Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов, Квантовая гидродинамика систем частиц с кулоновским взаимодействием и квантовый потенциал Бома, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 287–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:59:49

© 1999 г.

Л. С. Кузьменков*, С. Г. Максимов*

КВАНТОВАЯ ГИДРОДИНАМИКА СИСТЕМ ЧАСТИЦ С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И КВАНТОВЫЙ ПОТЕНЦИАЛ БОМА

Показано, что квантовая динамика систем частиц с кулоновским взаимодействием во внешнем электромагнитном поле может быть представлена в виде полевых уравнений микроскопической динамики в физическом пространстве. Уравнения макроскопической гидродинамики получены путем локального усреднения. Квантовые поправки в уравнениях гидродинамики обусловлены многочастичным квантовым потенциалом Бома. Исследованы особенности гидродинамики ферми- и бозе-систем. При обычных для классической гидродинамики предположениях найдены интеграл типа Коши для квантовой системы и соответствующее одночастичное уравнение Шредингера.

Классическая динамика N взаимодействующих частиц может быть представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений движения в конфигурационном пространстве $3N$ измерений, в $6N$ -мерном фазовом пространстве, а также системой уравнений в частных производных в 3-мерном физическом пространстве как динамика микроскопических сингулярных материальных полей [1–3]. Отображение динамики траекторий в динамику полей и обратно осуществляется с помощью определения точечных частиц как δ -распределений [4], содержащих пространственные координаты и время в качестве независимых переменных. В новой, полевой формулировке динамики задача сокращенного описания динамических систем на *макромасштабах* решается с помощью общепринятой в классической электродинамике и гидродинамике операции сглаживания микроскопических распределений [5, с. 93–96; 1–3].

Переход к квантово-механическому описанию осуществляется заменой динамических функций эрмитовыми операторами. При этом размерность конфигурационного пространства сохраняется и состояние системы полностью определяется заданием волновой функции в пространстве $3N$ измерений. Поскольку физические характеристики системы заряженных частиц (плотность заряда, макроскопическое поле и т.п.) определены в окрестности каждой точки физического пространства, аналогичная программа перехода к полевому описанию динамики системы N частиц должна быть реализована и на

---

*Московский государственный университет, Москва, Россия

базе уравнения Шредингера. Эта программа предполагает решение двух задач: получение точных микроскопических уравнений динамики квантовой системы в физическом пространстве и переход к макроскопическим полям. Последняя задача решается так же, как и в классической динамике, т.е. путем сглаживания микроскопических функций в окрестности каждой точки пространства и времени, поскольку она непосредственно не связана с особенностями квантово-механического описания.

Между тем проблема эквивалентного описания динамики системы N частиц в 3-мерном пространстве имеет, очевидно, и самостоятельный интерес, поскольку временные последовательности событий реализуются именно в физическом, а не в абстрактном конфигурационном пространстве (о физических аспектах этой проблемы см. [6]).

С конфигурационным пространством тесно связаны квазиклассическое приближение и интерпретация фазы волновой функции $\psi = a \exp(iS/\hbar)$ как классического действия в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Однако в этом пределе в соответствии с методом Гамильтона–Якоби $S = S(\mathbf{r}(t), t)$. Поскольку такая зависимость от времени никак не связана со значением $\hbar$, из уравнения Шредингера в этом случае вытекало бы лишь равенство нулю полной производной по времени $a^2(\mathbf{r}, t)$, а не уравнения непрерывности, как это в действительности следует из уравнения Шредингера для одной частицы. Поэтому функция $S(\mathbf{r}, t)$ независимых переменных $\mathbf{r}$ и t имеет смысл скорее потенциала поля скоростей в “гидродинамике” частицы, чем механического действия. Тогда, как это непосредственно видно из уравнения для $S(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{(\nabla S(\mathbf{r}, t))^2}{2m} + U(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a(\mathbf{r}, t)}{a(\mathbf{r}, t)} = 0, \quad (1)$$

полевую интерпретацию должен иметь и квантовый потенциал Бома [7–11]

$$W = -\hbar^2 \Delta a(\mathbf{r}, t) / 2ma(\mathbf{r}, t)$$

Таким образом, в качестве альтернативы квазиклассическому приближению представлял бы интерес квазиклассический гидродинамический предел.

Гидродинамическая модель была предложена Маделунгом в 1926 г. [12], который интерпретировал $a^2(\mathbf{r}, t)$ как плотность непрерывной жидкости, имеющей потоковую скорость $\mathbf{v} = \nabla S/m$. Такая жидкость следует только регулярному (потенциальному) движению. Таким образом, уравнение (1) определяет изменение потенциала скорости S со временем под действием классического и квантового потенциалов.

При переходе к описанию квантово-механической системы при помощи функций, определенных в физическом пространстве, из уравнения Шредингера как из классических уравнений движения должны следовать не только уравнение непрерывности, но и уравнения баланса энергии и импульса. Ниже будет показано, что при переходе к описанию в физическом пространстве, как и в классической теории, квантовая динамика системы многих частиц приводит к уравнениям, которые по форме в основном совпадают с уравнениями классической гидродинамики.

