Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Зубрило, Об одном частном решении в общей теории относительности,
ТМФ, 1999, том 118, номер 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:03:54

© 1999 г.

А. А. Зубрило*

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Показано, что в общей теории относительности гравитационное поле, создаваемое безмассовым скалярным полем, оказывает отталкивающее действие на любые частицы, движущиеся нерадиально.

В настоящее время в научной литературе активно обсуждается явление гравитационного отталкивания. Так, например, в релятивистской теории гравитации [1] это отталкивание происходит в окрестности сингулярной сферы [2–5] как следствие неравенства нулю массы гравитона. В общей теории относительности для изучения гравитационного отталкивания привлекается понятие частицы с отрицательной массой [6]. Однако в общей теории относительности гравитационное отталкивание возникает и в более реалистических условиях, когда источником гравитационного поля является статическое сферически-симметричное безмассовое скалярное поле.

Рассмотрим модель взаимодействующих гравитационного и безмассового скалярного полей. В этом случае уравнения Эйнштейна и уравнение для скалярного поля Ψ примут вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4} \left[\nabla_i \Psi \nabla_k \Psi - \frac{1}{2}g_{ik}g^{lm} \nabla_l \Psi \nabla_m \Psi \right], \quad (1)$$

$$g^{lm} \nabla_l \nabla_m \Psi = 0.$$

Найдем статическое сферически-симметричное решение этой системы уравнений. Как и в случае решения Рейсснера–Нордстрема [7], мы будем искать решение системы (1) всюду, за исключением особой точки $r = 0$. Для этого систему уравнений (1) удобно переписать следующим образом:

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla_i \Psi(r) \nabla_k \Psi(r),$$

$$\square \Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\sqrt{-g} g^{ln} \frac{\partial \Psi(r)}{\partial x^n} \right] = 0. \quad (2)$$

*НИИЯФ Московского государственного университета, Москва, Россия.

E-mail: zubrilo@srdlan.npi.msu.su

Так как источник в правой части первого из уравнений системы (2) отличен от нуля только для компоненты R_{rr} , то метрический тензор псевдориманова пространства-времени будем искать в виде

$$g_{00} = 1, \quad g_{rr} = -A(r), \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в систему (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} \Psi'^2(r) &= \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\ \Psi''(r) + \left(\frac{2}{r} - \frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \Psi'(r) &= 0, \\ 1 + \frac{rA'(r) - 2A(r)}{2A^2(r)} &= 0, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по r .

Несложно убедиться, что решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{r^2}{r^2 + b^2}, \\ \Psi'(r) &= \frac{q}{r\sqrt{r^2 + b^2}}, \\ \Psi(r) &= \frac{q}{2b} \ln \left| \frac{\sqrt{r^2 + b^2} - b}{\sqrt{r^2 + b^2} + b} \right| + \Psi(r_0), \end{aligned}$$

где q — скалярный заряд источника и для сокращения записи введено обозначение $b^2 = 4\pi Gq^2/c^4$.

Таким образом, данному скалярному полю соответствует метрика

$$g_{00} = 1, \quad g_{rr} = -\frac{r^2}{r^2 + b^2}, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (4)$$

Для найденной метрики скалярная кривизна $R = -2b^2/r^4$ не равна нулю.

Вычислим инварианты тензора кривизны I_1 и I_2 . Следуя книге [8], запишем инварианты I_1 и I_2 в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{48} (R_{iklm} R^{iklm} - i R_{iklm} \tilde{R}^{iklm}), \\ I_2 &= \frac{1}{96} (R_{iklm} R^{lmpr} R_{pr..}^{..ik} + R_{iklm} R^{lmpr} \tilde{R}_{pr..}^{..ik}), \end{aligned}$$

где $\tilde{R}^{iklm}$ и $\tilde{R}_{pr..}^{..ik}$ — дуальные тензоры, которые определяются с помощью антисимметричного единичного тензора четвертого ранга E^{iklm} ,

$$\tilde{R}^{iklm} = \frac{1}{2} E^{ikpr} R_{pr..}^{..lm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{ikpr} R_{pr..}^{..lm}.$$

Запишем вычисленные значения инвариантов тензора кривизны I_1 и I_2 :

$$I_1 = \frac{b^4}{4r^8}, \quad I_2 = -\frac{b^6}{12r^{12}}. \quad (5)$$

Как следует из выражений (4) и (5), найденное решение имеет особенность только в точке $r = 0$, а при $r \rightarrow \infty$ инварианты тензора кривизны достаточно быстро убывают. При этом метрический тензор g_{rr} быстро стремится к своему псевдоевклидову пределу.

Движение материальных частиц в гравитационном поле описывается уравнением геодезической для массивной частицы

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0.$$

Записывая это уравнение в пространстве-времени (4) покомпонентно, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{ds} &= 0, \\ \frac{du^r}{ds} + (u^r)^2 \frac{b^2}{r(r^2 + b^2)} - [(u^\vartheta)^2 + (u^\varphi)^2 \sin^2 \vartheta] \frac{(r^2 + b^2)}{r} &= 0, \\ \frac{du^\vartheta}{ds} + \frac{2}{r} u^r u^\vartheta - (u^\varphi)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0, \\ \frac{du^\varphi}{ds} + \frac{2}{r} u^r u^\varphi + u^\varphi u^\vartheta \frac{2 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановкой несложно убедиться, что состояние покоя $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$ является решением уравнений (6) для массивной ($u^i u^k g_{ik} = 1$) частицы. Это означает, что на покоящуюся относительно источника скалярного поля массивную частицу в пространстве-времени скалярного источника (4) не действуют гравитационные силы и согласно уравнениям (6) она будет покоиться в той точке пространства, в которой находилась в начальный момент времени.

Однако такое состояние неустойчиво. Как показывает детальный анализ, под действием малого возмущения массивная частица выходит из этого состояния и без действия сил негравитационной природы никогда в него не возвращается.

Решение уравнений (6) повторяет решение аналогичных уравнений, приведенных в работах [3–5], и показывает, что на любую массивную или безмассовую частицу, движущуюся нерадиально, действуют гравитационные силы отталкивания. При этом круговое движение относительно источника гравитационного поля невозможно. В результате действия этих сил частицы выталкиваются на пространственную бесконечность. Поэтому в окрестности скалярных источников должны возникать пустоты.

Поиск уникальных астрофизических объектов в новых экспериментах и анализ накопленного астрономами и астрофизиками материала наблюдений помогут пролить свет на природу гравитационного взаимодействия.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №98-02-17448а.

Список литературы

- [1] *А. А. Логунов, М. А. Мествришвили.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [2] *В. И. Денисов.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 144.
- [3] *В. И. Денисов.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 312.
- [4] *В. И. Денисов.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 337.
- [5] *И. П. Денисова.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 501.
- [6] *T. Piran.* Gen. Rel. Grav. 1997. V. 29. № 11. P. 1363.
- [7] *С. Чандрасекар.* Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986.
- [8] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 7.V.1998 г.