Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Адуков, О факторизации аналитических матриц-функций, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 324–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:45:25

© 1999 г.

В. М. Адуков*

О ФАКТОРИЗАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Предложен новый метод явного вычисления частных индексов и построения факторизации Винера–Хопфа аналитических матриц-функций, имеющий вычислительные преимущества по сравнению с ранее развитым методом автора. Предложенный метод применяется для нахождения делителей аналитической матрицы-функции, ответственных за нули ее определителя.

1. ВВЕДЕНИЕ

Краевая задача Римана для вектора, детально изученная в связи с исследованием систем сингулярных интегральных уравнений, в последние годы стала привычным аппаратом математической физики. Введение ее в обиход этой теории связано в основном с двумя важными работами: статьей [1], где существенно использовалась краевая задача Римана при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния, и статьей [2], в которой краевая задача Римана была положена в основу решения обратной задачи рассеяния для матричного дифференциального оператора.

Исследование задачи Римана в настоящее время принято проводить с помощью решения следующей факторизационной задачи.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий область D_+ . Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначим через D_- . Можно считать, что $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Пусть $a(t)$ – непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция порядка p .

Правой факторизацией Винера–Хопфа матрицы-функции $a(t)$ называется ее представление в виде

$$a(t) = r_-(t)d_r(t)r_+(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

где $r_{\pm}(t)$ – непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимые в область $D_{\pm}$ и обратимые там, $d_r(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_p}]$. Здесь $\rho_1, \dots, \rho_p$ – целые числа,

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия.
E-mail: adukov@math.tu-chel.ac.ru

называемые *правыми частными индексами* $a(t)$, причем их можно упорядочить по возрастанию: $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$.

Аналогично определяется *левая факторизация* $a(t)$:

$$a(t) = l_+(t)d_l(t)l_-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

$d_l(t) = \text{diag}[t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_p}]$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$, — *левые частные индексы* $a(t)$. Легко видеть, что

$$\sum_{j=1}^p \rho_j = \sum_{j=1}^p \lambda_j = \kappa,$$

где $\kappa = \text{ind}_\Gamma \det a(t)$ — индекс Коши определителя $a(t)$.

Известно, что факторизация Винера–Хопфа существует для матриц-функций с геллеровскими на контуре Γ элементами либо с элементами из алгебры Винера. Однако явных формул для факторизационных множителей и частных индексов в общем случае нет, что существенно сдерживает дальнейшие применения краевой задачи Римана.

Поэтому основной задачей в этой области является поиск случаев явного решения задачи факторизации. Один из таких случаев (мероморфной в области D_+ матрицы-функции) был установлен в работе [3]. Если ограничиться для простоты аналитическими матрицами-функциями, то оказывается, что явное решение задачи факторизации требует использования $2\kappa + 1$ моментов функции $a^{-1}(t)$ относительно контура Γ .

В этой работе предлагается метод, основанный на тех же идеях, что и в работе [3], но более простой с вычислительной точки зрения, поскольку он использует $2\kappa + 1$ моментов более простой матрицы-функции $\Delta_-^{-1}(t)a(t)$. Здесь $\Delta_-^{-1}(t)$ — скалярный многочлен от t^{-1} , являющийся множителем в факторизации Винера–Хопфа $\Delta(t) = \Delta_-(t)t^{-\kappa}\Delta_+(t)$ определителя $\Delta(t) = \det a(t)$.

2. ИНДЕКСЫ И СУЩЕСТВЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МАТРИЦ

В этом разделе развивается техника, необходимая для получения в явном виде факторизации Винера–Хопфа. Все построения носят чисто алгебраический характер. Доказательства утверждений этого раздела опущены, их можно найти в статьях [3, 4].

Прежде всего введем понятия индексов и существенных многочленов конечной последовательности матриц.

Обозначим через $\mathbb{C}^{p \times q}$ множество всех комплексных матриц размера $p \times q$. Для матрицы A мы будем обозначать через $\ker_R A$ ее правое ядро и $\ker_L A$ левое ядро:

$$\ker_R A = \{x \mid Ax = 0\}, \quad \ker_L A = \{y \mid yA = 0\}.$$

Пусть A — блочная матрица с блоками из $\mathbb{C}^{p \times p}$, имеющая блочные размеры $(n+1) \times (m+1)$. Разобьем строку $L \in \ker_L A$ на $n+1$ блоков:

$$L = (l_0 l_{-1} \dots l_{-n}),$$

и определим для L производящий векторный многочлен от переменной t^{-1} :

$$L(t) = l_0 + l_{-1}t^{-1} + \dots + l_{-n}t^{-n}.$$

Аналогично для столбца из правого ядра $\ker_R A$ определим производящий векторный многочлен от переменной t .