1. Постановка задачи. Рассмотрим квантово-механическую систему N частиц с произвольными массами и зарядами, взаимодействующих между собой по закону Кулона и находящихся во внешнем классическом электромагнитном поле. Пренебрежем спиновыми взаимодействиями частиц. Микроскопическая плотность числа частиц такой системы определяется формулой [13]

$$n(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi^*(R, t) \psi(R, t), \quad (2)$$

где $R = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$,

$$dR = \prod_{k=1}^N d\mathbf{r}_k.$$

Волновые функции удовлетворяют уравнению Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2m_i} \left(\hat{\mathbf{p}}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 + e_i \varphi_i \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N e_i e_j G_{ij}, \quad (3)$$

где $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$, $\varphi_i = \varphi(\mathbf{r}_i, t)$ – потенциалы электромагнитного поля и $G_{ij} = G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$.

Пусть $X(\mathbf{r}, t)$ – микроскопическая плотность некоторой динамической величины. Тогда ее макроскопическое значение определяется формулой

$$\langle X \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta_r} \int_{\Delta_r} d\boldsymbol{\xi} X(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t), \quad (4)$$

где Δ_r – окрестность точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, форма и объем которой не зависят от $\mathbf{r}$.

2. Уравнение непрерывности. Массовую плотность $\rho_m(\mathbf{r}, t)$ и зарядовую плотность $\rho_e(\mathbf{r}, t)$ можно рассматривать как средние от соответствующих операторов, ядра которых в координатном представлении имеют вид

$$\left\{ \begin{matrix} \rho_e \\ \rho_m \end{matrix} \right\}(\mathbf{r}; R, R') = \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{matrix} e_i \\ m_i \end{matrix} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(R - R'). \quad (5)$$

Как следствие уравнения Шредингера получаем хорошо известный результат

$$\frac{\partial \rho_{e,m}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_{e,m}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (6)$$

причем ядра операторов плотности электрического тока и плотности импульса равны

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{j}_e \\ \mathbf{j}_m \end{matrix} \right\}(\mathbf{r}; R, R', t) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{matrix} e_i \\ m_i \end{matrix} \right\} \frac{1}{2m_i} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{D}_i \delta(R - R') + \\ &\quad + \mathbf{D}_i (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(R - R')) \}, \\ \mathbf{D}_i &= \frac{\hbar}{i} \nabla_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}_i. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Уравнение баланса импульса. Из уравнения Шредингера имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{j}_m}{\partial t} &= \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2i\hbar} \left\{ \psi^* \mathbf{D}_i (\hat{H}\psi) - (\hat{H}\psi)^* \mathbf{D}_i \psi + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{D}_i^* \psi^* (\hat{H}\psi) - \mathbf{D}_i^* (\hat{H}\psi)^* \psi - 2i\hbar \frac{e_i}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} \psi^* \psi \right\} = \\
&= \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{2i\hbar} \sum_{k=1}^N \left\{ \psi^* \mathbf{D}_i \frac{\mathbf{D}_k^2}{2m_k} \psi - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\mathbf{D}_k^*)^2}{2m_k} \psi^* \mathbf{D}_i \psi + \mathbf{D}_i^* \psi^* \frac{\mathbf{D}_k^2}{2m_k} \psi - \mathbf{D}_i^* \frac{(\mathbf{D}_k^*)^2}{2m_k} \psi^* \psi + \right. \\
&\quad \left. + \psi^* [\mathbf{D}_i, \varphi_k] \psi - [\mathbf{D}_i^*, \varphi_k] \psi^* \psi \right\} - \\
&\quad - \int dR \sum'_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) e_i e_j \nabla_i G_{ij} \psi^* \psi - \frac{1}{c} \varrho_e(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
\left[D_{i\alpha} \frac{\mathbf{D}_k^2}{2m_k} \right] \psi &= \frac{1}{2m_i} \delta_{ik} \frac{e_i}{c} \frac{\hbar}{i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x_i^\beta} - \frac{\partial A_{i\beta}}{\partial x_i^\alpha} \right) D_{i\beta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i^\beta} \left(\frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x_i^\beta} - \frac{\partial A_{i\beta}}{\partial x_i^\alpha} \right) \right\} \psi, \\
[\mathbf{D}_i, \varphi_k] \psi &= \delta_{ik} \frac{\hbar}{i} (\nabla_i \varphi_i) \psi,
\end{aligned}$$

и соответствующими коммутаторами для $\mathbf{D}_i^*$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial j_m^\alpha}{\partial t} &= - \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m} \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k^\beta} \left\{ \psi^* D_{i\beta} D_{i\alpha} \psi + \right. \\
&\quad \left. + D_{i\beta}^* \psi^* D_{i\alpha} \psi + D_{i\alpha}^* \psi^* D_{i\beta} \psi + D_{i\beta}^* D_{i\alpha}^* \psi^* \psi \right\} + \\
&\quad + E_\alpha^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \varrho_e(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_e^\beta B_\gamma^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) - \\
&\quad - \int dR \sum'_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) e_i e_j \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \psi^* \psi,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ — напряженности внешнего электромагнитного поля. Последний интеграл в правой части уравнения (8) при $k \neq i$ преобразуется в интеграл по поверхности Γ , ограничивающей систему, и обращается в нуль.

