Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пастон, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, Калибровочно-инвариантная регуляризация квантовой теории поля на световом фронте, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 3, 429–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:55:05

© 2004 г. С. А. Пастон*, Е. В. Прохвятилов†, В. А. Франке*

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ

Кратко описаны проблемы, присущие гамильтонову подходу к квантованию калибровочных полей на световом фронте при ограничении пространства-времени неравенством $|x^-| \leq L$ и периодических граничных условиях для полей по координате x^- (метод DLCQ). В этих рамках рассмотрена калибровочно-инвариантная ультрафиолетовая регуляризация с помощью перехода к решетке по поперечным координатам. Остающиеся ультрафиолетовые расходимости по продольному импульсу p_- устраняются калибровочно-инвариантной конечно-модовой регуляризацией. Оказывается, что при введенной регуляризации канонический формализм на световом фронте не содержит обычных наиболее сложных связей второго рода между нулевыми и ненулевыми модами полей. Описанная схема может использоваться как для регуляризации обычной калибровочной теории, так и для калибровочно-инвариантной формулировки эффективных низкоэнергетических моделей на световом фронте. Из-за нарушения явной лоренц-инвариантности в рассматриваемом формализме возникают трудности, связанные с определением вакуумного состояния. Эти трудности обсуждаются, в частности, в связи с проблемой перехода к пределу непрерывного пространства.

Ключевые слова: калибровочные поля, световой фронт, гамильтонов подход, поперечная решетка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Каноническая формулировка теории поля в координатах светового фронта (СФ) $x^\pm = (x^0 \pm x^3)/\sqrt{2}$, x^1 , x^2 , где x^0 , x^1 , x^2 , x^3 – лоренцевы координаты, была предложена Дираком [1]. В этом подходе координата x^+ играет роль времени, так что канонический формализм строится на гиперплоскости $x^+ = \text{const}$. Преимущества этой формулировки связаны с упрощением описания физического вакуума благодаря неотрицательности импульса P_- (генератора сдвига вдоль оси x^-), который на СФ имеет простое, квадратичное по полям, выражение. Как следствие низшее собственное состояние оператора

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: paston@pobox.spbu.ru; franke@pobox.spbu.ru

†НИИ физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: Evgeni.Prokhvat@pobox.spbu.ru

P_- описывает как физический вакуум, так и “математический” вакуум теории возмущений. Используя фоксовское пространство над этим вакуумом, можно решать стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом P_+ (оператором эволюции по x^+) с целью непертурбативного расчета спектра связанных состояний. Это так называемый гамильтонов подход на $C\Phi$.

С другой стороны, плоскость $x^+ = \text{const}$ – характеристическая поверхность дифференциальных уравнений поля. Поэтому не очевидно, что квантование на этой поверхности эквивалентно квантованию в обычных лоренцевых координатах [2]–[4]. В частности, в каноническом формализме на $C\Phi$ присутствуют сингулярности при $p_- = 0$. Это требует введения, кроме обычной ультрафиолетовой регуляризации, еще и регуляризации особенностей при $p_- \rightarrow 0$, что может нарушить лоренцеву или калибровочную симметрии даже в пределе снятия регуляризации [3].

Обычно эту регуляризацию вводят одним из следующих простейших способов:

а) путем обрезания импульса

$$|p_-| \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0; \quad (1)$$

б) путем ограничения координаты

$$-L \leq x^- \leq L \quad (2)$$

и выбора периодических граничных условий по x^- для всех полей.

Эти способы удобны для гамильтонова подхода на $C\Phi$, однако они оба не инвариантны относительно лоренцевых преобразований. В случае калибровочных теорий калибровочно-инвариантна только регуляризация “б”.

Проблема построения гамильтониана на $C\Phi$, ведущего к результатам, которые эквивалентны возникающим в обычной лоренц- и калибровочно-инвариантной формулировке теории, оказывается достаточно сложной. Тем не менее в рамках теории возмущений во всех порядках эту проблему можно решить как для некалибровочных [5], так и для калибровочных [6] теорий, используя регуляризацию “а” и специальные методы, позволяющие восстановить нарушенные симметрии в пределе снятия регуляризации. Но возникающий гамильтониан оказывается весьма сложным, особенно в случае калибровочных теорий, причем он содержит много неизвестных параметров.

Способ “б” ведет к дискретизации спектра оператора P_- ($p_- = \pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$) и в литературе носит название *дискретизованное квантование на $C\Phi$* (DLCQ) [7]. Фурье-компоненты полей по x^- , отвечающие $p_- = 0$ (и именуемые обычно *нулевыми модами*), оказываются зависимыми переменными и должны быть выражены через ненулевые моды посредством решения канонических связей второго рода [8]–[10]. Такие связи обычно нелинейны по полям, и их решение представляет трудности, не говоря уже о проблеме расстановки операторов в соответствующих этим связям квантовых выражениях. Обычно данное построение проводится в непрерывном пространстве-времени. При этом ввести калибровочно-инвариантную ультрафиолетовую регуляризацию достаточно трудно. Поэтому чаще всего ограничиваются простейшей калибровочно-неинвариантной ультрафиолетовой регуляризацией. Такой подход кратко излагается в разделах 2, 3 данной работы.

С другой стороны, в качестве калибровочно-инвариантной ультрафиолетовой регуляризации неабелевых калибровочных теорий хорошо известно введение пространственно-временной решетки [11]. (В непрерывном пространстве можно использовать также калибровочно-инвариантную регуляризацию, предложенную в работе [12], но не ясно, каким образом в ее рамках развивать канонический формализм на СФ.) Для формулировки теории на СФ применяется решетка только по поперечным координатам x^1, x^2 . При этом удобно использовать вариант теории, в котором действие полиномиально по полям [13]. Такая регуляризация, разумеется, нарушает лоренц-инвариантность, и можно лишь надеяться, что последняя восстанавливается при предельном переходе к непрерывному пространству.

В разделах 4, 5 настоящей работы рассматривается каноническая формулировка на СФ калибровочных теорий, регуляризованных калибровочно-инвариантным образом путем дискретизации “б” импульса p_- , введения решетки по поперечным координатам и использования так называемой конечно-модовой регуляризации по p_- . Последняя основана на обрезании мод оператора ковариантной производной D_- , фигурирующих в разложении переменных поля на решетке по собственным функциям этого оператора. Указанные переменные поля суть решеточный аналог поперечных компонент обычного калибровочного поля. Они описываются комплексными матрицами, отнесенными к ребрам решетки, и допускают вышеупомянутую конечно-модовую регуляризацию (для фермионных полей аналогичная регуляризация применялась в ряде работ; см., например, [14]).

Интересно, что в рамках такой формулировки удается избежать сложных канонических связей второго рода, обычно возникающих в теории на СФ в непрерывном пространстве. Это значительно упрощает каноническую процедуру квантования. Однако отсутствие явной лоренц-инвариантности в рассматриваемой схеме затрудняет исследование связи полученной квантовой теории с обычной лоренц-ковариантной формулировкой. В частности, существует проблема описания квантового вакуума, поскольку выясняется, что до снятия регуляризации низшее состояние оператора P_- может не совпадать с низшим состоянием гамильтониана P_+ . Этот вопрос обсуждается в конце раздела 5.