Пусть $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$ — конечная последовательность комплексных матриц порядка p . Образует семейство блочных теплицевых матриц

$$T_k = \|c_{i-j}\|_{\substack{i=k, k+1, \dots, n \\ j=0, 1, \dots, m+k}}$$

($-m \leq k \leq n$). Для того чтобы ввести понятия индексов и существенных многочленов последовательности, изучим структуру правого и левого ядер матрицы T_k .

Поскольку удобнее иметь дело не с векторами, а с производящими векторными многочленами, перейдем от пространств $\ker_R T_k$ и $\ker_L T_k$ к изоморфным пространствам $\mathcal{N}_k^R$ и $\mathcal{N}_k^L$ производящих векторных многочленов. Чтобы сделать это, введем операторы σ_R и σ_L . Для $p = 1$ оператор $\sigma_R = \sigma_L$ является функционалом Стильеса, используемым в теории ортогональных многочленов.

На пространстве рациональных матриц-функций вида

$$R(t) = \sum_{j=-n}^m r_j t^j, \quad r_j \in \mathbb{C}^{p \times l},$$

определим оператор

$$\sigma_R(R(t)) = \sum_{j=-n}^m c_{-j} r_j.$$

Мы используем обозначение σ_R для всех $l \geq 1$, поскольку это не вызывает недоразумений.

Через $\mathcal{N}_k^R$ ($-m \leq k \leq n$) обозначим пространство векторных многочленов вида

$$R(t) = \sum_{j=0}^{m+k} r_j t^j, \quad r_j \in \mathbb{C}^{p \times 1},$$

таких, что

$$\sigma_R(t^{-i} R(t)) = 0, \quad i = k, k+1, \dots, n.$$

Легко видеть, что $\mathcal{N}_k^R$ — пространство производящих многочленов векторов из $\ker_R T_k$. Для удобства положим $\mathcal{N}_{-m-1}^R = 0$ и обозначим $(n+m+2)p$ -мерное пространство всех столбцовых многочленов формальной степени $n+m+1$ через $\mathcal{N}_{n+1}^R$.

Аналогично на пространстве матриц-функций вида

$$L(t) = \sum_{j=-n}^m l_j t^j, \quad l_j \in \mathbb{C}^{l \times p},$$

определим оператор σ_L в пространство $\mathbb{C}^{l \times p}$:

$$\sigma_L\{L(t)\} = \sum_{j=-n}^m l_j c_{-j}.$$

Пространство $\ker_L T_k$ естественно изоморфно пространству $\mathcal{N}_k^L$ векторных многочленов от t^{-1} вида

$$L(t) = \sum_{j=0}^{n-k} l_j t^{-j}, \quad l_j \in \mathbb{C}^{1 \times p},$$

таких, что

$$\sigma_L\{t^{-i}L(t)\} = 0, \quad i = k, k-1, \dots, -m.$$

Положим $\mathcal{N}_{n+1}^L = 0$ и обозначим $(n+m+2)p$ -мерное пространство всех строчных многочленов от t^{-1} формальной степени $n+m+1$ через $\mathcal{N}_{-m-1}^L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если $\dim \mathcal{N}_{-m}^R = \dim \mathcal{N}_n^L = 0$, то последовательность $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$ будем называть регулярной.

Через d_k^R (d_k^L) обозначим размерность пространства $\mathcal{N}_k^R$ ($\mathcal{N}_k^L$). Пусть $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-1}^R$ ($-m \leq k \leq n+1$) и $\Delta_k^L = d_k^L - d_{k+1}^L$ ($-m-1 \leq k \leq n$). Используя формулу Грассмана, легко доказать, что для любой регулярной последовательности матриц справедливы неравенства

$$0 = \Delta_{-m}^R \leq \Delta_{-m+1}^R \leq \dots \leq \Delta_n^R \leq \Delta_{n+1}^R = 2p, \quad (3)$$

$$2p = \Delta_{-m-1}^L \geq \Delta_{-m}^L \geq \dots \geq \Delta_{n-1}^L \geq \Delta_n^L = 0. \quad (4)$$

Из неравенств (3) следует, что существуют $2p$ целых чисел $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{2p}$ таких, что

$$\begin{aligned} \Delta_{-m}^R &= \dots = \Delta_{\mu_1}^R = 0, \\ &\dots, \\ \Delta_{\mu_i+1}^R &= \dots = \Delta_{\mu_{i+1}}^R = i, \\ &\dots, \\ \Delta_{\mu_{2p}+1}^R &= \dots = \Delta_{n+1}^R = 2p. \end{aligned} \quad (5)$$

Если i -я строка в этих соотношениях отсутствует, считаем, что $\mu_i = \mu_{i+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Целые числа $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$, определенные соотношениями (5), будем называть индексами последовательности $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$.

