Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Борисов, С. А. Зыков, Безотражательные потенциалы уравнения синус-Гордон с бесконечным спектром, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 337–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:30:33

© 1999 г.

А. Б. Борисов*, С. А. Зыков*

БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН С БЕСКОНЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

С помощью одевающих цепочек построены самоподобные по отношению к преобразованиям Дарбу безотражательные потенциалы L -оператора, ассоциированного с уравнением синус-Гордон. Эти потенциалы обладают бесконечным спектром в виде геометрической прогрессии. Численными методами показано, что данные потенциалы имеют локализованный вид с модулированными “хвостами”.

1. В последние годы были найдены новые интересные потенциалы для одномерного уравнения Шредингера, которые, как и гармонический осциллятор, имеют бесконечный спектр собственных значений. Подобные результаты представляют несомненный интерес не только для разнообразных физических приложений в нелинейной квантовой оптике и наноэлектронике [1], но и для развития спектральной теории операторов и теории солитонов. В работах [2, 3] было найдено нелинейное обобщение подхода Фока и получен обширный класс потенциалов с бесконечным спектром. Эти потенциалы включают в себя эквидистантные спектры со щелью, спектры, являющиеся объединением трех эквидистантных последовательностей с произвольно смещенными основными состояниями, и некоторые другие типы спектров.

С точки зрения математической физики наиболее эффективный подход к изучению потенциалов с бесконечным точечным спектром был предложен в работах [4, 5], основанных на методе одевающих цепочек. Данный метод является прямым обобщением метода преобразований Дарбу и квантово-механического метода факторизации [6, 7]. В методе одевающих цепочек задача нахождения потенциала с бесконечным спектром $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$, сведена к решению бесконечной системы уравнений типа Риккати для логарифмической производной волновой функции $f_j = \ln(\psi(\lambda = \lambda_j))_x$, содержащей λ_j в качестве параметров. Так, решения замкнутой цепочки $f_j = f_{j+N}$, $\lambda_{j+N} = \lambda_j + \alpha$, как показано в работах [5, 8], имеют дискретный спектр, состоящий из N арифметических прогрессий с разностью α . Условие $f_{j+1}(x) = qf_j(qx)$, где $q < 1$, приводит к классу самоподобных потенциалов $u(x)$ с бесконечным дискретным спектром $\lambda_j = q^{2j}\lambda_0$ [4]. Такие самоподобные потенциалы имеют медленно спадающее асимптотическое поведение на бесконечности $u(x) = O(x^{-2})$, $x \rightarrow \pm\infty$.

*Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: Borisov@imp.uran.ru; Serg@imp.uran.ru

Рис. 1

Целью данной работы является получение нового класса потенциалов с бесконечным спектром для спектральной задачи, ассоциированной с уравнением синус-Гордон

$$u_{x,t} = \sin u. \quad (1)$$

Известно, что 2π -кинк и бризер являются простейшими солитонными решениями этого уравнения. В теории нелинейных явлений эти солитоны могут быть получены прямыми методами (метод Хироты, бэкклунд-преобразование, преобразование Дарбу) или методом обратной задачи рассеяния. В этом методе уравнение синус-Гордон связано с двумя линейными дифференциальными операторами

$$\Psi_x = \left(\frac{i}{2} u_x \sigma_1 + i \lambda \sigma_3 \right) \Psi = L(u, \lambda) \Psi, \quad (2)$$

$$\Psi_t = \frac{(\sin u) \sigma_2 + (\cos u) \sigma_3}{4i\lambda} \Psi \equiv A(u, \lambda) \Psi \quad (3)$$

(λ – спектральный параметр, σ_i – матрицы Паули), условие совместности которых $L_t - A_x + [L, A] = 0$ эквивалентно этому уравнению.

Солитонные решения связаны с дискретным спектром L -оператора [9]. Так, 2π -кинку

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(\exp \left\{ \frac{t}{2\lambda_1} + 2(x - x_0)\lambda_1 \right\} \right)$$

(рис. 1, где $t = x_0 = 0$) соответствует одно дискретное собственное значение $\lambda = -i\lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ оператору L . Решению типа бризера

$$u(x, t) = -4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_I \sin \left(\frac{t\lambda_R}{2|\lambda|^2} - 2x\lambda_R + \phi_0 \right)}{\lambda_R \operatorname{ch} \left(2\lambda_I(x - x_0) + \frac{t\lambda_I}{2|\lambda|^2} \right)} \right)$$

Рис. 2

(рис. 2, где положено $\lambda_R = 4$, $\lambda_I = -1$, $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0$) соответствуют два собственных значения $\lambda_{1,2} = \pm\lambda_R + i\lambda_I$.