При $k = i$ интеграл сводится к дивергенции от тензора плотности потока импульса $\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} \Big\{ & \psi^*(R, t) D_{i\beta} D_{i\alpha} \psi(R, t) + \\ & + D_{i\beta}^* \psi^*(R, t) D_{i\alpha} \psi(R, t) + D_{i\alpha}^* \psi^*(R, t) D_{i\beta} \psi(R, t) - \\ & - D_{i\beta}^* D_{i\alpha} \psi^*(R, t) \psi(R, t) \Big\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, приходим к уравнению баланса импульса

$$\frac{\partial j_m^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \varrho_e E_\alpha^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_e^\beta B_\gamma^{\text{ext}} + \mathcal{F}_\alpha. \quad (10)$$

Легко показать, что тензор $\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ симметричный.

Последнее слагаемое в правой части уравнения (10) есть микроскопическая плотность силы взаимодействия в точке $\mathbf{r}$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = - \int dR \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) e_i e_j \nabla_i G_{ij} \psi^*(R, t) \psi(R, t). \quad (11)$$

4. Уравнение баланса энергии. Плотность внутренней энергии системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{E}_{\text{кин}}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}_{\text{потенц}}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} \{ \psi^*(R, t) \mathbf{D}_i^2 \psi(R, t) + (\mathbf{D}_i^*)^2 \psi^*(R, t) \psi(R, t) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int dR \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) e_i e_j G_{ij} \psi^*(R, t) \psi(R, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Интеграл по всему объему от плотности энергии дает полную энергию системы

$$\int \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int dR \psi^*(R, t) \hat{H} \psi(R, t).$$

На основании (12) из уравнения Шредингера приходим к уравнению баланса энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \mathbf{Q} = \mathbf{j}_e \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{A}(\mathbf{r}, t), \quad (13)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ – плотность потока энергии. Соответственно плотность потока кинетической и плотность потока потенциальной энергий имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{кин}}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{8} \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{1}{m_i^2} \{ \psi^*(R, t) \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i^2 \psi(R, t) + \\ & + \mathbf{D}_i^* \psi^*(R, t) \mathbf{D}_i^2 \psi(R, t) + (\mathbf{D}_i^*)^2 \psi^*(R, t) \mathbf{D}_i \psi(R, t) + \\ & + \mathbf{D}_i^* (\mathbf{D}_i^*)^2 \psi^*(R, t) \psi(R, t) \}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{потенц}}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4} \int dR \sum_{i,j=1}^N e_i e_j G_{ij} \frac{1}{m_i} \{ \psi^*(R, t) \mathbf{D}_i \psi(R, t) + \\ & + \mathbf{D}_i^* \psi^*(R, t) \psi(R, t) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения баланса энергии (13) есть микроскопическая плотность работы, совершаемой всеми частицами системы над частицами в окрестности точки $\mathbf{r}$ в единицу времени:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{4} \int dR \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) e_i e_j \nabla_i G_{ij} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{m_i} (\psi^*(R, t) \mathbf{D}_i \psi(R, t) + \mathbf{D}_i^* \psi^*(R, t) \psi(R, t)) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{m_j} (\psi^*(R, t) \mathbf{D}_j \psi(R, t) + \mathbf{D}_j^* \psi^*(R, t) \psi(R, t)) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученные уравнения (6), (10) и (13) представляют собой точные микроскопические уравнения квантовой гидродинамики, являющиеся следствиями уравнения Шредингера. Мы видим, что для системы частиц с различными зарядами и массами уравнения баланса не отличаются по форме от аналогичных уравнений классической микроскопической гидродинамики систем заряженных частиц [2]. Отличие сводится к разным определениям полевых динамических функций, таких как (5), (7), (12) и т.п.

5. Макроскопические уравнения квантовой гидродинамики. Для усредненного описания динамики системы N частиц применим процедуру сглаживания (4). Уравнения (6), (10) и (13) при этом приобретут вид

$$\frac{\partial \langle \varrho_{e,m} \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \mathbf{j}_{e,m} \rangle = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \langle j_m^\alpha \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \Pi_{\alpha\beta} \rangle}{\partial x^\beta} = \langle \varrho_e E_\alpha^{\text{ext}} \rangle + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle j_e^\beta B_\gamma^{\text{ext}} \rangle + \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \langle \mathcal{E} \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \mathbf{Q} \rangle = \langle \mathbf{j}_e \mathbf{E}^{\text{ext}} \rangle + \langle \mathcal{A} \rangle. \quad (19)$$

Уравнения (17)–(19) составляют основу пятимоментного приближения квантовой гидродинамики. Эти уравнения получены нами для системы кулоновских частиц во внешнем электромагнитном поле. Однако этих уравнений недостаточно для описания динамики поляризации и намагниченности в неоднородных системах [2]. Поэтому найдем уравнения эволюции поляризации для подобных систем.