Нетрудно показать, что

$$\sum_{j=1}^{2p} \mu_j = -\operatorname{ind} T_0 = (n-m)p.$$

Из определения пространств $\mathcal{N}_k^R$ легко видеть, что $\mathcal{N}_k^R$ и $t\mathcal{N}_k^R$ — подпространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$, причем размерность h_{k+1}^R дополнения H_{k+1}^R суммы $\mathcal{N}_k^R + t\mathcal{N}_k^R$ до всего пространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$ равна $\Delta_{k+1}^R - \Delta_k^R$. Отсюда и из соотношений (5) следует, что $h_{k+1}^R \neq 0$, только если $k = \mu_i$ ($i = 1, \dots, 2p$). В этом случае h_{k+1}^R совпадает с кратностью ν_i индекса μ_i . Поэтому для $k \neq \mu_i$ имеем

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = \mathcal{N}_k^R + t\mathcal{N}_k^R,$$

а для $k = \mu_i -$

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = \mathcal{N}_k^R + t\mathcal{N}_k^R + H_{k+1}^R.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Любые многочлены $R_i(t), \dots, R_{i+\nu_i-1}(t)$, образующие базис какого-либо дополнения $H_{\mu_i+1}^R$, будем называть правыми существенными многочленами последовательности, соответствующими индексу μ_i .

Таким образом, для любой регулярной последовательности мы определили $2p$ правых существенных многочленов $R_1(t), \dots, R_{2p}(t)$.

Аналогично для $k \neq \mu_i$ имеем

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = \mathcal{N}_k^L + t^{-1}\mathcal{N}_k^L,$$

а для $k = \mu_i -$

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = \mathcal{N}_k^L + t^{-1}\mathcal{N}_k^L + H_{k-1}^L.$$

Выбирая базисы для пространств $H_{\mu_i-1}^L$ ($1 \leq i \leq 2p$), мы получаем последовательность векторных многочленов $L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$, которые будем называть *левыми существенными многочленами* последовательности $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$.

Оказывается, что векторные многочлены

$$\{R_j(t), tR_j(t), \dots, t^{k-\mu_j-1}R_j(t)\}_{j=1,2,\dots,i}$$

являются производящими многочленами элементов базиса пространства $\ker_R T_k$ для $k \in (\mu_i; \mu_{i+1}]$, $1 \leq i \leq 2p$. Здесь мы положили $\mu_{2p+1} = n$.

Аналогично векторные многочлены

$$\{L_j(t), t^{-1}L_j(t), \dots, t^{-(\mu_j-k-1)}L_j(t)\}_{j=i,i+1,\dots,2p}$$

являются производящими многочленами элементов базиса пространства $\ker_L T_k$ для $k \in [\mu_{i-1}, \mu_i)$, $1 \leq i \leq 2p$, $\mu_0 = -m$.

В дальнейшем нам потребуется критерий, который позволял бы проверять, что заданные числа являются индексами, а заданные векторные многочлены суть существенные многочлены данной последовательности матриц. Такой критерий основан на проверке обратимости некоторых тестовых матриц.

Пусть $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$ – регулярная последовательность. Пусть $k_1, \dots, k_{2p}$ – целые числа такие, что $-m-1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{2p} \leq n+1$ и

$$\sum_{j=1}^{2p} k_j = -\operatorname{ind} T_0.$$

Пусть $U_1(t), \dots, U_{2p}(t); V_1(t), \dots, V_{2p}(t)$ – такие векторные многочлены, что $U_j(t) \in N_{k_j+1}^R$ и $V_j(t) \in N_{k_j-1}^L$, $1 \leq j \leq 2p$.