В начале данной статьи мы обсуждаем трансформационные свойства матрицы рассеяния относительно дарбу-преобразований и находим бесконечную x -одевающую цепочку для спектрального оператора (2), ассоциированного с уравнением синус-Гордон. Далее мы полагаем, что дарбу-преобразование потенциалов и их собственных значений является скейлинг-преобразованием. Показано, что такая процедура замыкания сводит цепочку к нелинейному функциональному дифференциальному уравнению (25) для функции f_0 (см. далее). Явный вид потенциала $u_x(x, t)$ определяется при помощи этой функции:

$$u_x(x, t) = 2i(\sin f_0)\lambda_0 - f_{0,x}. \quad (4)$$

Методом одевающих цепочек доказано, что полученный в результате этой процедуры потенциал $u_x(x, t)$ имеет бесконечное число собственных значений $\lambda = \lambda_j$ в L -операторе (2), образующих геометрическую прогрессию $\lambda_j = q^j \lambda_0$ ($0 < q < 1$, $j = 0, 1, \dots$). Мы показали, что этот потенциал ведет себя асимптотически как

$$u_x(x) = \frac{\alpha}{x} + O(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

и нашли его форму численным методом. Оказывается, что потенциал $u_x(x)$ имеет локализованную “колоколообразную” форму с осцилляциями при больших значениях x . Возможность исследования динамики такого солитона кратко обсуждается в конце статьи.

2. Напомним некоторые известные результаты спектральной теории [10, 11] оператора (2). Пусть потенциал u_x принадлежит пространству $L^1(R)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x dx < \infty. \quad (6)$$

Тогда существуют две матрицы Йоста Φ и Ψ с асимптотическим поведением

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow e^{ix\lambda\sigma_3}, & x \rightarrow -\infty, \\ \Psi &\equiv (\psi_1, \psi_2) \rightarrow e^{ix\lambda\sigma_3}, & x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

которые связаны матрицей рассеяния T :

$$\Phi = \Psi T, \quad T = \begin{pmatrix} a(-\lambda) & b(\lambda) \\ -b(-\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \det T = 1, \quad \operatorname{Im} \lambda = 0. \quad (8)$$

Вектор-функции $\psi_1 e^{-ix\lambda}$, $e^{ix\lambda} \varphi_2$ непрерывны по λ в замкнутой области $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ и аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Аналогичными свойствами обладают функции $e^{ix\lambda} \psi_2$, $\varphi_1 e^{-ix\lambda}$, $a(\lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Точкам дискретного спектра $\lambda = \lambda_j$ ($\operatorname{Im} \lambda < 0$) отвечают нули функции $a(\lambda)$, в которых выполняется соотношение $\varphi_1(\lambda_j) = c_j \psi_2(\lambda_j)$. Множество нулей функции $a(\lambda)$ не более чем счетно и может иметь предельные точки только на вещественной оси. Многосолитонным решениям уравнения синус-Гордон (1) соответствуют потенциалы $u_x(x, t)$, для которых спектр оператора L (2) состоит из простых собственных значений и коэффициент матрицы рассеяния $b(\lambda)$ равен нулю.

Новые типы потенциалов с бесконечным числом собственных значений были получены нами с помощью дарбу-преобразований. Преобразование Дарбу определяется матрицей $W(\lambda, \lambda_0, x)$ (λ_0 – параметр преобразования),

$$\tilde{\Psi}(\lambda, x) = W(\lambda, \lambda_0, x) \Psi(\lambda, x), \quad \tilde{\Psi}_x(\lambda, x) = L(\tilde{u}, \lambda) \tilde{\Psi}, \quad (9)$$

которая связывает фундаментальные матрицы решений $\tilde{\Psi}$ и Ψ уравнения (2) с потенциалами $\tilde{u}$ и u , соответственно, при одном и том же значении спектрального параметра λ . Ее явный вид может быть получен из определяющего уравнения

$$W_x = L(\tilde{u}, \lambda)W - WL(u, \lambda). \quad (10)$$

Нетрудно показать, что

$$W(\lambda, \lambda_0, x) = i\lambda_0(-i(\cos f) \operatorname{Id} + (\sin f)\sigma_1) + \lambda\sigma_3, \quad (11)$$