6. Уравнения эволюции плотности поляризации. Плотность поляризации системы равна

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi^*(R, t) \psi(R, t). \quad (20)$$

Используя тот же метод, что и при получении (6), (10) и (13), из уравнения Шредингера находим следующее представление для микроскопической плотности электрического тока:

$$\frac{\partial P_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \mathfrak{M}_\gamma(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} = j_e^\alpha(\mathbf{r}, t), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\alpha(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4} \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_i^\beta \times \\ & \times e_i \frac{1}{m_i} \{ \psi^*(R, t) D_{i\gamma} \psi(R, t) + D_{i\gamma}^* \psi^*(R, t) \psi(R, t) \} \end{aligned} \quad (22)$$

есть вектор намагниченности. Симметричный тензор второго ранга

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4} \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \\ & \times \left(x_i^\alpha e_i \frac{1}{m_i} \{ \psi^*(R, t) D_{i\beta} \psi(\mathbf{r}, t) + D_{i\beta}^* \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(R, t) \} + \right. \\ & \left. + x_i^\beta e_i \frac{1}{m_i} \{ \psi^*(R, t) D_{i\alpha} \psi(\mathbf{r}, t) + D_{i\alpha}^* \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(R, t) \} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

обусловлен сжимаемостью системы зарядов.

Соответствующие макроскопические величины получаются путем локального усреднения (20), (22) и (23) по формуле (4). Имеем

$$\langle P_\alpha \rangle(\mathbf{r}, t) = x^\alpha \langle \varrho_e \rangle(\mathbf{r}, t) + d_\alpha(\mathbf{r}, t),$$

где

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta_r} \int_{\Delta_r} d\xi \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}_i) \xi e_i \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

— локальная плотность дипольного момента системы. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{M}_\alpha \rangle(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} x^\beta \langle j_e^\gamma \rangle(\mathbf{r}, t) + \mathfrak{m}_\alpha(\mathbf{r}, t), \\ \langle \Omega_{\alpha\beta} \rangle(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \{ x^\alpha \langle j_e^\beta \rangle(\mathbf{r}, t) + x^\beta \langle j_e^\alpha \rangle(\mathbf{r}, t) \} + \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

С учетом усредненного уравнения непрерывности (17) приходим к уравнению для плотности дипольного момента

$$\frac{\partial d_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \mathfrak{m}_\gamma(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} = 0. \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_\alpha &= \frac{1}{\Delta_r} \int_{\Delta_r} d\xi \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}_i) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \xi_i^\beta \times \\ &\times e_i \frac{1}{4m_i} \{ \psi^*(R, t) D_{i\gamma} \psi(R, t) + D_{i\gamma}^* \psi^*(R, t) \psi(R, t) \} \quad (26)\end{aligned}$$

— локальная плотность магнитного момента,

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\Delta_r} \int_{\Delta_r} d\xi \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}_i) \frac{1}{4m_i} \times \\ &\times \left(\xi_i^\alpha e_i \{ \psi^*(R, t) D_{i\beta} \psi(\mathbf{r}, t) + D_{i\beta}^* \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(R, t) \} + \right. \\ &\left. + \xi_i^\beta e_i \{ \psi^*(R, t) D_{i\alpha} \psi(\mathbf{r}, t) + D_{i\alpha}^* \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(R, t) \} \right)\end{aligned}$$

— тензор локальных электрических деформаций.

Введенные величины плотности поляризации, намагниченности и тензора электрических деформаций $\Omega_{\alpha\beta}$ зависят от выбора системы координат. Величины d_α , $\mathfrak{m}_\alpha$ и $\omega_{\alpha\beta}$ не зависят от выбора системы координат и поэтому являются полевыми физическими характеристиками. Мы видим, что эволюция локальной плотности дипольного момента определяется ротором намагниченности, а также дивергенцией тензора локальных электрических деформаций. Последний тензор является симметрическим и в окрестности каждой точки может быть приведен к диагональному виду.

7. Роль квантового потенциала Бома в уравнениях квантовой гидродинамики. Согласно трактовке Бома квантовой механики движение электрона происходит под действием как классического потенциала взаимодействия, так и квантового потенциала W . В уравнениях (6), (10) и (13) квантовый потенциал не содержится явно. Это неудобно при переходе к квазиклассическому пределу. Действительно, в этом случае приходилось бы делать квазиклассический переход не в уравнениях баланса, а в определениях самих полевых функций. Поэтому при решении конкретных физических задач

удобно иметь уравнения с выделенными явно слагаемыми, содержащими постоянную Планка $\hbar$. Найдем такие уравнения.

Для этого подставим волновую функцию в экспоненциальном виде в определения основных гидродинамических величин. Тогда все микроскопические полевые величины представляются в виде двух слагаемых. Одно из них содержит $a^2(R, t)$ – плотность вероятности в конфигурационном пространстве – и имеет тот же вид, что и в классической физике [2], если величина

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{m_i} \left(\nabla_i S - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \right)$$

интерпретируется как скорость i -й частицы в электромагнитном поле. В плотность потока импульса (9), плотность кинетической энергии (12) и плотность потока кинетической энергии (14) входят слагаемые порядка $\hbar^2$. Эти слагаемые представляют собой вклад квантового потенциала Бома в уравнения квантовой гидродинамики. В связи с этим удобно ввести обозначения

$$\tilde{X}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} X(\mathbf{r}, t), \quad (27)$$

где $X(\mathbf{r}, t)$ – произвольная гидродинамическая характеристика системы. В результате уравнение баланса импульса принимает вид

$$\frac{\partial j_m^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \varrho_e E_\alpha^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_e^\beta B_\gamma^{\text{ext}} + \mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{\text{Бом}}, \quad (28)$$

где

$$\mathcal{F}^{\text{Бом}}(\mathbf{r}, t) = - \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) \nabla_i \left(- \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta_j a}{a} \right) \quad (29)$$

– плотность силы, вызванной многочастичным квантовым потенциалом Бома.