Числа $k_1, \dots, k_{2p}$ являются индексами, а многочлены $U_1(t), \dots, U_{2p}(t)$ – правыми существенными многочленами последовательности $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$ тогда и только тогда, когда обратима матрица

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_R \{t^{-n-1} U_1(t)\} & \dots & \tilde{\sigma}_R \{t^{-n-1} U_{2p}(t)\} \\ U_{1,0} & \dots & U_{2p,0} \end{pmatrix}.$$

Аналогично $k_1, \dots, k_{2p}$ – индексы, а $V_1(t), \dots, V_{2p}(t)$ – левые существенные многочлены последовательности тогда и только тогда, когда обратима матрица

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} V_{1,n-\kappa_1+1} & \tilde{\sigma}_L \{t^{-\kappa_1} V_1(t)\} \\ \vdots & \vdots \\ V_{2p,n-\kappa_{2p}+1} & \tilde{\sigma}_L \{t^{-\kappa_{2p}} V_{2p}(t)\} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{\sigma}_R, \tilde{\sigma}_L$ – операторы Стильтеса для последовательности $c_{-m}, \dots, c_0, \dots, c_n$, продолженной вправо произвольной матрицей c_{n+1} ; $U_{j,0}$ – старший коэффициент многочлена $U_j(t)$ и $V_{j,n-\kappa_j+1}$ – свободный член многочлена $V_j(t)$.

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Пусть $a(t)$ – матрица-функция, непрерывная и обратимая на контуре Γ и аналитическая продолжимая в область D_+ . Обозначим $\Delta(t) = \det a(t)$, и пусть

$$\Delta(t) = \Delta_-(t) t^\kappa \Delta_+(t)$$

– факторизация Винера–Хопфа $\Delta(t)$. Поскольку $b(t) = t^\kappa \Delta_-(t) a^{-1}(t)$ – аналитическая в D_+ матрица-функция, то, применив к ней лемму 1.1 статьи [3], легко получить следующие утверждения:

1) левые $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и правые $\rho_1, \dots, \rho_p$ частные индексы аналитической матрицы-функции $a(t)$ неотрицательны;

2) строка $\Delta_-(t)[r_-^{-1}(t)]_j$ есть векторный многочлен от t^{-1} степени не выше $\kappa - \rho_j$;

3) столбец $\Delta_-(t)[l_-^{-1}(t)]^j$ есть векторный многочлен от t^{-1} степени не выше $\kappa - \lambda_j$.

Здесь и далее для матрицы A мы обозначаем через $[A]_j$ ее j -ю строку, а через $[A]^j$ — j -й столбец.

Рассмотрим симметричную последовательность $c_{-\kappa}, \dots, c_0, \dots, c_\kappa$, составленную из моментов матрицы-функции $\Delta_-^{-1}(t)a(t)$ относительно контура Γ :

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-j-1} \Delta_-^{-1}(t) a(t) dt, \quad j = -\kappa, \dots, 0, \dots, \kappa.$$

При продолжении этой последовательности вправо условимся брать в качестве $c_{\kappa+1}$ соответствующий момент указанной матрицы-функции.

Легко видеть, что операторы σ_R и σ_L в этом случае действуют по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_R \{R(t)\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-1} \Delta_-^{-1}(t) a(t) R(t) dt, \\ \sigma_L \{L(t)\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-1} \Delta_-^{-1}(t) L(t) a(t) dt. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$L_{p+j}(t) = \Delta_-(t)[r_-^{-1}(t)]_j, \quad R_j(t) = t^{\kappa-\lambda_j+1} \Delta_-(t)[l_-^{-1}(t)]^j, \quad j = 1, \dots, p.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} L_{p+j}(t) &\in \mathcal{N}_{\rho_j-1}^L, \\ \sigma_L \{t^{-\rho_j} L_{p+j}(t)\} &= [r_+(0)]_j, \quad L_{p+j, \kappa-\lambda_j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, p; \\ R_j(t) &\in \mathcal{N}_{-\lambda_j+1}^R, \\ \sigma_R \{t^{-\kappa-1} R_j(t)\} &= [l_+(0)]^j, \quad R_{j,0} = 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из левой факторизации матрицы $a(t)$ следует, что

$$L_{p+j}(t) \Delta_-^{-1}(t) a(t) = t^{\rho_j} [r_+(t)]_j.$$

Поэтому

$$\sigma_L \{t^{-l} L_{p+j}(t)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{\rho_j-l-1} [r_+(t)]_j dt = 0$$

для $l = \rho_j - 1, \rho_j - 2, \dots, -\kappa$, а при $l = \rho_j$ получаем $\sigma_L \{t^{-\rho_j} L_{p+j}(t)\} = [r_+(0)]_j$. Поскольку степень векторного многочлена не больше $\kappa - \rho_j$, то $L_{p+j}(t) \in \mathcal{N}_{\rho_j-1}^L$ и старший коэффициент $L_{p+j, \kappa-\rho_j+1}$ этого многочлена равен нулю. Подобным же образом доказывается и вторая часть предложения.

