Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Авакян, Гравитационное поле плоской скалярной волны в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 311–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:30:41

© 1999 г.

А. Н. Авакян*

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Уравнения релятивистской теории гравитации решены для случая, когда источником гравитационного поля является плоская скалярная волна. Проведен анализ полученного решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В основе релятивистской теории гравитации (РТГ) лежит представление о гравитационном поле как о физическом поле в духе Фарадея–Максвелла, которое обладает энергией-импульсом [1–2]. Таким образом, аналогично всем другим физическим полям гравитационное поле характеризуется своим тензором энергии-импульса. Так как геометрия пространства-времени для всех физических полей является псевдоевклидовой (пространство Минковского), то плотность тензора определяется как $\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\Phi^{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства Минковского.

В полной аналогии с уравнениями электродинамики Максвелла в отсутствие гравитации в произвольных координатах уравнения гравитационного поля можно записать в виде

$$\begin{aligned}\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\Phi}^{\mu\nu} &= 16\pi t^{\mu\nu}, \\ D_\mu \tilde{\Phi}^{\mu\nu} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где D_μ – ковариантная производная в пространстве Минковского, m – масса покоя гравитона. Для того чтобы уравнения гравитационного поля, полученные из принципа наименьшего действия, сводились к уравнениям (1), необходимо предположить, что тензорная плотность $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ всегда входит в плотность лагранжиана совместно с тензорной плотностью $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ через некоторую единую плотность $\tilde{g}^{\mu\nu}$, т.е.

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}.\tag{2}$$

Движение вещества в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ под действием гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ отождествляется в РТГ с движением вещества в эффективном

* Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: ana008@srddan.npi.msu.su

римановом пространстве с метрикой $g^{\mu\nu}$, определяемой соотношениями (2). Такое взаимодействие гравитационного поля с веществом называется *принципом геометризации*.

Уравнения движения в РТГ принимают следующий вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right),$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, G – гравитационная постоянная.

Таким образом, в данной теории гравитационное поле является полем Фарадея–Максвелла, обладающим энергией-импульсом и спином 2 или 0 (именно эти спиновые состояния выделяет второе уравнение системы (1)). Риманово пространство согласно связи (2) возникает как эффективное пространство полевого происхождения.

Отличие массы покоя гравитона от нуля приводит к ряду интересных следствий, одним из которых является наличие гравитационных сил отталкивания от сингулярной сферы [3]. В настоящее время появились работы [4], в которых найдены точные решения уравнений РТГ, обладающие аксиальной симметрией. Такой же симметрией обладает и плоская скалярная волна. Найдем метрику эффективного риманова пространства, соответствующую гравитационному полю плоской скалярной волны.

2. ПЛОСКОВОЛНОВОЕ РЕШЕНИЕ

В качестве вещества, порождающего гравитационное поле, рассмотрим скалярную безмассовую плоскую волну $\phi(t, \mathbf{r})$. Материальную часть лагранжиана запишем в виде

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi.$$

При таком выборе источника гравитационного поля уравнения гравитации РТГ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) &= -\frac{16\pi G}{c^4} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi, \\ g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Второе уравнение в (3) есть уравнение движения скалярного поля.

Следует отметить, что скалярное поле в теории гравитации обычно рассматривается [5] в качестве дополнительного гравитационного поля. Здесь мы считаем, что скалярное поле, как и остальные поля материи, – лишь источник гравитационного поля.

Система уравнений (3), которую нам надо решить, является системой нелинейных уравнений. Как это обычно бывает, удачный метод поиска решений подобных систем может свести их к линейным.

Произведем выбор метрики эффективного риманового пространства исходя из анализа фронта волны вещества, порождающего гравитационное поле. Как известно [6], уравнение фронта волны для уравнений (3) имеет вид $g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = 0$. Это – уравнение движения безмассовой частицы в форме Гамильтона–Якоби. Здесь S – действие (эйконал) кванта поля.