Уравнение баланса энергии будет иметь вид

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial t} + \nabla \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{j}_e \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{A}^{\text{Бом}}(\mathbf{r}, t), \quad (30)$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\text{Бом}}(\mathbf{r}, t) = & - \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) \times \\ & \times \frac{1}{m_i} \left(\nabla_i S - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \right) \nabla_i \left(- \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta_j a}{a} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

– микроскопическая плотность работы, совершаемой в единицу времени силой, вызванной квантовым потенциалом Бома.

В отличие от уравнений (10) и (13) в уравнениях (28) и (30) в квазиклассическом пределе исчезают лишь слагаемые, содержащие квантовый потенциал Бома. Определения полевых динамических функций $\tilde{X}$ при $\hbar \rightarrow 0$ остаются неизменными.

8. Поле скоростей в уравнениях квантовой гидродинамики. Для определенности рассмотрим систему, состоящую из частиц одного сорта с зарядами $e_i \equiv e$ и массами $m_i \equiv m$. Обобщение на случай многосортной системы не представляет труда. В этом случае вместо массовой и зарядовой плотностей удобно использовать концентрацию частиц (2) (одночастичную плотность вероятности, нормированную на число частиц N): $\varrho_e(\mathbf{r}, t) = en(\mathbf{r}, t)$, $\varrho_m(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)$. Поле скоростей определяется формулой

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{j}_m \\ \mathbf{j}_e \end{matrix} \right\}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \begin{matrix} m \\ e \end{matrix} \right\} n(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Величина $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, R, t) = \mathbf{v}_i(R, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ является квантовым аналогом скорости теплового движения частицы. Выделяя гидродинамическое поле скоростей в уравнениях (6), (10) и (13), приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla(n(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (32)$$

$$mn(\mathbf{r}, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right\} v_\alpha + \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = en(\mathbf{r}, t) E_\alpha^{\text{ext}} + \frac{e}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta B_\gamma^{\text{ext}} - \\ - e^2 \int d\mathbf{r}' \nabla_\alpha G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \quad (33)$$

здесь

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int dR \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \quad (34)$$

— микроскопическая двухчастичная плотность вероятности (нормированная на $N(N-1)$),

$$p_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) \left\{ m u_{i\alpha} u_{i\beta} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x_i^\alpha \partial x_i^\beta} \right\} \quad (35)$$

— тензор кинетического давления.

В определение тензора кинетического давления вошло слагаемое порядка $\hbar^2$, возникшее как следствие квантового потенциала Бома. Отсюда видно, что квантовый потенциал допускает интерпретацию как дополнительное квантовое давление.

С учетом уравнений (32) и (33) находим

$$n \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right\} \epsilon + p_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} + \nabla \mathbf{q} = \\ = - \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{r}' (\mathbf{v}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + \alpha, \quad (36)$$

где

$$n(\mathbf{r}, t)\epsilon(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) \left(\frac{m\mathbf{u}_i^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_i a}{a} \right) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \quad (37)$$

$\epsilon(\mathbf{r}, t)$ — удельная “тепловая” энергия частиц, включающая в себя также плотность потенциальной энергии взаимодействия частиц,

$$q_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a^2(R, t) \left\{ u_{i\alpha} \left(\frac{m\mathbf{u}_i^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_i a}{a} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \left(u_{i\beta} \frac{\partial \ln a}{\partial x_i^\beta} \right) - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2 u_i^\beta}{\partial x_i^\alpha \partial x_i^\beta} \right\} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int dR \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) u_{i\alpha} \quad (38)$$

— плотность потока тепловой энергии, а последнее слагаемое

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int dR \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \times \times \{ \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, R, t) + \mathbf{u}_j(\mathbf{r}', R, t) \} \quad (39)$$

определяет работу парного взаимодействия при тепловом движении частиц.

Уравнение (36) представляет собой уравнение квантовой термодинамики сильно неравновесных процессов. Оно должно рассматриваться совместно с уравнением непрерывности (32) и уравнением для поля скоростей (33).

Выражения (35) и (37) для тензора кинетического давления и удельной тепловой энергии частиц позволяют установить связь между этими величинами (получить уравнение состояния для идеального газа). Для идеального газа $p_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} p$. Тогда легко получить, что

$$p = \frac{2}{3} n \epsilon_{\text{кин}} + \frac{\hbar^2}{12m} \Delta n. \quad (40)$$

При формальном предельном переходе $\hbar \rightarrow 0$ уравнение (40) переходит в классическое соотношение между кинетическим давлением и удельной тепловой кинетической энергией.