С другой стороны, если начинать с полуфеноменологического (эффективного) гамильтонова подхода на СФ, также использующего решетку по поперечным координатам и те же матричные переменные на ребрах решетки [15], то данный формализм дает полностью калибровочно-инвариантную формулировку такого подхода. В этом случае проблему вакуума можно решить, модифицируя соответствующим образом гамильтониан P_+ .

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ В КООРДИНАТАХ СВЕТОВОГО ФРОНТА

Рассмотрим сначала, как можно сформулировать калибровочную теорию поля на СФ, используя непрерывное пространство-время при введении периодических граничных условий по координате x^- . При этом пока не будем фиксировать способ ультрафиолетовой регуляризации и ограничимся простейшей неабелевой калибровочной группой

$SU(2)$.

Введем основные обозначения. Координаты СФ $x^\mu = (x^+, x^-, x^\perp)$, $x^\perp \equiv x^k$, $k = 1, 2$, соответствуют метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ с ненулевыми компонентами $g_{+-} = g_{-+} = -g_{11} = -g_{22} = 1$; $A_\mu^a(x)$ – вектор-потенциал калибровочного поля, $a = 1, 2, 3$ – индекс присоединенного представления калибровочной группы; $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$, ε^{abc} – полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon^{123} = 1$); g – константа взаимодействия; для любого изовектора $\hat{O} \equiv O^a \tau^a / 2$; τ^a – матрицы Паули. Дираковские биспиноры

$$\Psi^i(x) \equiv \begin{pmatrix} \chi^i(x) \\ \xi^i(x) \end{pmatrix},$$

где i – индекс фундаментального представления калибровочной группы, являются грасмановыми (антикоммутирующими) переменными и соответствуют следующему представлению γ^μ -матриц Дирака:

$$\begin{aligned} \gamma^+ &= i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^- &= i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^k &= i \begin{pmatrix} -\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, & \gamma^0 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где σ_k – спинорные матрицы Паули. Введем также обозначения: Ψ^+ – эрмитово сопряженный (э.с.) биспинор,

$$\hat{D}_\mu \equiv \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu, \quad \bar{D} \equiv \hat{D}_k \sigma_k, \quad (D_\mu)^{ac} \equiv \delta^{ac} \partial_\mu + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b. \quad (4)$$

“Нулевая мода” $(f)_0$ функции $f(x^-)$ есть

$$(f)_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx^- f(x^-). \quad (5)$$

Калибровочное преобразование действует следующим образом:

$$\Psi \rightarrow \Omega \Psi, \quad \hat{A}_\mu \rightarrow \Omega \hat{A}_\mu \Omega^{-1} + \frac{i}{g} \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}, \quad \Omega = e^{i\omega^a \tau^a / 2}. \quad (6)$$

В этих обозначениях рассматриваемая теория определяется калибровочно-инвариантной плотностью лагранжиана:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \Psi^+ \gamma^0 (i\hat{D}_\nu \gamma^\nu - M) \Psi, \quad (7)$$

где M – массовый параметр фермионов. В координатах СФ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} F_{+-}^a F_{+-}^a + F_{+k}^a F_{-k}^a - \frac{1}{2} F_{12}^a F_{12}^a + \\ & + i\sqrt{2} \chi^+ \hat{D}_+ \chi + i\sqrt{2} \xi^+ \hat{D}_- \xi + \{i\xi^+ (\bar{D} - M) \chi + \text{э.с.}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Калибровочно-инвариантные периодические граничные условия на поля соответствуют их периодичности с точностью до калибровочного преобразования. Всегда можно перейти к такой калибровке [8], в которой потенциалы A_μ^a точно периодичны по x^- , а фермионные поля Ψ^i либо периодичны, либо антипериодичны. В этой калибровке остаточная калибровочная группа симметрии отвечает периодическим либо антипериодическим матрицам $\Omega(x)$. Такой калибровочной свободы достаточно [8], чтобы удовлетворить дополнительному условию

$$\partial_- A_-^a = 0, \quad A_-^a \equiv v^a(x^\perp, x^+). \quad (9)$$

Оно отличается от обычной “светоподобной” калибровки $A_-^a = 0$ наличием нулевой моды v^a . Эта мода не может быть “устранена” преобразованиями указанной калибровочной группы, так как непосредственно связана с инвариантом относительно этой группы [8], [16]:

$$\text{Sp } P \exp \left(ig \int_{-L}^L dx^- \hat{A}_- \right). \quad (10)$$

После наложения условия (9) остается следующий калибровочный произвол в выборе v^a :

$$\hat{v} \rightarrow \tilde{\Omega} \left(\hat{v} + \frac{\pi l}{gL} \hat{n} \right) \tilde{\Omega}^{-1}, \quad n^a \equiv \frac{v^a}{\sqrt{v^{a'} v^{a'}}}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

Он соответствует преобразованиям

$$\Omega(x) = \tilde{\Omega}(x^\perp, x^+) e^{i \hat{n} \pi l x^- / L}. \quad (12)$$

Матрицы (12) тесно связаны с топологической классификацией классических калибровочных полей в замкнутом по x^- пространстве-времени [8]; нетривиальным классам отвечают такие функции $v^a(x^\perp, x^+)$, которые нельзя с помощью калибровочного преобразования матрицами вида (12) топологически непрерывно направить вдоль калибровочной оси “3” в окрестности особых точек, где $v^a = n^a \pi l / (gL)$. В дальнейшем мы оставляем в стороне интересный вопрос о роли таких классов потенциалов [8] и будем рассматривать только тривиальный класс [9], [16], который допускает калибровку

$$v^a = \delta^{a3} v, \quad A_-^1 = A_-^2 = 0, \quad A_-^3 \equiv v. \quad (13)$$

Это условие ограничивает калибровочный произвол до абелевой группы

$$\Omega(x) = e^{i \omega(x^\perp, x^+) \tau^3 / 2} \quad (14)$$

и группы преобразований вида (12) с $n^a = \delta_{a3}$, $\tilde{\Omega} \equiv 1$.

Введем комбинации потенциалов, просто преобразующиеся относительно (14):

$$\begin{aligned} W_\mu &\equiv \frac{A_\mu^1 + i A_\mu^2}{\sqrt{2}}, & W_\mu^+ &\equiv \frac{A_\mu^1 - i A_\mu^2}{\sqrt{2}}, \\ W_\mu &\xrightarrow{\omega} W_\mu e^{-i \omega}, & A_\mu^3 &\xrightarrow{\omega} A_\mu^3 + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу условий периодичности их можно представить в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} A_\mu^3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_n A_{n\mu}(x^\perp, x^+) e^{-ip_n x^-}, \\ W_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_n W_{n\mu}(x^\perp, x^+) e^{-ip_n x^-}, \\ \Psi^i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_n \Psi_n^i(x^\perp, x^+) e^{-ip_n x^-}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $p_n = \pi n/L$, для периодических условий $p'_n = p_n$, а для антипериодических $p'_n = p_{n+1/2}$.

