. В. Гардинер*. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
- [7] *R. J. Cook*. Phys. Rev. A. 1981. V. 23. P. 1243.
- [8] *G. Bedard*. Phys. Rev. 1966. V. 151. P. 1038.
- [9] *М. Лэкс*. Флуктуации и когерентные явления. М.: Мир, 1979.
- [10] *А. С. Мазманишвили*. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Киев: Наукова думка, 1987.

Поступила в редакцию 2.VII.1998 г.