Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Васильев, М. М. Перекалин, Флуктуационно-диссипационная теорема для составных операторов в моделях критической динамики, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 305–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:41:51

© 1999 г. А. Н. Васильев*, М. М. Перекалин*

ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Приводятся общая формулировка и доказательство флуктуационно-диссипационной теоремы для составных операторов в произвольной модели критической динамики.

1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Любая конкретная модель критической динамики для поля или (в общем случае) семейства полей $\varphi \equiv \{\varphi_a(x), x \equiv t, \mathbf{x}\}$ задается статическим функционалом действия $S^{\text{st}}(\varphi)$ и системой стохастических уравнений

$$\partial_t \varphi_a(x) = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) H_b(x; \varphi) + \eta_a(x), \quad (1a)$$

$$\langle \hat{\eta}_a(x) \hat{\eta}_b(x') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta(x - x') \quad (1b)$$

(по повторяющимся индексам типа b в (1a) предполагается суммирование), в которых

$$H_b(x; \varphi) \equiv \left. \frac{\delta S^{\text{st}}(\varphi)}{\delta \varphi_b(\mathbf{x})} \right|_{\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x)}, \quad (2)$$

α_{ab} – симметричная и положительно-определенная матрица коэффициентов Онсагера, β_{ab} – антисимметричная матрица коэффициентов межмодовых связей, $\hat{\eta}_a$ – набор случайных источников (“шумов”) с гауссовым распределением, заданным коррелятором (1b) и условием $\langle \hat{\eta}_a \rangle = 0$, η_a в (1a) – любая конкретная реализация случайной величины $\hat{\eta}_a$. В дальнейшем всегда будет иметься в виду “стандартная постановка” задачи (1): она рассматривается на всей оси времени $-\infty < t < +\infty$ с дополнительным условием запаздывания и нулевыми асимптотическими условиями для полей при $|x| \rightarrow \infty$.

Коэффициенты α_{ab} в (1) не зависят от полей φ и в конкретных моделях являются либо простыми константами, либо (при наличии “сохранения” для соответствующих компонент φ_a) величинами типа $\text{const} \cdot \partial^2$, где ∂^2 – оператор Лапласа. В отличие от

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

α в коэффициентах межмодовой связи β_{ab} допускается локальная зависимость от полей φ и от их пространственных (но не временных) производных $\partial\varphi$. В трансляционно-инвариантных моделях (которыми мы и будем ограничиваться) явная зависимость от переменных $x = t, \mathbf{x}$ в коэффициентах α и β не допускается. Для правильного согласования динамики и статики (см. ниже) коэффициенты β в (1) должны удовлетворять соотношениям

$$\beta_{ab} = -\beta_{ab}^T, \quad \frac{\delta\beta_{ab}(x; \varphi)}{\delta\varphi_a(x)} = 0, \quad (3)$$

первое из которых означает антисимметричность матрицы β (символ транспонирования T относится к возможным операциям типа ∂ в коэффициентах β_{ab} , $\partial^T = -\partial$).

Уравнение Фоккера–Планка для функции распределения $P_t(\varphi)$ полей $\varphi(t; \mathbf{x})$ в один момент времени t записывается для системы (1) следующим образом:

$$\left\{ \partial_t + \frac{\delta}{\delta\varphi_a} \left[(\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S^{\text{st}}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{ab} \frac{\delta}{\delta\varphi_b} \right] \right\} P_t(\varphi) = 0 \quad (4)$$

(выражение в квадратных скобках и операция $\delta/\delta\varphi_a$ имеют аргумент $\mathbf{x}$, по которому подразумевается интегрирование), а его стационарным решением является функционал

$$P(\varphi) = \text{const} \cdot \exp S^{\text{st}}(\varphi), \quad (5)$$

т.е. обычное равновесное распределение для исходной статической модели с действием $S^{\text{st}}(\varphi)$, в этом и состоит общий принцип взаимной согласованности динамики и статики. При подстановке функционала (5) в уравнение (4) все вклады с коэффициентами β исчезают в силу соотношений (3), т.е. межмодовая связь не влияет на одновременную (и совпадающую с равновесной при стандартной постановке задачи) функцию распределения.