Обратимся теперь к лагранжиану (8) и выразим его через переменные (16) с учетом калибровки (13). Получаем следующее выражение [16]:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \mathcal{L} dx^- &= L(\partial_+ v)^2 - \sqrt{2L} \partial_+ A_{0k} \partial_k v + \sum_{n>0} 2ip_n A_{nk}^+ \partial_+ A_{nk} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2i(p_n - gv) W_{nk}^+ \partial_+ W_{nk} + i\sqrt{2} \chi_n^{i+} \partial_+ \chi_n^i] + \mathcal{L}', \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mathcal{L}'$ не содержит производных по “времени” x^+ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' \equiv \int_{-L}^L dx^- &\left[\frac{1}{2} (D_- A_+)^a (D_- A_+)^a + A_+^a \left(D_k F_{-k}^a + \frac{g}{\sqrt{2}} \chi^+ \tau_a \chi \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} F_{12}^a F_{12}^a + i\sqrt{2} \xi^+ \hat{D}_- \xi + \{i\xi^+ (\bar{D} - M) \chi + \text{э.с.}\} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем канонически сопряженные “импульсы” к динамическим переменным v , A_{nk} ($n > 0$), W_{nk} , χ_n^i ($-\infty < n < \infty$):

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ v)} = 2L \partial_+ v - \sqrt{2L} \partial_k A_{0k}, \\ \Pi_{nk}^3 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ A_{nk})} = 2ip_n A_{nk}^+, \quad n > 0, \\ \Pi_{nk} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ W_{nk})} = 2i(p_n - gv) W_{nk}^+, \\ \pi_n^i &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ \chi_n^i)} = i\sqrt{2} \chi_n^{i+}. \end{aligned} \quad (19)$$

Остальные переменные ξ , A_{n+} , W_{n+} , W_{n+}^+ , A_{0k} зависимы и определяются из связей, к которым приводит принцип наименьшего действия для лагранжиана (17).

Варьируя по ξ^+ , получаем

$$\sqrt{2} \hat{D}_- \xi + (\bar{D} - M) \chi = 0, \quad (20)$$

при варьировании по A_+^a имеем

$$\begin{aligned} D_- D_- A_+^a &= D_k F_{-k}^a + \frac{g}{\sqrt{2}} \chi^+ \tau^a \chi, \\ a = 3: \quad \partial_- \partial_- A_+^3 &= \partial_- \partial_k A_k^3 - \sqrt{2L} \partial_k \partial_k v + \\ &+ ig[W_k(\partial_- - igv)W_k^+ - \text{э.с.}] + \frac{g}{\sqrt{2}} \chi^+ \tau^3 \chi, \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} a = 1, 2: \quad (\partial_- + igv)^2 W_+ &= (\partial_- + igv)[(\partial_k + igA_k^3)W_k] - \\ &- 2ig(\partial_- A_k^3 - \partial_k v)W_k + \frac{g}{\sqrt{2}} \chi^+ \tau^+ \chi, \\ \tau^+ &\equiv \frac{\tau^1 + i\tau^2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

варьирование по A_{0k} дает связь

$$\begin{aligned} (\partial_1^2 + \partial_2^2)A_{0k} + \frac{\partial_k \Pi}{\sqrt{2L}} + ig \left\{ W_k^+ F_{+-} - \varepsilon_{kk'} W_{k'} F_{12} - \right. \\ \left. - \varepsilon_{kk'} \partial_{k'} (W_1^+ W_2) + \frac{i}{2} \xi^+ \tau^3 \sigma_k \chi - \text{э.с.} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, $F_{+-} \equiv -(\partial_- + igv)W_+$, $F_{12} \equiv (\partial_1 + igA_1^3)W_2 - (\partial_2 + igA_2^3)W_1$. Не определяемая из этих связей компонента A_{0+} играет роль множителя Лагранжа при связи первого рода, генерирующей калибровочные преобразования (14):

$$-2L \partial_k \partial_k v + ig(W_k(\partial_- - igv)W_k^+ - \text{э.с.})_0 + \frac{g}{\sqrt{2}} (\chi^+ \tau_3 \chi)_0 = 0. \quad (24)$$

Это выражение есть нулевая мода уравнения связи (21).

Выражение гамильтониана через канонические переменные имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi}{\sqrt{2L}} + \partial_k A_{0k} \right)^2 + \int_{-L}^L dx^- \left[\frac{1}{2} (F_{12}^3)^2 + \frac{1}{2} (\partial_- A_+^3)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (F_{12} F_{12}^+ + F_{+-} F_{+-}^+ + \text{э.с.}) + \frac{i}{\sqrt{2}} \chi^+ (\overline{D} + M) \hat{D}_-^{-1} (\overline{D} - M) \chi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь подразумевается, что переменные A_k , W_k , F_{12}^3 , A_+^3 , F_{+-} , χ выражены через канонические переменные v , Π , A_{nk} , Π_{nk}^3 ($n > 0$), W_{nk} , Π_{nk} ($-\infty < n < \infty$), χ_n^i , π_n^i с помощью равенств (16), (19)–(23). Все перечисленные величины, кроме A_{0k} , находятся из указанных равенств явно. Переменная A_{0k} должна определяться из сложного дифференциального уравнения (23), что весьма трудно.

Наряду с описанным формализмом можно рассмотреть модель, в которой периодические по x^- поля ограничиваются условием

$$A_-^a = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (26)$$

В этом случае имеет место глобальная $SU(2)$ -симметрия, но число связей первого рода типа (24) и второго рода типа (23) возрастает (и они усложняются).

Отмеченные трудности обусловлены наличием нулевых мод. Они исчезают, если в исходном лагранжиане с самого начала отбросить все нулевые моды и далее развивать каноническую теорию на основе такого упрощенного лагранжиана. В этом случае канонический формализм вообще не содержит связей, но остаточная калибровочная инвариантность отсутствует.

3. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ В КООРДИНАТАХ СВЕТОВОГО ФРОНТА

Перейдем от классических канонических переменных к квантовым операторам с (анти)перестановочными соотношениями ($x^\perp = \text{const}$)

$$\begin{aligned} [v(x^\perp), \Pi(x'^\perp)] &= [A_{nk}(x^\perp), \Pi_{nk}^3(x'^\perp)] = [W_{nk}(x^\perp), \Pi_{nk}(x'^\perp)] = \\ &= \{\chi_{nr}^i(x^\perp), \pi_{nr}^i(x'^\perp)\} = i\delta^{(2)}(x^\perp - x'^\perp) \end{aligned} \quad (27)$$

и остальными коммутаторами (либо антикоммутаторами $\{\cdot, \cdot\}$ для фермионов), равными нулю.