9. Гидродинамика стационарных потоков бозонов и фермионов. Так как волновая функция $\psi(R, t)$ автоматически учитывает статистику, уравнения (6), (10), (13), (32), (33) и (36) имеют один тот же вид как для фермионов, так и для бозонов. Отличие гидродинамики ферми- и бозе-жидкостей сводится к различным выражениям для полевых величин, характеризующих в уравнениях гидродинамики взаимодействие частиц. Установим это отличие, вызванное симметрией (антисимметрией) волновой функции, в предположении, что система находится в стационарном состоянии. В этом случае внешнее электромагнитное поле должно быть стационарным, а частные производные по времени в уравнениях квантовой гидродинамики обращаются в нуль.

Допустим, как и в методе Хартри–Фока [14], что систему можно описать одним симметричным (антисимметричным) произведением одночастичных волновых функций, другими словами, состояние системы аппроксимируется волновым вектором в пространстве чисел заполнения $|n_1, n_2, \dots\rangle$. В этом случае как для бозонов, так и для фермионов получаем

$$n(\mathbf{r}) = \sum_f n_f \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}), \quad (41)$$

$$mn(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_f n_f \{ \varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D} \varphi_f(\mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}) \}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4m} \sum_f n_f \{ & \varphi_f^*(\mathbf{r}) D_\beta D_\alpha \varphi_f(\mathbf{r}) + D_\beta^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) D_\alpha \varphi_f(\mathbf{r}) + \\ & + D_\alpha^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) D_\beta \varphi_f(\mathbf{r}) + D_\beta^* D_\alpha^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}) \}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mathcal{E}_{\text{кин}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4m} \sum_f n_f \{ \varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D}^2 \varphi_f(\mathbf{r}) + (\mathbf{D}^*)^2 \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}) \}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{кин}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8m^2} \sum_f n_f \{ & \varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D} \mathbf{D}^2 \varphi_f(\mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D}^2 \varphi_f(\mathbf{r}) + \\ & + (\mathbf{D}^*)^2 \varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D} \varphi_f(\mathbf{r}) + \mathbf{D}^* (\mathbf{D}^*)^2 \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}) \}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\mathbf{D} = \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Рассмотрим выражение для плотности силы парного взаимодействия частиц (33)

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = - \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (46)$$

где с учетом симметрии (антисимметрии) волновых функций двухчастичная плотность вероятности имеет вид

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = N(N-1) \int dR_{N-2} \langle n_1, n_2, \dots | \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} \rangle \times \\ \times \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} | n_1, n_2, \dots \rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$dR_{N-2} = \prod_{k=3}^N d\mathbf{r}_k.$$

Воспользуемся известными формулами разложения волновой функции $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} | n_1, n_2 \dots \rangle$ [14]. В случае бозонов имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} | n_1, n_2 \dots \rangle &= \sum_f \sqrt{\frac{n_f}{N}} \langle \mathbf{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}', R_{N-2} | n_1, \dots, (n_f - 1), \dots \rangle = \\ &= \sum_f \sum_{f', f' \neq f} \sqrt{\frac{n_f}{N}} \sqrt{\frac{n_{f'}}{N-1}} \langle \mathbf{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}' | f' \rangle \times \\ &\quad \times \langle R_{N-2} | n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots \rangle + \\ &\quad + \sum_f \sqrt{\frac{n_f(n_f - 1)}{N(N-1)}} \langle \mathbf{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}' | f \rangle \times \\ &\quad \times \langle R_{N-2} | n_1, \dots, (n_f - 2), \dots \rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь $\langle \mathbf{r} | f \rangle = \varphi_f(\mathbf{r})$ — одночастичные волновые функции. Тогда с учетом того, что

$$\begin{aligned} \langle n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots | n_1, \dots, (n_{q'} - 1), \dots, (n_q - 1), \dots \rangle = \\ = \delta(f - q) \delta(f' - q') + \delta(f - q') \delta(f' - q) \end{aligned}$$

и

$$\langle n_1, \dots, (n_f - 2), \dots | n_1, \dots, (n_q - 2), \dots \rangle = \delta(f - q),$$

получаем для двухчастичной плотности вероятности

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{f, f'} n_f n_{f'} |\varphi_f(\mathbf{r})|^2 |\varphi_{f'}(\mathbf{r}')|^2 - \sum_f n_f (n_f + 1) |\varphi_f(\mathbf{r})|^2 |\varphi_f(\mathbf{r}')|^2 + \\ &\quad + \sum_{f, f'} n_f n_{f'} \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}') \varphi_{f'}^*(\mathbf{r}') \varphi_{f'}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Таким образом, для бозонов имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^B(\mathbf{r}) &= - \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_f n_f (n_f + 1) |\varphi_f(\mathbf{r})|^2 |\varphi_f(\mathbf{r}')|^2 - |\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_f n_f \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}') \quad (50)$$

— одночастичная матрица плотности.

Первым слагаемым в (49) представлено взаимодействие через самосогласованное поле Хартри–Власова.