Аналогичное утверждение имеет место и для подходящим образом исправленных многочленов Тейлора для векторных функций $[r_+^{-1}(t)]_j^j, [l_+^{-1}(t)]_j^j$. Это исправление производится следующим образом. Разложим аналитическую в D_+ векторную функцию $[r_+^{-1}(t)]_j^j$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$ и представим ее в виде

$$[r_+^{-1}(t)]_j^j = [(r_+^{-1}(t))_{\kappa+\rho_j+1}]_j^j + t^{\kappa+\rho_j+2} \phi_+^j(t).$$

Здесь $[(r_+^{-1}(t))_{\kappa+\rho_j+1}]_j^j$ — многочлен Тейлора степени $\kappa + \rho_j + 1$ для $[r_+^{-1}(t)]_j^j$, а $\phi_+^j(t)$ — векторная функция, аналитическая в D_+ и непрерывная в $D_+ \cup \Gamma$. Введем векторную функцию

$$\Phi^j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{\kappa+\rho_j+2} \frac{\Delta_-(\tau) l_-^{-1}(\tau) - \Delta_-(t) l_-^{-1}(t)}{(\tau - t) \Delta_-(\tau)} l_-(\tau) \phi_+^j(\tau) d\tau.$$

Легко видеть, что $\Phi^j(t)$ является векторным многочленом от t степени не больше $\kappa + \rho_j + 1$, у которого отличны от нуля разве лишь последние κ коэффициентов. Исправление $[(r_+^{-1}(t))_{\kappa+\rho_j+1}]_j^j$ произведем с помощью $\Phi^j(t)$, определив векторный многочлен

$$R_{p+j}(t) = [(r_+^{-1}(t))_{\kappa+\rho_j+1}]_j^j + \Phi^j(t), \quad j = 1, \dots, p,$$

формальной степени $\kappa + \rho_j + 1$.

Представив подобным образом $[l_+^{-1}(t)]_j^j$:

$$[l_+^{-1}(t)]_j^j = [(l_+^{-1}(t))_{\kappa+\lambda_j+1}]_j^j + t^{\kappa+\lambda_j+2} \psi_+^j(t),$$

и определив векторный многочлен от t :

$$\Psi^j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{\kappa+\lambda_j+2} \psi_+^j(\tau) r_-(\tau) \frac{\Delta_-(\tau) r_-^{-1}(\tau) - \Delta_-(t) r_-^{-1}(t)}{(\tau - t) \Delta_-(\tau)} d\tau,$$

исправим многочлен Тейлора $[(l_+^{-1}(t))_{\kappa+\lambda_j+1}]_j^j$ и определим векторный многочлен от t^{-1}

$$L_j(t) = t^{-(\kappa+\lambda_j+1)} ([l_+^{-1}(t))_{\kappa+\lambda_j+1}]_j^j + \Psi_j(t), \quad j = 1, \dots, p,$$

степени не выше $\kappa + \lambda_j + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} R_{p+j}(t) &\in \mathcal{N}_{\rho_j+1}^R, \\ \sigma_R\{t^{-\kappa-1}R_{p+j}(t)\} &= 0, \quad R_{p+j,0} = [r_+^{-1}(0)]^j, \quad j = 1, \dots, p; \\ L_j(t) &\in \mathcal{N}_{-\lambda_j-1}^R, \\ \sigma_L\{t^{\lambda_j}L_j(t)\} &= 0, \quad L_{j,\kappa+\lambda_j+1} = [l_+^{-1}(0)]_j, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения может быть проведено по схеме доказательства теоремы 1.2 статьи [3] и потому опущено.