После перехода к квантовым величинам легко найти низшее собственное состояние оператора P_- . Всегда можно выбрать такой порядок операторов канонических переменных (“нормальный” порядок), чтобы минимальное собственное значение P_- равнялось нулю. Низшее собственное состояние оператора P_- играет роль фоковского вакуума. Можно ввести соответствующие фоковские операторы рождения и уничтожения: a_{nk}^+ и a_{nk} ($n > 0$), w_{nk}^+ и w_{nk} ($-\infty < n < \infty$), $\varkappa_{nr}^{i+}$ и $\varkappa_{nr}^i$ ($-\infty < n < \infty$), которые связаны с каноническими переменными:

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \sqrt{2p_n} A_{nk}, \quad a_{nk}^+ = \frac{\Pi_{nk}^3}{i\sqrt{2p_n}}, \quad n > 0, \\ w_{nk} &= \theta(p_n - gv) \sqrt{2|p_n - gv|} W_{nk} + \frac{\theta(-p_n + gv)}{i\sqrt{2|p_n - gv|}} \Pi_{nk}, \\ w_{nk}^+ &= \frac{\theta(p_n - gv)}{i\sqrt{2|p_n - gv|}} \Pi_{nk} - \theta(-p_n + gv) \sqrt{2|p_n - gv|} W_{nk}, \\ \varkappa_{nr} &= \theta(p_n + g\hat{v}) 2^{1/4} \chi_{nr} + \theta(-p_n - g\hat{v}) 2^{1/4} \frac{\pi_{nr}}{i\sqrt{2}}, \\ \varkappa_{nr}^+ &= \theta(p_n + g\hat{v}) 2^{1/4} \frac{\pi_{nr}}{i\sqrt{2}} + \theta(-p_n - g\hat{v}) 2^{1/4} \chi_{nr}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, и удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям. В терминах этих операторов рождения и уничтожения импуль-

сы P_- и P_k имеют такой же вид, как и в теории невзаимодействующих полей:

$$\begin{aligned} P_- &= \int d^2 x \left(2L \partial_k v \partial_k v + \sum_{n>0} a_{nk}^+ a_{nk} p_n + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (w_{nk}^+ w_{nk} |p_n - gv| + \varkappa_{nr}^+ |p_n + g\hat{v}| \varkappa_{nr}) \right), \\ P_k &= \int d^2 x \left(A_{0k} Q + \Pi \partial_k v + \sum_{n>0} a_{nk'}^+ i \partial_k a_{nk'} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (w_{nk'}^+ i \partial_k w_{nk'} + \varkappa_{nr}^{i+} i \partial_k \varkappa_{nr}^i) \right), \end{aligned}$$

где Q – оператор связи, соответствующий выражению, стоящему в левой части уравнения (24):

$$Q \equiv -2L \partial_k \partial_k v - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(w_{nk}^+ w_{nk} g \varepsilon(p_n - gv) + \varkappa_{nr}^+ \frac{\tau^3}{2} g \varepsilon(p_n + g\hat{v}) \varkappa_{nr} \right), \quad (29)$$

а $\varepsilon(p_n - gv)$ – знаковая функция.

Наложим связь (29) на допустимые физические векторы состояний [17]. Это условие означает их калибровочную инвариантность относительно группы (14). В фоковском представлении векторы состояний образуются с помощью введенных операторов рождения. При калибровочных преобразованиях (14) эти операторы изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{nk}^+ &\xrightarrow{\omega} w_{nk}^+ e^{i\omega \varepsilon(p_n - gv)}, \\ \varkappa_{nr}^+ &\xrightarrow{\omega} \varkappa_{nr}^+ e^{-i\omega \varepsilon(p_n + g\hat{v}) \tau^3 / 2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому фоковские векторы состояний оказываются, вообще говоря, калибровочно-неинвариантными. Чтобы получить калибровочно-инвариантные векторы, достаточно переопределить операторы рождения, умножая их на фазовый операторный множитель, построенный с помощью переменной π , которая преобразуется как величина $\partial_k A_{0k}$. С этой целью определим оператор фазы η :

$$\eta(x) = -\frac{g}{2L} (\partial_k \partial_k)^{-1} \Pi(x) = \frac{g}{4\pi L} \int d^2 x' \ln |x^\perp - x'^\perp| \Pi(x'),$$

преобразующийся по закону $\eta \xrightarrow{\omega} \eta - \omega$. Тогда калибровочно-инвариантные операторы рождения принимают следующий вид:

$$w_{nk}^+ e^{i\varepsilon(p_n - gv)\eta}, \quad \varkappa_{nr}^+ e^{-i\varepsilon(p_n + g\hat{v})\eta \tau^3 / 2}. \quad (31)$$

Отметим, что в силу связи (29) фоковский вакуум есть собственное состояние оператора v с собственным значением, удовлетворяющим уравнению $\partial_k \partial_k v(x) = 0$. Предполагая, что потенциалы A_μ^a не возрастают при $x^\perp \rightarrow \infty$, получаем, что указанное собственное

значение представляет собой постоянную функцию. Значение этой функции обозначим через v_0 . Поскольку величина Π , определяющая фазу η , канонически сопряжена с переменной v , то фазовые множители в выражениях (31) действуют на собственные состояния v как операторы сдвига. Они сдвигают собственное значение $v(x)$ на величину

$$-\frac{g}{4\pi L}\varepsilon(p_n - gv(x_1)) \ln |x^\perp - x_1^\perp| \quad (32)$$

для оператора $w_{nk}^+(x_1)$ и на величину

$$\frac{g}{4\pi L}\left(\varepsilon(p_n + g\hat{v}(x_1))\frac{\tau^3}{2}\right)_{ii} \ln |x^\perp - x_1'^\perp| \quad (33)$$

для оператора $\varkappa_{nr}^{i+}(x_1')$. Отсюда следует, что калибровочно-инвариантный фоковский вектор получается применением операторов рождения w_{nk}^+ , $\varkappa_{nr}^{i+}$ к собственному состоянию оператора v , собственное значение которого отличается от вакуумного (v_0) на сумму сдвигов (32), (33), т.е. равно

$$\begin{aligned} v(x) = v_0 - \frac{g}{4\pi L} \sum_l \varepsilon(p_{n_l} - gv(x_l)) \ln |x^\perp - x_l^\perp| + \\ + \frac{g}{4\pi L} \sum_{l'} \varepsilon(p_{n_{l'}} + g\hat{v}_{i_{l'}i_{l'}}(x_{l'}')) \frac{\tau_{i_{l'}i_{l'}}^3}{2} \ln |x^\perp - x_{l'}'^\perp|. \end{aligned} \quad (34)$$

Асимптотика этого собственного значения при $x^\perp \rightarrow \infty$ определяется условием равенства нулю полного “заряда” всех “частиц” (т.е. “глюонов”, рожденных в точках $x_l^\perp$, и “кварков”, рожденных в точках $x_{l'}'^\perp$):

$$q \equiv \sum_l g\varepsilon(p_{n_l} - gv(x_l)) - \sum_{l'} g\varepsilon(p_{n_{l'}} + g\hat{v}_{i_{l'}i_{l'}}(x_{l'}')) \frac{\tau_{i_{l'}i_{l'}}^3}{2} = 0. \quad (35)$$