Помимо основных соотношений (3), обеспечивающих отсутствие влияния на статику межмодового взаимодействия, последнее в конкретных моделях всегда удовлетворяет условию t -обратимости. Это значит, что динамическое уравнение (1а) с чисто межмодовой правой частью (т.е. без учета шумов и диссипативных вкладов с коэффициентами α) инвариантно относительно операции отражения времени. Последней соответствует некоторое преобразование полей:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_T(x) = I\varphi(Tx), \quad I^2 = 1, \quad Tx \equiv T\{t, \mathbf{x}\} = \{-t, \mathbf{x}\}. \quad (6)$$

Задающая представление дискретной операции T -отражения матрица $I = I^{-1}$ обычно (но не всегда) просто диагональна, и тогда ее диагональные элементы $\epsilon_a = \pm 1$ определяют t -четность соответствующей полевой компоненты φ_a . При T -отражении (6) все времена и операция ∂_t в динамическом уравнении (1а) меняют знак, в конкретных моделях функционал $S^{\text{st}}(\varphi)$ на полях $\varphi(x)$ всегда инвариантен относительно замены $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow I\varphi(\mathbf{x})$, поэтому его вариационная производная в (2) преобразуется с помощью транспонированной матрицы $I^T = (I^{-1})^T$. T -инвариантность (обратимость) межмодового взаимодействия означает, что вклад βH в уравнении (1а) преобразуется точно

так же, как производная $\partial_t \varphi$ в левой части, т.е. матрицей $-I$, тогда как диссипативный вклад αH преобразуется матрицей I , поэтому меняет знак относительно $\partial_t \varphi$. Все это обеспечивается следующими свойствами матриц α и $\beta = \beta(\mathbf{x}; \varphi)$ с полем $\varphi(\mathbf{x})$ (статическая версия записи коэффициентов β) в уравнении (1a):

$$|\alpha|^T = \alpha, \quad |\beta(\mathbf{x}; I\varphi)|^T = -\beta(\mathbf{x}; \varphi). \quad (7)$$

В конкретных динамических моделях А–J [1] соотношения (7) всегда выполняются.

Хорошо известно (см., например, [2, 3]), что любая стохастическая задача типа (1) полностью эквивалентна квантово-полевой модели с удвоенным числом полей $\phi = \varphi, \varphi'$ и функционалом действия

$$S(\varphi) = \varphi' \alpha \varphi' + \varphi [-\partial_t \varphi + (\alpha + \beta) H(\varphi)] \quad (8)$$

с $H(\varphi)$ из (2) и с подразумеваемыми нужными интегрированиями по x и суммированиями по индексам. Эквивалентность означает, в частности, что динамические корреляционные функции $\langle \hat{\varphi} \dots \hat{\varphi} \rangle$ случайных полей $\hat{\varphi}(x)$ совпадают с функциональными средними $\langle \varphi \dots \varphi \rangle$ с весом $\exp S(\phi)$. То же справедливо для функций Грина всех полей $\phi = \varphi, \varphi'$ и любых построенных из них составных операторов $F(\phi)$. В дальнейшем будем полагать

$$\langle F(\phi) \rangle = \int D\phi F(\phi) \exp S(\phi),$$

считая нормировочный множитель включенным в меру $D\phi$.

2. ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Динамические функции отклика на нестационарное внешнее поле $h = \{h_a(x)\}$ определяются как кратные вариационные производные по h различных величин $\langle \hat{\varphi} \dots \hat{\varphi} \rangle$ при $h = 0$. Внешнему полю соответствует добавка

$$h\varphi = \int d\mathbf{x} h(x) \varphi(\mathbf{x})$$

к функционалу $S^{\text{st}}(\varphi)$, т.е. аддитивная добавка $h_b(x)$ к $H_b(x; \varphi)$ в уравнении (1a) и в динамическом действии (8). Поэтому простейшей из таких функций отклика является величина

$$R_{ab}(x, x') = \left. \frac{\delta \langle \hat{\varphi}_a(x) \rangle}{\delta h_b(x')} \right|_{h=0} = \langle \varphi_a(x) \bar{\varphi}_b(x') \rangle, \quad (9)$$

здесь и далее символ $\langle \dots \rangle$ обозначает функциональное усреднение по полям $\phi = \varphi, \varphi'$ с весом $\exp S(\phi)$ и

$$\bar{\varphi} \equiv \varphi'(\alpha + \beta) = (\alpha - \beta)\varphi' \quad (10)$$

(напомним, что матрица α симметрична, а β антисимметрична и что $xM = M^T x$ для любого вектора x и произвольной матрицы M).

Все функции отклика удовлетворяют естественным требованиям запаздывания, в частности для функции (9) $R_{ab}(x, x') = 0$ при $t < t'$ в аргументах $x = t, \mathbf{x}$ и $x' = t', \mathbf{x}'$.