Теперь можно связать частные индексы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $\rho_1, \dots, \rho_p$ и факторизационные множители $l_{\pm}(t)$, $r_{\pm}(t)$ аналитической матрицы-функции $a(t)$ с индексами и существенными многочленами последовательности $c_{-\kappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\kappa}$. Отметим, что одновременно используется и правая, и левая факторизации Винера–Хопфа функции $a(t)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Последовательность $c_{-\kappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\kappa}$ является регулярной последовательностью, индексы которой совпадают с числами $-\lambda_1, \dots, -\lambda_p$, $\rho_1, \dots, \rho_p$, а многочлены $L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$, $R_1(t), \dots, R_{2p}(t)$ — соответственно с ее левыми и правыми существенными многочленами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем прежде всего регулярность последовательности $c_{-\kappa}, \dots, c_0, \dots, c_{\kappa}$. Легко видеть, что $\Delta_{-}(t)l_{-}^{-1}(t)d_l^{-1}(t)$ есть матричный многочлен от t^{-1} степени не выше κ . Пусть $\Delta_{-}(t)l_{-}^{-1}(t)d_l^{-1}(t) = \alpha_0 + \alpha_{-1}t^{-1} + \dots + \alpha_{-\kappa}t^{-\kappa}$, тогда

$$\sigma_R\{\Delta_{-}(t)l_{-}^{-1}(t)d_l^{-1}(t)\} = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_{-1} + \dots + c_{\kappa}\alpha_{-\kappa}.$$

С другой стороны, учитывая левую факторизацию $a(t)$, имеем

$$\sigma_R\{\Delta_{-}(t)l_{-}^{-1}(t)d_l^{-1}(t)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-1}l_{+}(t) dt = l_{+}(0),$$

поэтому

$$\alpha_0 + \alpha_{-1}t^{-1} + \dots + \alpha_{-\kappa}t^{-\kappa} = l_{+}(0). \quad (6)$$

Пусть $x \in \ker_{\mathbb{L}} T_{\kappa}$, т.е. $xc_{-\kappa} = \dots = xc_{\kappa} = 0$. Умножая уравнение (6) слева на x , получаем $xl_{+}(0) = 0$, т.е. $x = 0$. Итак, $\ker_{\mathbb{L}} T_{\kappa} = 0$ и $\omega = 0$. Аналогично доказывается регулярность последовательности слева.

Обозначим $k_j = -\lambda_j$, $k_{p+j} = \rho_j$, $j = 1, \dots, p$. В силу выбранной упорядоченности частных индексов имеем $k_1 \leq \dots \leq k_{2p}$. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{2p} k_j = 0 = -\text{ind } T_0.$$

Так как последовательность регулярна, то мы можем применить критерий существенности. Составив тестовые матрицы

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} l_+^{-1}(0) & 0 \\ 0 & r_+(0) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_R = \begin{pmatrix} l_+(0) & 0 \\ 0 & r_+^{-1}(0) \end{pmatrix}$$

и убедившись в их обратимости, получаем утверждение теоремы.

Существенные многочлены, построенные в предыдущей теореме, обладают дополнительным свойством, важным для дальнейшего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Существенные многочлены $R_1(t), \dots, R_p(t), L_{p+1}(t), \dots, L_{2p}(t)$ такие, что: 1) свободные члены многочленов $R_1(t), \dots, R_p(t)$ равны нулю; 2) старшие коэффициенты многочленов $L_{p+1}(t), \dots, L_{2p}(t)$ равны нулю, будем называть факторизационными существенными многочленами.

Существование факторизационных существенных многочленов у последовательности $c_{-\kappa}, \dots, c_0, \dots, c_\kappa$ доказано в теореме 3.1. Оказывается, что с помощью любых факторизационных существенных многочленов можно восстановить факторизационные множители $l_+(t), r_+(t)$ и тем самым построить факторизации (1), (2). Окончательный результат выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $a(t)$ – матрица-функция, аналитическая в области D_+ , непрерывная в области $D_+ \cup \Gamma$ и обратимая на контуре Γ . Пусть $\Delta(t) = \Delta_-(t)t^\kappa \Delta_+(t)$ – факторизация Винера–Хонфа определителя $\det a(t)$. Составим из моментов матрицы-функции $\Delta_-^{-1}(t)a(t)$ относительно контура Γ последовательность $c_{-\kappa}, \dots, c_0, \dots, c_\kappa$. Тогда эта последовательность регулярна и обладает факторизационными существенными многочленами. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$ – индексы последовательности, а $R_1(t), \dots, R_p(t), L_{p+1}(t), \dots, L_{2p}(t)$ – любые ее факторизационные существенные многочлены. Тогда левые $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и правые $\rho_1, \dots, \rho_p$ частные индексы и факторизационные множители $l_\pm(t), r_\pm(t)$ матричного многочлена $a(t)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -\mu_j, & \rho_j &= \mu_{p+j}, & j &= 1, \dots, p, \\ l_-(t) &= t^{\kappa+1} \Delta_-(t) d_l^{-1}(t) \mathcal{R}^{-1}(t), & l_+(t) &= t^{-\kappa-1} \Delta_-(t) a(t) \mathcal{R}, \\ r_-(t) &= \Delta_-(t) \mathcal{L}^{-1}(t), & r_+(t) &= \Delta_-^{-1}(t) \mathcal{L}(t) a(t), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{R}(t) = (R_1(t), \dots, R_p(t)), \quad \mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} L_{p+1}(t) \\ \vdots \\ L_{2p}(t) \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать лишь утверждение, что факторы $l_+(t)$, $r_+(t)$ можно восстановить по любым факторизационным существенным многочленам.