где функция $\gamma \equiv e^{-if}$ подчиняется уравнению Риккати

$$\gamma_x(x, t) = i\lambda_0(-1 + \gamma(x, t)^2) + i\gamma(x, t)u_x(x, t) \quad (12)$$

и связывает “новый” потенциал $\tilde{u}$ со “старым” u соотношением

$$\tilde{u}_x(x, t) = -2f_x(x, t) + u_x(x, t). \quad (13)$$

Уравнения Дарбу преобразований (12), (13) совпадают с известными для модели синус-Гордон [12] уравнениями при замене переменных

$$\gamma = \frac{-\Psi_1(\lambda_0) + \Psi_2(\lambda_0)}{\Psi_1(\lambda_0) + \Psi_2(\lambda_0)}, \quad \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \equiv \Psi.$$

Итак, по данному потенциалу $u_x(x, t)$ и решению f уравнения (12) можно получить новое решение уравнения (2) с тем же значением спектрального параметра λ . При рекуррентном применении этой процедуры удобно ввести обозначения $u = u_0$, $\tilde{u} = u_1$, $f = f_0, \dots$ и рассмотреть серию операторов

$$L_k = i\lambda\sigma_3 + \frac{i}{2}\sigma_1(u_{k,x}),$$

каждый из которых связан с предыдущим дарбу-преобразованием

$$u_{1+k,x}(x, t) = -2f_{k,x}(x, t) + u_{k,x}(x, t), \quad (14)$$

где функции f_k определяются уравнением

$$f_{k,x} = 2i(\sin f_k)\lambda_k - u_{k,x}. \quad (15)$$

При этом матрица W_k связывает фундаментальные матрицы решений Ψ_{k+1} ($\Psi_{k+1,x} = L(u_{k+1}, \lambda)\Psi_{k+1}$) и Ψ_k на каждом шаге дарбу-преобразований:

$$W_k \equiv W(\lambda, \lambda_k, x) = i\lambda_k(-i(\cos f_k)\text{Id} + (\sin f_k)\sigma_1) + \lambda\sigma_3. \quad (16)$$

Трансформационные свойства матрицы рассеяния могут быть найдены с помощью матрицы W . Для убывающих потенциалов u_x класса $L^2(\mathbf{R})$ мы рассмотрим далее случай, когда

$$f_k \rightarrow n\pi, \quad x \rightarrow -\infty; \quad f_k \rightarrow m\pi, \quad x \rightarrow +\infty \quad (n \in \mathbf{Z}, \quad m \in \mathbf{Z}). \quad (17)$$

Обычным методом итераций можно показать, что в этом случае при $\lambda \neq 0$ существуют функции Йоста, аналитические свойства которых совпадают с описанными ранее и $a(\lambda) \rightarrow 1$, $b(\lambda) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Функции Йоста Φ_k , Ψ_k и Φ_{k+1} , Ψ_{k+1} для операторов L_k , L_{k+1} , соответственно, связаны простыми соотношениями

$$\Phi_{k+1} = W_k(\lambda, \lambda_0)\Phi_k W_{k-}^{-1}(\lambda, \lambda_0), \quad \Psi_{k+1} = W_k(\lambda, \lambda_0)\Psi_k W_{k+}^{-1}(\lambda, \lambda_0), \quad (18)$$

которые и определяют изменение матрицы рассеяния $T_k = \Psi_k^{-1}\Phi_k$ при преобразовании Дарбу

$$T_{k+1}(\lambda) = W_{k+}T_k(\lambda)W_{k-}. \quad (19)$$

Здесь $W_{k\pm} = W_k(\lambda, \lambda_0, x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Отсюда сразу следует, что

$$a_{k+1}(\lambda) = \frac{(-\lambda + (-1)^m \lambda_k)(\lambda + (-1)^n \lambda_k)a_k(\lambda)}{-\lambda^2 + \lambda_k^2}, \quad (20)$$

$$b_{k+1}(\lambda) = \frac{(\lambda + (-1)^m \lambda_k)(\lambda + (-1)^n \lambda_k)b_k(\lambda)}{-\lambda^2 + \lambda_k^2}. \quad (21)$$

Одевающая цепочка может быть найдена из соотношений (14), (15). Мы получаем бесконечную x -цепочку

$$f_{k+1,x} + f_{k,x} = -2(\sin f_k)i\lambda_k + 2(\sin f_{1+k})i\lambda_{1+k}, \quad (22)$$

которая является динамической системой, если на нее наложены самосогласованные условия замыкания. Подобные цепочки были получены и исследованы в ряде работ [4, 5, 8, 13].