Хорошо известная флуктуационно-диссипационная (ФД) теорема связывает функцию отклика (9) с динамическим коррелятором $\langle \varphi_a(x) \varphi_b(x') \rangle \equiv C_{ab}(x, x')$:

$$\langle \varphi_a(x) \bar{\varphi}_b(x') \rangle = \Theta(t - t') \langle \varphi_a(x) \partial_{t'} \varphi_b(x') \rangle, \quad (11)$$

откуда с учетом свойства запаздывания функции отклика и трансляционной инвариантности по времени всех величин следует

$$R_{ab}(\omega, k) - R_{ba}(-\omega, -k) = i\omega C_{ab}(\omega, k) \quad (12)$$

в импульсно-частотном представлении.

Мы хотим доказать справедливость следующего обобщения ФД-теоремы (11) для произвольной модели типа (1):

$$\langle M(x) \cdot \bar{\varphi}(x') \cdot N(x') \rangle = \Theta(t - t') \langle M(x) \cdot \partial_{t'} \varphi(x') \cdot N(x') \rangle, \quad (13)$$

где M и N – любые построенные только из полей φ (без φ') и их производных локальные (в общем случае многокомпонентные) составные операторы, преобразующиеся линейно при Т-отражении полей (6). Последнее означает, что при замене $\varphi(x) \rightarrow \varphi_T(x)$ в $M(x)$ получается новый объект $M' = M_I(Tx)$, все компоненты которого являются некоторыми линейными комбинациями компонент исходного оператора M с точностью до замены $x \rightarrow Tx$ аргументов входящих в M полей φ и символов ∂ , и аналогично для $N(x)$ (индекс типа b в (11) у полей $\bar{\varphi}$ и φ в (13) подразумевается).

Переходя к доказательству ФД-теоремы (13), прежде всего заметим, что функцию отклика в левой части (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} R(x, x') &\equiv \langle M(x) \cdot \bar{\varphi}(x') \cdot N(x') \rangle = \\ &= \frac{\delta}{\delta a(x')} \int D\phi M(x) \exp [S(\phi) + \varphi'(\alpha + \beta)Na] \Big|_{a=0}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $a \equiv \{a(x)\}$ – дополнительные “источники” с нужными для обеспечения скалярности вклада $\varphi'(\alpha + \beta)Na = \bar{\varphi}Na$ в (14) индексами (примеры: $\bar{\varphi}_b Na_b$, $\bar{\varphi}_b N_b a$, $\bar{\varphi}_b N_c a_{bc}$, $\bar{\varphi}_b N_{bc} a_c$ и т.п.).

Если подставить в (14) выражение (8) для динамического действия и выполнить сначала гауссово функциональное интегрирование по φ' (напомним, что величины M и N зависят по условию только от полей φ , а формальная “расходимость” интеграла по φ' для действия (8) с $\alpha > 0$ значения не имеет и может быть при желании устранена заменой $\varphi' \rightarrow i\varphi'$) и лишь после этого вариационное дифференцирование по источнику a , то для функции отклика (14) получим следующее представление:

$$\begin{aligned} -2R(x, x') &= -2\langle M(x) \cdot \bar{\varphi}(x') \cdot N(x') \rangle = \\ &= C \int D\varphi M(x) A(x') N(x') \exp \tilde{S}(\varphi) \equiv \langle \langle M(x) A(x') N(x') \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где C – несущественная константа, $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ – удобное для дальнейшего обозначение функционального интегрирования по полям φ с весом $C \exp(\tilde{S}(\varphi))$ и

$$\tilde{S} = -\frac{1}{4}(F\alpha^{-1}F), \quad F \equiv -\partial_t\varphi + (\alpha + \beta)H, \quad (16a)$$

$$A = F\alpha^{-1}(\alpha + \beta) = (1 - \beta\alpha^{-1})F \equiv -\partial_t\varphi + B, \quad (16b)$$

$$B \equiv \alpha H + \beta\alpha^{-1}(\partial_t\varphi - \beta H) \quad (16в)$$

с функционалом H из (2). Величины φ , F , A , B нужно понимать как векторы по индексам полей φ , φ' , величины α , α^{-1} , β – как действующие на них справа или слева матрицы (перенос матрицы слева направо или наоборот сопровождается ее транспонированием, $\alpha^T = \alpha$, $\beta^T = -\beta$), $\tilde{S}(\varphi)$ в (16a) – квадратичная форма с ядром α^{-1} , нужные аргументы x и интегрирования по ним везде подразумеваются.