Прежде всего покажем, что если $R_1(t), \dots, R_p(t)$ – факторизационные существенные многочлены и $\hat{R}_1(t), \dots, \hat{R}_p(t)$ – любые другие факторизационные существенные многочлены, то

$$\hat{R}_j(t) = \sum_{i=1}^p q_{ij}(t) R_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

где $q_{ij}(t)$ – скалярный многочлен от t степени не выше $\mu_j - \mu_i$, если $\mu_j - \mu_i \geq 0$, и $q_{ij}(t) \equiv 0$, если $\mu_j - \mu_i < 0$. При $\mu_j < \mu_{p+1}$ это сразу следует из структуры ядра матрицы T_{μ_j+1} . Пусть $\mu_j = \mu_p = \mu_{p+1}$. В этом случае $\mu_p = \mu_{p+1} = 0$. Пусть $\mu_p = \dots = \mu_{p+s} = 0 < \mu_{p+s+1}$. Если $\hat{R}_j(t) \in \mathcal{N}_1^R$ – любой другой правый факторизационный существенный многочлен, соответствующий индексу $\mu_j = 0$, то, разложив его по базису $\mathcal{N}_1^R$, имеем

$$\hat{R}_j(t) = \sum_{i=1}^p q_{ij}(t) R_i(t) + q_{p+1,j} R_{p+1}(t) + \dots + q_{p+s,j} R_{p+s}(t).$$

Здесь $q_{ij}(t)$ – многочлен степени не выше $\mu_j - \mu_i$ для $i = 1, \dots, p$ и q_{ij} – константы для $i = p+1, \dots, p+s$. Учитывая, что для факторизационных существенных многочленов свободные члены равны нулю, получаем

$$q_{p+1,j} R_{p+1,0} + \dots + q_{p+s,j} R_{p+s,0} = 0. \quad (8)$$

Однако для факторизационных существенных многочленов обратимая матрица Λ_R из критерия существенности является блочно-треугольной. Поэтому свободные члены существенных многочленов $R_{p+1}(t), \dots, R_{p+s}(t)$ должны быть линейно независимы. Значит, равенство (8) возможно, только если $q_{p+1,j} = \dots = q_{p+s,j} = 0$. Таким образом, разложение (7) полностью доказано.

Образуем из новых факторизационных существенных многочленов матрицу-функцию $\hat{\mathcal{R}}(t) = (\hat{R}_1(t), \dots, \hat{R}_p(t))$. Из разложения (7) следует, что

$$\hat{\mathcal{R}}(t) = \mathcal{R}(t) Q(t),$$

где $Q(t)$ – матричный многочлен, элементы которого удовлетворяют условию $q_{ij}(t) \equiv 0$, если $\mu_j - \mu_i < 0$, и $q_{ij}(t)$ – многочлен от t формальной степени $\mu_j - \mu_i$, если $\mu_j - \mu_i \geq 0$. Точно так же можно получить представление

$$\mathcal{R}(t) = \hat{\mathcal{R}}(t) \hat{Q}(t),$$

где $\hat{Q}(t)$ имеет такую же структуру, что и $Q(t)$.

В теореме 3.1 было доказано существование обратной матрицы-функции $\mathcal{R}(t)$. Поэтому

$$Q(t)\widehat{Q}(t) = I_p,$$

т.е. матричный многочлен $Q(t)$ обратим. Обозначим

$$\hat{l}_-(t) = t^{\kappa+1}\Delta_-(t)d_l^{-1}(t)\widehat{\mathcal{R}}^{-1}(t).$$