Обсудим также особенности $v(x)$ при $x^\perp \rightarrow x_l^\perp$ или $x^\perp \rightarrow x_{l'}'^\perp$. Согласно формуле (34) мы формально получаем противоречие для знака $gv(x_l)$. Действительно, при $x^\perp \rightarrow x_l^\perp$ или $x^\perp \rightarrow x_{l'}'^\perp$, где l либо l' — одно из значений, по которым ведется суммирование в формуле (34), там преобладает только один член, в котором зависимость от p_{n_l} или $p_{n_{l'}}$ перестает играть роль. При этом левая и правая части формулы (34) всегда имеют противоположные знаки. Этого можно избежать, только сосредоточивая в каждой точке x_l несколько “частиц” с противоположными “зарядами” (тогда $v(x) = v_0$). Однако локализация нескольких частиц в одной точке обычно ведет в теории поля к ультрафиолетовым расходимостям энергии [18]. Поэтому необходима регуляризация $|x^\perp - x_l^\perp| \geq \Lambda^{-1}$, которая дает возможность исключить расходимость за счет перенормировки константы взаимодействия $g(\Lambda)$ [18]. В самом деле, при $x^\perp \rightarrow x_l^\perp$ в этом случае имеем

$$gv(x_l) \simeq gv_0 + \frac{g^2(\Lambda)}{4\pi L} \varepsilon(p_n - gv(x_l)) \ln \Lambda + O(g^2(\Lambda)). \quad (36)$$

Здесь предполагается, что $g^2(\Lambda) \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ (как получается в обычной теории возмущений [19]). Если еще предположить, что $g^2(\Lambda) \ln(\Lambda) \rightarrow \text{const}$ (тоже в соответствии с ренормгруппой в теории возмущений [19]), то получим

$$gv(x_l) \simeq gv_0 + \frac{\text{const}}{4\pi L} \varepsilon(p_n - gv_0). \quad (37)$$

Аналогично для фермионов

$$gv(x_l) \simeq gv_0 + \frac{\text{const}}{8\pi L} \varepsilon\left(p_n - \frac{1}{2}gv_0\right). \quad (38)$$

Что касается значений $gv(x)$ в остальных точках, то они (при $\Lambda \rightarrow \infty$) имеют порядок $gv_0 + O(g^2(\Lambda))$.

Величина v_0 , определенная ранее для фокковского вакуума, может рассматриваться в физическом вакууме, отвечающем минимуму гамильтониана (25), как величина, квантовое значение которой соответствует низшему собственному состоянию оператора

$$H_0 \equiv \langle v_0 | H | v_0 \rangle = -(V)^{-1} \frac{d^2}{dv_0^2} + VU(v_0), \quad (39)$$

где $V \equiv 2L \int d^2x$ — объем пространства, $U(v_0)$ — плотность “потенциальной энергии”. Функция $U(v_0)$ периодична с периодом $\pi/(gL)$ в силу остаточной калибровочной инвариантности относительно подстановки (11) и стремится к бесконечности при $v_0 \rightarrow \pi l/(gL)$. Минимуму H_0 соответствует такая неопределенность значения v_0 , при которой особые точки $v_0 = \pi l/(gL)$ фактически исключаются. При этом минимальное значение H_0 практически совпадает с минимумом “потенциальной энергии”, так как $V \rightarrow \infty$.

Видно, что ультрафиолетовая регуляризация играет существенную роль при рассмотрении квантовой теории. Поэтому в следующих разделах мы опишем, как ввести ультрафиолетовую регуляризацию, не нарушая исходной калибровочной инвариантности, причем сделаем это для произвольной калибровочной группы $U(N)$.

4. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ДЕЙСТВИЕ НА ПОПЕРЕЧНОЙ РЕШЕТКЕ

Введем сначала частичную калибровочно-инвариантную ультрафиолетовую регуляризацию с помощью пространственной решетки по поперечным координатам x^1, x^2 . При этом выберем переменные так, чтобы действие оказалось по ним полиномиальным [13]. Кроме того, мы используем описанную во введении калибровочно-инвариантную регуляризацию “б” сингулярностей при $p_- \rightarrow 0$ и калибровочно-инвариантное ультрафиолетовое обрезание по модам ковариантной производной D_- . После этого регуляризация становится полной. Для простоты рассматривается $U(N)$ -теория одних лишь

Рис. 1

векторных калибровочных полей, хотя обобщение на $SU(N)$ -теорию или теорию с фермионами не представляет особого труда.

Компоненты калибровочного поля вдоль непрерывных координат x^+ , x^- рассматриваются обычным образом, и мы их относим к узлам поперечной решетки. Компоненты поля вдоль поперечных координат описываются комплексными $(N \times N)$ -матрицами $M_k(x)$, $k = 1, 2$, которые отнесены к ребрам решетки. Эти матрицы не подчинены условиям унитарности, что и позволяет сделать действие полиномиальным. Матрица $M_k(x)$ относится к ребру, соединяющему узлы $x - e_k$ и x , и соответствует положительному направлению (вдоль оси x^k), вектор e_k связывает соседние узлы решетки, он направлен вдоль оси x^k и $|e_k| = a$ (см. рис. 1). Матрица $M_k^+(x)$ относится к тому же самому ребру, но соответствует противоположному направлению (см. рис. 2).

Рис. 2

Элементы этих матриц рассматриваются как независимые переменные. Любому замкнутому направленному циклу по ребрам решетки можно сопоставить след произведения матриц $M_k(x)$, расположенных на этих ребрах, упорядочив матрицы в согласии с последовательностью ребер в цикле справа налево. Например, выражение $\text{Tr}\{M_2(x) \times M_1(x - e_2)M_2^+(x - e_1)M_1^+(x)\}$ соответствует циклу, показанному на рис. 3. Отметим, что цикл, состоящий из одного и того же ребра, пройденного в противоположных направлениях, не отвечает единице, так как матрицы не унитарны (см. рис. 4).

Калибровочные преобразования, осуществляемые унитарными матрицами $U(x)$, действуют на продольные компоненты поля как обычно (локально), а на матрицы M и M^+ следующим образом:

$$\begin{aligned} M_k(x) &\rightarrow M'_k(x) = U(x)M_k(x)U^+(x - e_k), \\ M_k^+(x) &\rightarrow M'^+_k(x) = U(x - e_k)M_k^+(x)U^+(x). \end{aligned}$$

Всякий след матрицы, отвечающей циклу (типа показанного на рис. 3, 4), инвариантен относительно этих преобразований. Чтобы установить связь матричных переменных M_k с обычными калибровочными полями, запишем эти переменные в виде

$$M_k(x) = I + gaB_k(x) + i gaA_k(x), \quad B_k^+ = B_k, \quad A_k^+ = A_k.$$

Рис. 3

Тогда в пределе $a \rightarrow 0$ поля $A_k(x)$ совпадают с поперечными компонентами калибровочного поля, а $B_k(x)$ оказываются добавочными (нефизическими) полями, которые должны отключаться в этом пределе. Ниже указано, как этого можно добиться.