Потребуем, чтобы фронт нашей скалярной волны был одинаковым и в пространстве Минковского, и в эффективном римановом пространстве, т.е. потребуем одновременно выполнения уравнений $g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S = 0$ и $\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S = 0$. Это требование налагает жесткие условия не только на вид искомой метрики $g^{\mu\nu}$, но и прежде всего на вид скалярного поля $\phi(x)$. Представим теперь метрику $g^{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства в виде $g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu}$. Тогда наше условие превратится в требование разрешимости системы уравнений

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S &= 0, \\ \xi^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Дальнейшее рассуждение будем проводить в декартовых координатах. Положим, что плоская волна распространяется вдоль оси Z . Тогда действие S будет функцией $S = S(z, ct)$. При этом из первого уравнения (4) следует, что $\partial_{ct}S = \pm\partial_z S$ или, что то же самое, $S = S(ct \pm z)$. Знак $\pm$ соответствует направлению распространения волны. Выберем для определенности $S = S(ct - z)$. Тогда, подставляя полученный нами результат во второе уравнение (4), найдем, что

$$\frac{dS(ct - z)}{d(ct - z)}(\xi^{00} - 2\xi^{03} + \xi^{33}) = 0. \quad (4a)$$

Положим $\xi^{00} = \xi^{03} = \xi^{33} = -F(x^\lambda)$, а остальные компоненты $\xi^{\alpha\beta} = 0$. При этом левая часть уравнения (4a) обращается в нуль автоматически.

Заметим, что функция F зависит от x^λ следующим образом: $F(x^\lambda) = F(ct - z)$. Подобная зависимость диктуется видом метрического тензора $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(ct - z)$, последнее же является прямым следствием вида функции $S = S(ct - z)$.

Таким образом, тензор $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + F(ct - z) & 0 & 0 & -F(ct - z) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -F(ct - z) & 0 & 0 & -1 + F(ct - z) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Следовательно, эффективный метрический тензор (а по сути дела, гравитационная волна) представляет собой некое возмущение $F(ct - z)$ псевдоевклидовой метрики, распространяющееся вдоль оси Z со скоростью c .

Как уже отмечалось ранее, данный вид метрики налагает жесткие условия на вид скалярного поля. Эти условия, очевидно, следуют из уравнения (3) движения скалярного поля. Действительно, это единственное уравнение, связывающее между собой величины ϕ и $g^{\mu\nu}$ и не содержащее других величин. Выполнение этого уравнения для любого ϕ и даст нам искомое условие.

Записав теперь второе уравнение (3) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi)}{\partial x^\nu} = 0,$$

получим его в компонентах:

$$\phi_{zz}(F-1) + \phi_{ct\ ct}(F+1) + 2F\phi_{z\ ct} = 0.$$

Представляя ϕ в виде $\phi = \phi(\zeta(ct, z))$, получим уравнение относительно функции ζ :

$$\phi_{\zeta\zeta}(\zeta_z^2(F-1) + \zeta_{ct}^2(F+1) + \zeta_z\zeta_{ct}F) + \phi_{\zeta}(\zeta_{zz}(F-1) + \zeta_{ct\ ct}(F+1) + \zeta_{z\ ct}F) = 0.$$

Предполагая, что ζ – линейная функция, положим $\alpha\zeta_z = \zeta_{ct}$, следовательно, $F(1 + \alpha^2 + \alpha) + \alpha^2 - 1 = 0$, откуда $\alpha = -1$, т.е. зависимость $\zeta(ct, z) = \zeta(ct - z)$ обращает второе уравнение (3) в тождество. Таким образом, мы показали, что $\phi = h(ct - z)$, где $h(ct - z)$ – произвольная функция, описывающая тот или иной волновой пакет скалярного поля, распространяющийся вдоль оси Z со скоростью c .

Такое поле порождает возмущение плоской метрики, движущееся также по оси Z со скоростью c .

В итоге из уравнений (3) получаем уравнение

$$-2(\phi'_{(ct-z)})^2 \frac{16\pi G}{c^4} - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} F = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$F(ct - z) = -\frac{64\pi G\hbar^2}{m^2 c^8} \left(\frac{\partial \phi(ct - z)}{\partial t} \right)^2. \quad (6)$$

Таким образом, нами найден точный вид метрики $g^{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства, а следовательно, и точный вид плотности тензора $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ гравитационного поля.

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Прежде всего проверим найденное решение на выполнение [1] принципа причинности: если $ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$, то $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \leq 0$. Подстановка полученной метрики в данные условия показывает их полное выполнение как следствие того, что $F(ct - z) \leq 0$. Таким образом, найденное решение удовлетворяет данному принципу причинности и, следовательно, оно “физично”.