Тогда матрица

$$\hat{l}_-(t) = d_l^{-1}(t)Q^{-1}(t)d_l(t)l_-(t)$$

удовлетворяет условиям теоремы об общем виде факторизационных множителей левой факторизации [5]. Это означает, что $\hat{l}_-(t)$ также является факторизационным множителем. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Задача факторизации Винера–Хопфа тесно связана со спектральной факторизацией аналитических матриц-функций $a(t)$ (в частности, матричных многочленов), т.е. с задачей выделения делителя $a(t)$, ответственного за часть спектра $a(t)$ [6, 7]. Эта задача также весьма актуальна в теории дискретных аналогов интегрируемых систем, где важную роль играет факторизация матричных многочленов [8]. Для простоты мы ограничимся выделением делителей $a(t)$, ответственных только за одну точку спектра $a(t)$. В этом случае последовательность составляется из коэффициентов Тейлора матрицы-функции $a(t)$, а существенные многочлены последовательности тесно связаны с жордановыми цепочками $a(t)$.

Пусть $a(t)$ – матрица-функция, аналитическая в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$, и $\det a(t)$ не равен нулю тождественно. Точки, в которых $\det a(t) = 0$, назовем собственными значениями $a(t)$, а все остальные точки – регулярными. Пусть t_0 – собственное значение $a(t)$ алгебраической кратности κ . Составим последовательность $0, \dots, 0, c_0, \dots, c_\kappa$ из коэффициентов Тейлора $c_j = 1/j! a^{(j)}(t_0)$ в точке t_0 . Здесь $a^{(j)}(t_0)$ – значение j -й производной $a(t)$ в точке t_0 . Индексы этой последовательности назовем индексами аналитической матрицы-функции $a(t)$ в точке t_0 . Очевидно, что для регулярных точек и только для них все индексы равны нулю.

Пусть $\mathcal{R}(t), \mathcal{L}(t)$ – матрицы, составленные из факторизационных существенных многочленов последовательности. Пусть Γ – любой простой замкнутый контур, окружающий точку t_0 , такой, что внутри него нет других собственных значений $a(t)$. Легко видеть, что для этого контура $\Delta_-(t) = 1$ и, следовательно, моменты $\Delta_-^{-1}(t)a(t)$ совпадают с коэффициентами Тейлора $a(t)$ в точке t_0 . Применение теоремы 3.2 дает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть t_0 – собственное значение аналитической матрицы-функции $a(t)$ алгебраической кратности κ . Тогда $r(t) = (t - t_0)^{\kappa+1}\mathcal{R}^{-1}(t)$ является матричным многочленом от t таким, что $a(t) = b(t)r(t)$. Здесь

$b(t) = (t - t_0)^{-\kappa-1}a(t)\mathcal{R}(t)$ – аналитическая в D матрица-функция, причем t_0 – ее регулярная точка.

Аналогично $a(t) = l(t)c(t)$, где $l(t) = \mathcal{L}^{-1}(t)d_r(t)$ – матричный многочлен от t и $c(t) = d_r^{-1}(t)\mathcal{L}(t)a(t)$ – аналитическая матрица-функция, для которой t_0 – регулярная точка.

С помощью предложенного в данной статье метода можно также указать необходимые и достаточные условия существования линейного делителя матрицы-функции $a(t)$, ответственного за нуль ее определителя. При этом не предполагается, что делитель является регулярным, т.е. имеет обратимый старший коэффициент.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть аналитическая в D матрица-функция $a(t)$ имеет в точке $t_0 \in D$ нуль определителя кратности $\kappa > 0$. Тогда, для того чтобы существовал линейный правый (левый) делитель $r(t)$ ($l(t)$) матрицы-функции $a(t)$ такой, что $\det r(t) = (t - t_0)^\kappa$ ($\det l(t) = (t - t_0)^\kappa$), необходимо и достаточно, чтобы индексы $\mu_1, \dots, \mu_p$ ($\mu_{p+1}, \dots, \mu_{2p}$) матрицы-функции $a(t)$ в точке t_0 были равны -1 или 0 (1 или 0). При этом делитель является регулярным тогда и только тогда, когда $\kappa = p$.

Эти результаты легко переносятся и на общий случай делителя, ответственного за часть спектра $a(t)$.

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 3. С. 13–22.
- [2] А. Б. Шабат. Дифф. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1824–1834.
- [3] В. М. Адуков. Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 1. С. 54–74.
- [4] V. M. Adikov. Linear Algebra and Its Appl. 1998. V. 274. P. 85–124.
- [5] И. Ц. Гохберг. УМН. 1964. Т. 19. № 1. С. 71–124.
- [6] А. С. Маркус. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
- [7] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. Matrix polynomials. N. Y.: Academic Press, 1982.
- [8] А. П. Веселов. Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 38–49.