Рис. 4

Аналогом тензора напряженности калибровочного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu],$$

умноженного на i , являются величины

$$\begin{aligned} G_{+-} &= iF_{+-}, \quad F_{+-}(x) = \partial_+ A_-(x) - \partial_- A_+(x) - ig[A_+(x), A_-(x)], \\ G_{\pm k}(x) &= \frac{1}{ga} [\partial_\pm M_k(x) - ig(A_\pm(x)M_k(x) - M_k(x)A_\pm(x - e_k))], \\ G_{12}(x) &= -\frac{1}{ga^2} [M_1(x)M_2(x - e_1) - M_2(x)M_1(x - e_2)]. \end{aligned} \quad (40)$$

При калибровочных преобразованиях они изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{+-}(x) &\rightarrow G'_{+-}(x) = U(x)G_{+-}(x)U^+(x), \\ G_{\pm k}(x) &\rightarrow G'_{\pm k}(x) = U(x)G_{\pm k}(x)U^+(x - e_k), \\ G_{12}(x) &\rightarrow G'_{12}(x) = U(x)G_{12}(x)U^+(x - e_1 - e_2). \end{aligned} \quad (41)$$

Рассматривается простейшая калибровочно-инвариантная форма действия, сводящаяся к обычной в пределе “наивного” перехода к непрерывному пространству:

$$S = a^2 \sum_{x^\perp} \int dx^+ \int_{-L}^L dx^- \operatorname{Tr} \left[G_{+-}^+ G_{+-} + \right. \\ \left. + \sum_k (G_{+k}^+ G_{-k} + G_{-k}^+ G_{+k}) - G_{12}^+ G_{12} \right] + S_m, \quad (42)$$

где дополнительный член S_m должен обеспечивать бесконечную массу полю B_k в пределе $a \rightarrow 0$:

$$S_m = -\frac{m^2(a)}{4g^2} \sum_{x^\perp} \int dx^+ \int_{-L}^L dx^- \sum_k \operatorname{Tr} [(M_k^+(x) M_k(x) - I)^2] \xrightarrow{a \rightarrow 0} \\ \xrightarrow{a \rightarrow 0} -m^2(a) \int d^2 x^\perp \int dx^+ \int_{-L}^L dx^- \sum_k \operatorname{Tr} (B_k^2), \quad m(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \infty. \quad (43)$$

Предполагается, что это приводит к отключению полей B_k .

5. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ

Выберем калибровочные условия в следующем виде:

$$\partial_- A_- = 0, \quad A_-^{ij}(x) = \delta^{ij} v^j(x^\perp, x^+). \quad (44)$$

Далее аргумент величин, не зависящих от x^- , для простоты также обозначается через x . Как уже было отмечено ранее, начав с произвольного поля A_μ^{ij} , периодического по x^- , нельзя выбором калибровки сделать нулевую моду по x^- компоненты поля A_-^{ij} равной нулю, не нарушая периодичности, но можно привести ее к диагональному виду [8]–[10]. Такой выбор калибровки и описывают условия (44).

Тогда действие (42) принимает вид

$$S = a^2 \sum_{x^\perp} \int dx^+ \int_{-L}^L dx^- \left\{ \sum_i [2F_{+-}^{ii}(x) \partial_+ v^i(x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(ga)^2} \sum_{i,j} \sum_k [D_- M_k^{ij+}(x) \partial_+ M_k^{ij}(x) + \text{э.с.}] + \sum_{i,j} A_+^{ij}(x) Q^{ji}(x) - \mathcal{H}(x) \right\}, \quad (45)$$

где

$$D_- M_k^{ij}(x) \equiv (\partial_- - igv^i(x) + igv^j(x - e_k)) M_k^{ij}(x), \\ D_- M_k^{ij+}(x) \equiv (\partial_- + igv^i(x) - igv^j(x - e_k)) M_k^{ij+}(x), \\ D_- F_{+-}^{ij}(x) \equiv (\partial_- - igv^i(x) + igv^j(x)) F_{+-}^{ij}(x),$$

переменные $A_+^{ij}(x)$ играют роль множителей Лагранжа при связях

$$Q^{ji}(x) \equiv 2D_- F_{+-}^{ji}(x) + \frac{i}{ga^2} \sum_{j'} \sum_k [M_k^{ij' +}(x) D_- M_k^{jj'}(x) - M_k^{j'j +}(x + e_k) D_- M_k^{ji'}(x + e_k)] = 0, \quad (46)$$

а

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} (F_{+-}^{ij} + F_{+-}^{ij} + G_{12}^{ij} + G_{12}^{ij}) + \mathcal{H}_m \quad (47)$$

есть плотность гамильтониана. Член $\mathcal{H}_m$ обычным образом получается из выражения (43).

Величины F_{+-}^{ij} могут быть определены из связей (46), за исключением нулевых мод $F_{+-}^{ii}(0)$, которые не входят в эти связи и являются независимыми переменными. После этого остаются неразрешенными только нулевые моды связей $Q_{(0)}^{ii}(x^\perp, x^+)$, и мы накладываем соответствующие условия на физические состояния:

$$Q_{(0)}^{ii}(x^\perp, x^+) |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0. \quad (48)$$

Чтобы найти набор независимых канонических переменных, напомним фурье-преобразование полей $M_k^{ij}(x)$ по x^- в следующем виде:

$$M_k^{ij}(x) = \frac{g}{\sqrt{4L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \Theta(p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)) M_{nk}^{ij}(x^\perp, x^+) + \Theta(-p_n - gv^i(x) + gv^j(x - e_k)) M_{nk}^{ij+}(x^\perp, x^+) \} \times \\ \times |p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)|^{-1/2} e^{-ip_n x^-}, \quad (49)$$

где

$$\Theta(p) = \begin{cases} 1, & p > 0, \\ 0, & p < 0, \end{cases} \quad p_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из-за выбора калибровки (44) это фурье-преобразование совпадает с разложением по собственным модам оператора D_- , и, следовательно, применяемое нами далее ультрафиолетовое обрезание по модам этого оператора сводится к следующему условию, ограничивающему число членов в бесконечной сумме (49):

$$|p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)| \leq \frac{\pi}{L} \bar{n}, \quad (50)$$

где $\bar{n}$ — целочисленный параметр ультрафиолетового обрезания. Подчеркнем, что такая регуляризация калибровочно-инвариантна.