Тензор кривизны позволяет выяснить геометрию гравитационной волны. Однако тензор $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$, построенный из найденной метрики, оказывается равным нулю, т.е. волна не искривляет геометрии. Это означает, что действие полученной гравитационной волны сводится к следующему: при прохождении гравитационной волны последняя как бы ускоряет систему координат, полученную в метрике (5), делая ее неинерциальной в псевдоевклидовом пространстве-времени. По завершении же прохождения волны система координат возвращается в начальное состояние, делаясь снова инерциальной.

Найдем теперь явный вид преобразований координат, переводящих ускоренную систему отсчета в неинерциальную систему. Поскольку ускорение происходит в направлении распространения скалярной волны (в нашем случае ось Z), то будем рассматривать преобразования только двух координат

$$T = T(z, t), \quad Z = Z(z, t),$$

где через T и Z обозначены координаты пространства Минковского.

Преобразования будем искать в следующем виде ($c \equiv 1$):

$$\begin{aligned} dT &= (1 + a_1 F(t - z))dt - a_1 F(t - z)dz, \\ dZ &= a_2 F(t - z)dt + (1 - a_2 F(t - z))dz, \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 — некоторые постоянные.

Ясно, что при таком выборе выполняются условия

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial z}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial z}$$

и при отсутствии гравитационного поля $dX^\alpha = dx^\alpha$.

Расписывая теперь интервал в пространстве Минковского

$$d\sigma^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

в терминах римановых координат и сравнивая его с интервалом

$$ds^2 = dt^2(1 + F(t - z)) - dz^2(1 - F(t - z)) - 2dt dz F(t - z) - dx^2 - dy^2$$

в эффективном римановом пространстве, видим, что обе постоянные a_1 и a_2 равны $1/2$.

Таким образом, искомые преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} dT &= \left(1 + \frac{1}{2}F(t - z)\right)dt - \frac{1}{2}F(t - z)dz, \\ dX &= dx, \\ dY &= dy, \\ dZ &= \frac{1}{2}F(t - z)dt + \left(1 - \frac{1}{2}F(t - z)\right)dz. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим теперь уравнение движения некоторой фиксированной точки (например, $x = y = z = 0$) относительно инерциальной системы отсчета. Согласно системе (7) имеем

$$\begin{aligned} T &= \int dt \left\{1 + \frac{1}{2}F(t)\right\}, \\ Z &= \frac{1}{2} \int dt F(t), \\ X &= 0, \\ Y &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь время t можно рассматривать как параметр в параметрическом задании уравнений движения для функций $T(t)$ и $Z(t)$.

Из уравнений (8) видно, что

$$\frac{d^2 Z}{dT^2} = \frac{4\dot{F}(t)}{(2 + F(t))^3} \neq 0,$$

если $F(t) \neq -2$ ¹⁾. Таким образом, в силу уравнений (5) и (6) ускорение системы отсчета относительно инерциальной системы не равно нулю, если для зависящего от времени скалярного поля $\partial^2 \phi / \partial t^2 \neq 0$.

Таким образом, основной результат работы можно сформулировать следующим образом. *Произвольный волновой пакет скалярного поля, распространяющийся в заданном направлении, индуцирует гравитационное поле, которое вызывает переменное ускорение системы наблюдателя относительно инерциальной системы отсчета пространства Минковского.*

Благодарности. Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 96-15-96674).

Список литературы

- [1] А. А. Логунов. Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. Протвино: ИФВЭ, 1996.
- [2] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [3] В. И. Денисов. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 144; № 2. С. 312; Т. 112. № 2. С. 337.
- [4] И. П. Денисова. ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 501; Т. 113. № 1. С. 162; Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 3. С. 315.
- [5] V. I. Denisov, B. V. Mehta. Astron. Astrophys. Trans. 1997. V. 14. № 3. P. 165.
- [6] I. P. Denisova, M. Dalal. J. Math. Phys. 1997. V. 38. № 11. P. 5820.

Поступила в редакцию 7.V.1998 г.

¹⁾Заметим, что это ограничивающее условие в принципе невыполнимо, т.к. значение функции F не может быть меньше -1 , что явно следует из вида метрики (5) и указывает на малость скалярного поля ϕ .