Для фермионов имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} | n_1, n_2 \dots \rangle = \\ = \sum_f \sum_{f' < f} \sqrt{\frac{n_f}{N}} \sqrt{\frac{n_{f'}}{N-1}} (-1)^{\sum_{f' \leq g < f} n_g} (\langle \mathbf{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}' | f' \rangle - \langle \mathbf{r}' | f \rangle \langle \mathbf{r} | f' \rangle) \times \\ \times \langle R_{N-2} | n_1, \dots, (n_{f'} - 1), \dots, (n_f - 1), \dots \rangle. \end{aligned} \quad (51)$$

На основании (51) получаем для двухчастичной плотности вероятности фермионов

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{f, f'} n_f n_{f'} |\varphi_f(\mathbf{r})|^2 |\varphi_{f'}(\mathbf{r}')|^2 - \\ - \sum_{f, f'} n_f n_{f'} \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r}') \varphi_{f'}^*(\mathbf{r}') \varphi_{f'}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Окончательно для плотности силы парного взаимодействия фермионов получаем

$$\mathcal{F}^F(\mathbf{r}) = - \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2. \quad (52)$$

Как и в случае бозе-частиц, первое слагаемое в (52) представляет собой вклад самосогласованного поля. Второе слагаемое ответственно за обменное взаимодействие электронов.

Для плотности потенциальной энергии взаимодействия частиц получаем для бозонов:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{потенц}}^B(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') - \right. \\ \left. - \sum_f n_f (n_f + 1) |\varphi_f(\mathbf{r})|^2 |\varphi_f(\mathbf{r}')|^2 + |\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (53)$$

и для фермионов:

$$\mathcal{E}_{\text{потенц}}^F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \{ n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') - |\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 \}. \quad (54)$$

Плотность потока потенциальной энергии бозе-частиц представима в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{потенц}}^B(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') - \right. \\ - \frac{1}{2m} \sum_f n_f (n_f + 1) (\varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D} \varphi_f(\mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r})) |\varphi_f(\mathbf{r}')|^2 + \\ \left. + \frac{1}{2m} (\rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{D} \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r})) \right\}, \end{aligned} \quad (55)$$

а для ферми-жидкости получаем

$$\mathbf{Q}_{\text{потенц}}^{\text{F}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') - \right. \\ \left. - \frac{1}{2m} (\rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{D} \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r})) \right\}. \quad (56)$$

Рассмотрим выражение для работы, совершаемой всей системой над единицей объема системы в точке $\mathbf{r}$ в единицу времени. В случае бозе-частиц имеем

$$\mathcal{A}^{\text{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') (\mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}')) - \right. \\ - \frac{1}{2m} \sum_f n_f (n_f + 1) (\varphi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{D} \varphi_f(\mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \varphi_f^*(\mathbf{r}) \varphi_f(\mathbf{r})) |\varphi_f(\mathbf{r}')|^2 - \\ - \frac{1}{2m} \sum_f n_f (n_f + 1) |\varphi_f(\mathbf{r})|^2 (\varphi_f^*(\mathbf{r}') \mathbf{D}' \varphi_f(\mathbf{r}') + \mathbf{D}'^* \varphi_f^*(\mathbf{r}') \varphi_f(\mathbf{r}')) + \\ + \frac{1}{2m} (\rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{D} \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r})) + \\ \left. + \frac{1}{2m} (\rho^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{D}' \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{D}'^* \rho^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\}. \quad (57)$$

Для ферми-частиц аналогично находим

$$\mathcal{A}^{\text{F}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4m} \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\{ n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') (\mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}')) - \right. \\ - (\rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{D} \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{D}^* \rho^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}', \mathbf{r})) - \\ \left. - (\rho^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{D}' \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{D}'^* \rho^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right\}. \quad (58)$$

В рассматриваемом приближении симметрия или антисимметрия волновой функции приводит к одинаковой зависимости силы от концентрации, но различной зависимости от одночастичной матрицы плотности $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Как видно из формул (54)–(58), аналогичную структуру имеют также плотность энергии взаимодействия, плотность потока потенциальной энергии и работа, совершаемая в единицу времени в единице объема.

10. Интеграл Коши и одночастичное уравнение Шредингера. Тот факт, что уравнения (32), (33) и (36) по форме совпадают с уравнениями классической гидродинамики, позволяет обобщить ряд методов классической гидродинамики на квантовые системы. Рассмотрим частный случай, допускающий интеграл Коши [15] для уравнения (33).

Квантовой идеальной жидкости соответствует уравнение баланса импульса (33) при $p_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} p$. В выражении для плотности силы (46) выделим явно слагаемое с самосогласованным полем. Положим

$$n_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = n(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}', t) + g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t),$$

где $g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ – корреляционная функция, тогда

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = -n(\mathbf{r}, t) \nabla \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t) - \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t).$$

В этом случае уравнение (33) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \nabla \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot} \left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \frac{1}{n} \nabla p = \\ = -\nabla \left\{ e\varphi + \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t) \right\} - \\ - \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t). \end{aligned} \quad (59)$$

Предположим, что

$$\text{rot} \left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = 0.$$

В отсутствие магнитного поля это соотношение соответствовало бы безвихревому движению. Отсюда получаем

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left(\nabla \sigma - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (60)$$