С точностью до внеинтегральных членов действие переписывается следующим образом:

$$S = a^2 \sum_{x^\perp} \int dx^+ \left\{ \sum_i 4L F_{+-}^{ii}(0) \partial_+ v^i + \frac{i}{a^2} \sum_{i,j} \sum_k \sum_n' M_{nk}^{ij} \partial_+ M_{nk}^{ij} + 2L \sum_i A_{+(0)}^{ii} Q_{(0)}^{ii} - \tilde{\mathcal{H}}(x) \right\}, \quad (51)$$

где $\sum'_n$ означает, что суммирование по n ограничено условием (50), а плотность гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$ отличается от $\mathcal{H}$ подстановкой в (47) суммы

$$F_{+-}^{ij} = (F_{+-}^{ij} - \delta^{ij} F_{+-}^{ii}(0)) + \delta^{ij} F_{+-}^{ii}(0),$$

где выражение $F_{+-}^{ij} - \delta^{ij} F_{+-}^{ii}(0)$ должно быть записано в терминах переменных M_{nk}^{ij} , M_{nk}^{ij+} , v^i путем использования связей (46) и разложения (49). Величины G_{12}^{ij} также должны быть выражены через переменные M_{nk}^{ij} , M_{nk}^{ij+} , v^i . Выпишем набор пар канонически сопряженных переменных: $\{v^i, \Pi^i = 4La^2 F_{+-}^{ii}(0)\}$, $\{M_{nk}^{ij}, iM_{nk}^{ij+}\}$. В квантовой теории эти переменные становятся операторами, удовлетворяющими следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [v^i(x), \Pi^j(x')]_{x+} &= i\delta^{ij}\delta_{x^\perp, x'^\perp}, \\ [M_{nk}^{ij}(x), M_{n'k'}^{ij'+}(x')]_{x+} &= \delta^{ii'}\delta^{jj'}\delta_{nn'}\delta_{kk'}\delta_{x^\perp, x'^\perp}; \end{aligned}$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Заметим, что калибровочные условия (44) не фиксируют калибровку полностью. В частности, остается дискретная группа калибровочных преобразований, зависящих от x^- , вида

$$U_n^{ij}(x) = \delta^{ij} \exp\left\{i\frac{\pi}{L}n^i(x^\perp)x^-\right\}, \quad (52)$$

где $n^i(x^\perp)$ — целые числа (наряду с группой непрерывных калибровочных преобразований, не зависящих от x^-). При преобразованиях (52) канонические переменные изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} v^i(x) &\rightarrow v^i(x) - \frac{\pi}{gL}n^i(x^\perp), \quad \Pi^i \rightarrow \Pi^i, \\ M_{nk}^{ij}(x^\perp) &\rightarrow M_{n'k}^{ij}(x^\perp), \quad n' = n + n^i(x^\perp) - n^j(x^\perp - e_k). \end{aligned} \quad (53)$$

Выпишем выражение для квантового оператора $Q_{(0)}^{ii}(x^\perp, x^+)$, определяющего согласно (48) физическое подпространство состояний. Мы фиксируем порядок операторов так, чтобы классическим выражениям $G_{\mu\nu}^+ G^{\mu\nu}$ всюду отвечали квантовые, упорядоченные по правилу $(G_{\mu\nu}^+ G^{\mu\nu} + G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^+)/2$. Отметим, что при другом способе упорядочения связи не допускают разумного вакуумного решения. В этом случае операторы $Q_{(0)}^{ii}(x^\perp, x^+)$ в терминах канонических переменных имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2LQ_{(0)}^{ii}(x^\perp, x^+) &= -\frac{g}{4a^2} \sum_j \sum_k \sum'_n [\varepsilon(p_n + gv^j(x + e_k) - gv^i(x)) \times \\ &\times (M_{nk}^{ji+}(x + e_k)M_{nk}^{ji}(x + e_k) + M_{nk}^{ji}(x + e_k)M_{nk}^{ji+}(x + e_k)) - \\ &- \varepsilon(p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k))(M_{nk}^{ij+}(x)M_{nk}^{ij}(x) + M_{nk}^{ij}(x)M_{nk}^{ij+}(x))], \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & p > 0, \\ -1, & p < 0. \end{cases}$$

Запишем выражение для светоподобного импульса P_- . Каноническое выражение генератора сдвига по x^-

$$P_-^{\text{can}} = \frac{1}{2} \sum_{x^\perp} \sum_{i,j} \sum_k \sum_n' p_n \varepsilon(p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)) \times \\ \times (M_{nk}^{ij+}(x) M_{nk}^{ij}(x) + M_{nk}^{ij}(x) M_{nk}^{ij+}(x)) \quad (55)$$

можно переписать в калибровочно-инвариантном виде, добавляя член, пропорциональный связи:

$$P_- = \frac{a^2}{2} \sum_{x^\perp} \sum_k \int_{-L}^L dx^- \text{Tr}(G_{-k}^+ G_{-k} + G_{-k} G_{-k}^+) = \\ = P_-^{\text{can}} + 4La^2 \sum_{x^\perp} \sum_i v^i Q_{(0)}^{ii} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{x^\perp} \sum_{i,j} \sum_k \sum_n' |p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)| \times \\ \times (M_{nk}^{ij+}(x) M_{nk}^{ij}(x) + M_{nk}^{ij}(x) M_{nk}^{ij+}(x)) = \\ = \sum_{x^\perp} \sum_{i,j} \sum_k \sum_n' |p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)| \left(M_{nk}^{ij+}(x) M_{nk}^{ij}(x) + \frac{1}{2} \right). \quad (56)$$

Выберем такое представление пространства состояний, в котором динамические переменные $v^i(x)$ являются операторами умножения. Тогда состояния будут нормируемыми функционалами (точнее, функциями, так как $x^\perp$ дискретно) от классических функций $v^i(x)$. Можно определить полное пространство состояний как прямое произведение фоковского пространства, в котором $M_{nk}^{ij+}(x)$ и $M_{nk}^{ij}(x)$ играют роль операторов рождения и уничтожения, и пространства функционалов $F[v]$. Будем называть M -вакуумом состояния вида $|0\rangle \cdot F[v]$, где $|0\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$M_{nk}^{ij}(x)|0\rangle = 0, \quad (57)$$

а F — некоторый функционал. Произвольное состояние можно представить в форме линейной комбинации векторов $|\{m\}; F\rangle$ вида

$$\prod_{x^\perp} \prod_{i,j} \prod_k \prod_n' (M_{nk}^{ij+}(x))^{m_{nk}^{ij}(x)} |0\rangle \cdot F[v] \quad (58)$$

с различными неотрицательными целочисленными функциями $m_{nk}^{ij}(x^\perp)$ и функционалами F . При желании можно задать полный ортонормированный набор таких функционалов.

Из (56) видно, что состояние, отвечающее минимуму P_- , должно удовлетворять условиям (57), т.е. должно являться M -вакуумом. Среднее значение P_- по такому состоянию можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle 0; F | P_- | 0; F \rangle = \frac{1}{2} \int \prod_{x^\perp} \prod_i dv^i(x) \times \\ \times \sum_{x^\perp} \sum_{i,j} \sum_k \sum'_n |p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)| |F[v]|^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Напомним, что здесь $\sum'_n$ означает ограничение суммирования по n условием (50). Используя это ограничение и сдвигая индекс суммирования n на целую часть величины $gL(v^i(x) - v^j(x - e_k))/\pi$, можно показать, что в суммах по n зависимость от v^i сокращается и выражение (59) не зависит от $F[v]$, если этот функционал нормирован на единицу. Таким образом, светоподобный импульс P_- имеет минимум на всех M -вакуумах. Вычитая из P_- соответствующую константу, можно добиться того, чтобы на таких состояниях оператор светоподобного импульса обращался в нуль.