Как было показано (раздел 1), при Т-отражении (6) величины $\partial_t\varphi$ и βH преобразуются матрицей $-I$, а φ и αH – матрицей I . Величины первого типа будем называть “ I -нечетными”, а второго – “ I -четными”. С помощью соотношений (7) нетрудно убедиться, что все вклады в выражении (16в) для B являются I -четными (отметим, что при подстановке F из (16a) в выражение (16b) происходит взаимное сокращение двух I -нечетных вкладов). В обозначениях (15), (16) имеем

$$-2R(x; x') = \langle\langle M(x) [-\partial_{t'}\varphi(x') + B(x')] \cdot N(x') \rangle\rangle, \quad (17)$$

причем величины $\partial_{t'}\varphi(x')$ и $B(x')$ имеют разную I -четность.

Покажем теперь, что действие $\tilde{S}(\varphi)$ в (15) Т-четно, т.е. инвариантно относительно Т-отражения (6). В квадратичной форме $F\alpha^{-1}F$ выражения (16a) для $\tilde{S}$ “вектор” F есть сумма I -четного и I -нечетного вкладов. Из первого равенства (7) следует, что в форме $F\alpha^{-1}F$ произведения вкладов F с одинаковой I -четностью дают Т-четный вклад в $\tilde{S}$. Поэтому Т-нечетный вклад может порождаться только перекрестным членом формы $F\alpha^{-1}F$, кратным выражению

$$[-\partial_t\varphi + \beta H] \alpha^{-1} [\alpha H] = H [-\partial_t\varphi + \beta H]. \quad (18)$$

Оба вклада в правой части равны нулю: второй вследствие антисимметричности матрицы β , а первый сводится к интегралу от полной производной. Действительно, в подробной записи (см. (2)) этот вклад имеет вид

$$-\int dx \partial_t\varphi(x) \frac{\delta S^{\text{st}}(\varphi)}{\delta\varphi(\mathbf{x})} \Big|_* = -\int dt \partial_t L(t),$$

где

$$L(t) \equiv S^{\text{st}}(\varphi) \Big|_*,$$

а знак $|_*$ везде обозначает замену $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x)$.

Таким образом, действие $\tilde{S}(\varphi)$ Т-инвариантно, поэтому инвариантны и все средние $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ с весом $\exp \tilde{S}(\varphi)$. В частности, с учетом I -четности B и I -нечетности $\partial_t \varphi$ имеем

$$\langle\langle M(x) \cdot [-\partial_{t'} \varphi(x') + B(x')] \cdot N(x') \rangle\rangle = \langle\langle M_I(\bar{x}) \cdot I[\partial_{\bar{t}'} \varphi(\bar{x}') + B(\bar{x}')] \cdot N_I(\bar{x}') \rangle\rangle, \quad (19)$$

где $\bar{x} \equiv Tx$, $\bar{x}' \equiv Tx'$ (см. (6)), а M_I и N_I – Т-преобразованные функционалы M и N (см. текст после соотношения (13)).

Учтем теперь свойство запаздывания функций отклика, из которого следует, что правая часть равенства (17) исчезает при $t < t'$, т.е.

$$\langle\langle M(x) \cdot \partial_{t'} \varphi(x') \cdot N(x') \rangle\rangle = \langle\langle M(x) \cdot B(x') \cdot N(x') \rangle\rangle \quad \text{при } t < t'. \quad (20)$$

Возьмем в (19) $t > t'$, тогда в правой части этого равенства будет $\bar{t} < \bar{t}'$ и для нее можно воспользоваться соотношением (20) (здесь важно, что все компоненты M_I и N_I являются по условию некоторыми линейными комбинациями компонент исходных величин M и N с точностью до замены аргументов). Оно позволяет при $t > t'$ заменить всю правую часть равенства (19) удвоенным вкладом ее первого слагаемого, совпадающим с вкладом первого слагаемого в левой части (19) вследствие Т-инвариантности. Таким образом, при $t > t'$ имеем

$$\langle\langle M(x) \cdot [-\partial_{t'} \varphi(x') + B(x')] \cdot N(x') \rangle\rangle = -2\langle\langle M(x) \cdot \partial_{t'} \varphi(x') \cdot N(x') \rangle\rangle, \quad (21)$$

откуда с учетом соотношений (15), (17) и общего свойства запаздывания функций отклика получаем равенство (13), т.е. обобщение ФД-теоремы для составных операторов. Простая ФД-теорема (11) – частный случай общего соотношения (13) с $M = \varphi$ и $N = 1$.

Благодарности. Авторы благодарят за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (грант 96-02-17033) и Конкурсный центр фундаментального естествознания Минобразования РФ (грант 97-0-14.1-30).

Список литературы

- [1] *P. C. Hohenberg, B. I. Halperin.* Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 435.
- [2] *C. De Dominicis, L. Peliti.* Phys. Rev. B. 1978. V. 18. P. 353.
- [3] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак.* ТМФ. 1983. Т. 57. С. 268.

Поступила в редакцию 25.V.1998 г.