где $\sigma(\mathbf{r}, t)$ – произвольная скалярная функция. Тогда уравнение баланса импульса примет вид

$$\nabla f(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{n} \nabla p = -\frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int d\mathbf{r}' e^2 \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \quad (61)$$

где

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{(\nabla \sigma - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi + \int d\mathbf{r}' e^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t).$$

Проинтегрируем это уравнение от $\mathbf{r}_0$ до $\mathbf{r}$ вдоль некоторой кривой. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} (d\mathbf{l} \nabla) f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) - f(\mathbf{r}_0, t) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} dp(\mathbf{r}, t) - \\ - \int d\mathbf{r}' \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} e^2 dG(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)}{n(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Функцию $f(\mathbf{r}_0, t)$ в (62) можно внести в определение $\sigma(\mathbf{r}, t)$. В результате мы получаем интеграл Коши в микроскопической квантовой гидродинамике систем частиц с кулоновским взаимодействием во внешнем поле в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{(\nabla \sigma - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi + e^2 \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t) = \\ = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} dp(\mathbf{r}, t) - e^2 \int d\mathbf{r}' \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dG(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)}{n(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned} \quad (63)$$

Условие $p_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}p$, а также (60) являются дополнительными, ограничивающими класс рассматриваемых физических систем. Найдем уравнение Шредингера, описывающее такие системы в физическом пространстве в терминах одночастичной волновой функции.

Для этого заметим, что уравнения (63) и (32) можно записать в виде одного комплексного уравнения. Полагая

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{\frac{i}{\hbar} \sigma(\mathbf{r}, t)},$$

вместо (63) и (32) получаем

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t) + \\ &\quad + e^2 \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2 + \chi(\mathbf{r}, t), \\ \chi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta |\Psi(\mathbf{r}, t)|}{|\Psi(\mathbf{r}, t)|} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} dp(\mathbf{r}, t) + \\ &\quad + e^2 \int d\mathbf{r}' \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} dG(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)}{n(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ нормирована на число частиц N :

$$\int d\mathbf{r} \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) = N.$$

Мы видим, что уравнение Шредингера системы N частиц с кулоновским взаимодействием во внешнем электромагнитном поле может быть представлено в виде системы уравнений в физическом пространстве, имеющих ту же форму, что и уравнения гидродинамики. При $N = 1$, когда размерности конфигурационного и физического пространств совпадают, эти уравнения сводятся к приведенным в работе [16]. Аналогичное представление квантовой механики может быть получено и для произвольного потенциала взаимодействия. В рамках этого представления в уравнениях могут быть явно выделены слагаемые, содержащие постоянную Планка, что допускает рассмотрение этих уравнений в квазиклассическом пределе. Исследованы особенности квантовой гидродинамики ферми- и бозе-систем. Собственно уравнения квантовой гидродинамики получаются путем локального усреднения микроскопических уравнений. Однако на микроскопическом уровне может быть выделен класс физических систем, для которых получен первый интеграл типа Коши и найдено соответствующее “одночастичное” уравнение Шредингера. Формально многочастичная задача сводится к одночастичной в методе вторичного квантования, где, однако, одночастичные функции являются операторными. Уравнения квантовой гидродинамики в рамках этого формализма получены в работах [17,

с. 244–326; 18, с. 314–326]. Особенность нашего подхода прежде всего в том, что он предоставляет возможность получить уравнения материального континуума рассматриваемой физической системы в рамках классических представлений и в терминах квантовой механики одним и тем же методом. Это позволяет непосредственно выделить эффективные квантовые взаимодействия. В обоих случаях микроскопические “гидродинамические” уравнения могут быть получены при любых N , а макроскопические физические поля и уравнения для них появляются в результате локального сглаживания микроскопических полей и уравнений. В рамках этого метода макроскопическая гидродинамика есть механика в среднем, если можно пренебречь запаздыванием взаимодействий.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке программы “Университеты России”.

Список литературы

- [1] Л. С. Кузьменков. ТМФ. 1991. Т. 86. № 2. С. 231.
- [2] М. А. Дрофа, Л. С. Кузьменков. ТМФ. 1996. Т. 108. № 1. С. 3.
- [3] Л. С. Кузьменков. Макроскопическая структура электромагнитного поля в задачах электродинамики и физической кинетики. Пленарный доклад на конференции “Проблемы фундаментальной физики”, 7–12 октября 1996 г., Саратов 1996.
- [4] В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [5] И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
- [6] S. Goldstein. Phys. Today. 1998. V. 51. № 3. P. 42; № 4. P. 38.
- [7] D. Bohm. Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 166.
- [8] D. Bohm. Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 180.
- [9] D. Bohm, J. P. Vigier. Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 208.
- [10] G. García de Polavieja. Phys. Lett. A. 1996. V. 220. P. 303.
- [11] G. García de Polavieja. Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 1451.
- [12] E. Madelung. Z. Phys. 1926. V. 40. P. 332.
- [13] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
- [14] С. Швeбер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
- [15] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
- [16] S. Olariu, I. Porescu. Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. № 1. P. 339.
- [17] Н. Н. Боголюбов. Избранные труды в трех томах. Том третий. Киев: Наукова думка, 1971.
- [18] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 3.VII.1998 г.