Легко видеть, что все M -вакуумы оказываются физическими состояниями, т.е. удовлетворяют условиям связи (48). В самом деле, из (54) находим, что на таких состояниях условия связи имеют вид

$$\sum_j \sum_k \sum'_n [\varepsilon(p_n + gv^j(x + e_k) - gv^i(x)) - \varepsilon(p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k))] F[v] = 0 \quad (60)$$

и выполняются для любого $F[v]$, так как для каждого ребра в сумме (60) число положительных и отрицательных значений ε -функций одинаково. Для произвольных базисных векторов (58) аналогичные условия связи имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k \sum'_n [\varepsilon(p_n + gv^j(x + e_k) - gv^i(x)) m_{nk}^{ij}(x + e_k) - \\ - \varepsilon(p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)) m_{nk}^{ij}(x)] F[v] = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Собственные значения p_- оператора P_- должны находиться из уравнения

$$\sum_{x^\perp} \sum_{i,j} \sum_k \sum'_n |p_n + gv^i(x) - gv^j(x - e_k)| m_{nk}^{ij}(x) F[v] = p_- F[v] \quad (62)$$

с учетом требования нормируемости функционала $F[v]$.

Чтобы определить физический вакуум, надо рассматривать не только состояния, отвечающие минимуму оператора P_- , но и находить минимум гамильтониана P_+ . Можно попытаться это сделать, минимизируя гамильтониан на M -вакуумах, отвечающих минимуму оператора P_- . Выражение $\langle 0 | P_+ | 0 \rangle$, где $|0\rangle$ — фоковский вакуум по отношению к операторам M_{nk} , M_{nk}^+ , зависит от функций $v^i(x)$, которые входят, в частности, в нормальные свертки операторов $M_k(x)$, $M_k^+(x)$, и от операторов $\Pi^i(x)$, канонически

сопряженных к переменным $v^i(x)$. Нужно минимизировать среднее значение этого выражения на пространстве функционалов $F[v]$. Результирующий функционал $F[v]$ должен быстро убывать вблизи тех значений $v^i(x)$, при которых оператор D_- имеет нулевое собственное значение, так как при этом гамильтониан сингулярен (это, например, видно из разложения (49)).

Построенный таким образом вакуум сильно отличается от вакуума теории в непрерывном пространстве, поскольку в построенном вакууме равны нулю не средние значения операторов $(M_k - I)/(ga) = B_k + iA_k$, связанных с обычным калибровочным полем, а средние значения операторов M_k . При этом трудно выполнить и условие унитарности матриц M_k в пределе непрерывного пространства (или эквивалентное условие отключения нефизических полей B_k). Причина такого несоответствия в отсутствии явной лоренц-инвариантности данной формулировки теории, вследствие чего квантовые состояния, отвечающие минимумам операторов P_+ и P_- , могут не совпадать. Вопрос состоит в том, можно ли так определить переход к непрерывному пространству, чтобы указанные состояния стремились друг к другу хотя бы в этом пределе. Данная проблема требует дополнительного исследования.

Рассмотренное выше квантование на СФ может помочь усовершенствовать эффективные низкоэнергетические модели, основанные на аналогичном формализме (но в существующих вариантах не учитывающие нулевых мод и не использующие калибровочно-инвариантной регуляризации ультрафиолетовых расходимостей по p_-). Такие модели описаны, например, в статьях [15], где использована идея работ [20].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с помощью решеточного формализма осуществлена калибровочно-инвариантная регуляризация теории поля на СФ в рамках гамильтонова подхода. Это сделано без использования теории возмущений, что не удавалось ранее. Однако возникли существенные трудности, обусловленные нарушением явной лоренц-инвариантности и наличием нефизических полей, требующих отключения в пределе снятия регуляризации. В настоящее время неясно, в какой мере удастся преодолеть эти трудности в случае обычной калибровочной теории. Независимо от этого данный подход может применяться для формулировки полуфеноменологических низкоэнергетических калибровочно-инвариантных моделей.

Благодарности. Работа С. А. Пастона поддержана Администрацией Санкт-Петербурга и Министерством образования России (грант № PD03-1.2-35). Авторы выражают благодарность региональному бюро ЮНЕСКО по научному сотрудничеству в Европе за поддержку Международной школы физики им. В. А. Фока.

Список литературы

- [1] *P. A. M. Dirac.* Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.
- [2] *S.-J. Chang, R. G. Root, T.-M. Yan.* Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 1133; *F. Lenz, M. Thies, S. Levit, K. Yazaki.* Ann. Phys. 1991. V. 208. P. 1.

- [3] *E. B. Prokhvatilov, V. A. Franke.* ЯФ. 1989. Т. 49. № 4. С. 1109; 1996. Т. 59. № 11. С. 2105; *E. V. Prokhvatilov, H. W. L. Naus, H.-J. Pirner.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2933; hep-ph/9406275.
- [4] *M. Burkardt, A. Langnau.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1187; P. 3857; *M. Burkardt.* Adv. Nucl. Phys. 1996. V. 23. P. 1.
- [5] *C. A. Paston, V. A. Franke.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 399; hep-th/9901110; *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2002. V. 108. № 1–3. P. 189; hep-th/0111009.
- [6] *C. A. Paston, E. B. Prokhvatilov, V. A. Franke.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 3. С. 417; hep-th/0002062; 2002. Т. 131. № 1. С. 84; hep-th/0302016; *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke.* QED₂ light-front Hamiltonian reproducing all orders of covariant chiral perturbative theory. hep-th/9910114; On the construction of corrected light-front Hamiltonian for QED₂. hep-th/0011224.
- [7] *S. J. Brodsky, G. McCartor, H. C. Pauli, S. S. Pinsky.* Part. World. 1993. V. 3. P. 109.
- [8] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov.* Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 239.
- [9] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov.* Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 437.
- [10] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov.* Light-cone quantization of gauge theories with periodic boundary conditions. In: Dynamical Systems and Microphysics (Geometry and Mechanics). Eds. A. Avez, A. Blaquiere, A. Mazzollo. New York: Academic, 1982. P. 389.
- [11] *K. G. Wilson.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
- [12] *M. B. Halpern.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1993. V. 111. P. 163.
- [13] *W. A. Bardeen, R. B. Pearson.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 547; *W. A. Bardeen, R. B. Pearson, E. Rabinovici.* Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1037; *V. A. Franke, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov.* Lattice gauge theories with polynomial action and their canonical formulation on the light front. hep-th/9803035.
- [14] *A. A. Andrianov, L. Bonora.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 233. P. 232; P. 247; *A. A. Andrianov, Yu. V. Novozhilov.* Phys. Lett. B. 1985. V. 153. P. 422.
- [15] *S. Dalley, B. van de Sande.* Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 7917; hep-ph/9704408; 1999. V. 59. P. 065008; hep-th/9806231; 2000. V. 62. P. 014507; hep-lat/9911035; 2003. V. 67. P. 114507; hep-ph/0212086.
- [16] *Ю. В. Новожиллов, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке.* Вестн. ЛГУ. 1981. № 22. С. 13.
- [17] *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
- [18] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [19] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [20] *H.-J. Pirner.* Progr. Part. Nucl. Phys. 1992. V. 29. P. 33; *G. Mack.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 235. P. 197.