3. В данной статье представлен случай нетривиального замыкания, связанный с инвариантностью¹⁾ уравнения синус-Гордон относительно преобразований группы Лоренца

$$x \rightarrow qx, \quad t \rightarrow \frac{t}{q}. \quad (23)$$

Мы используем условия замыкания

$$f_{1+k}(x) = f_k(qx), \quad \lambda_{1+k} = q\lambda_k, \quad (24)$$

и, следовательно, потенциал $u_{k,x}$ согласно (15) самоподобен при дарбу-преобразованиях, т.е. $u_{k+1,x}(x) = qu_{k,x}(qx)$. Явный вид этого потенциала определяется из уравнений (15), (22), где функция $f_k(x)$ удовлетворяет функциональному дифференциальному уравнению

$$(f_k(x))_x + (f_k(qx))_x = 2iq \sin(f_k(qx))\lambda_k - 2 \sin(f_k(x))i\lambda_k. \quad (25)$$

Из соотношений (2) и (24) следует, что функции Йоста и матрица рассеяния инвариантны при дарбу-преобразованиях:

$$\Phi_{k+1}\left(q\lambda, \frac{x}{q}\right) = \Phi_k(\lambda, x), \quad \Psi_{1+k}\left(q\lambda, \frac{x}{q}\right) = \Psi_k(\lambda, x), \quad T_{k+1}(q\lambda) = T_k(\lambda).$$

Сравнивая эти соотношения с формулой (21), мы находим при $m = 0$, $n = 1$ функциональные уравнения для коэффициентов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$:

$$a_{1+k}(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_k)a_k(\lambda)}{\lambda + \lambda_k}, \quad b_{1+k}(\lambda) = -b_k(\lambda). \quad (26)$$

Их решения при условиях $0 < q < 1$, $a_k(\lambda) \rightarrow 1$, $b_k(\lambda) \rightarrow 0$, когда $|\lambda| \rightarrow \infty$, приводят к безотражательному потенциалу $u_x = u_{0,x}$ с коэффициентами матрицы рассеяния

$$b(\lambda) \equiv 0, \quad a(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \frac{q^k \lambda_0}{\lambda}}{1 + \frac{q^k \lambda_0}{\lambda}}.$$

¹⁾Возможность использования классических симметрий для замыкания одевающих цепочек отмечалась в работе [14].

Рис. 3

Рис. 4

Таким образом, явная форма потенциала со спектром, образующим геометрическую прогрессию, может быть определена в результате решения уравнения (25) при $k = 0$. С этой целью мы использовали численные вычисления модифицированным методом Эйлера.

В предположении гладкости в начале координат функция f аппроксимировалась полиномами в ее окрестности. Коэффициенты разложения определялись из уравнения (25) (при этом значение $f(0)$ являлось начальным для задачи). Это позволяло найти значения функции и ее производных в некоторой точке x_0 . Далее мы находили в окрестности этой точки снова полиномиальную аппроксимацию функции $f(x)$. Рекуррентное применение этой процедуры в точках $x_0 + n\Delta x$ позволило последовательно определять величины f для все больших значений $|x|$. Отметим, что применение аппроксимаций Паде для комплексных значений x указывало, как и в работе [4], на существование простых полюсов, положение которых зависит от q : при $q \rightarrow 0$ они движутся к полюсам функции $2 \arctg e^x$, описывающей кинк. Для малых значений q профиль функции $u_x(x)$ почти не отличается от профиля кинка. Этот профиль изображен точками ($q = 2^{-12}$) на рис. 3.

Рис. 5

Рис. 6

Тонкая кривая соответствует кинке ($q = 0$). На рис. 3 положено $f(0) = \pi/2$, $\lambda_0 = -i$, $x_0 = 3/4$, $\Delta x = 1/8$. С увеличением q ширина колоколообразного профиля потенциала увеличивается (рис. 4) и наблюдается спадание потенциала на “хвостах” (как $1/x$), которое модулируется периодическими осцилляциями (рис. 5).

На рис. 4 взяты два случая $q = 0, 1$ (более мелкие точки) и $q = 0, 7$ (более крупные точки). На рис. 5 $q = 1/10$. Остальные параметры такие же, как и на рис. 3. Появление подобных модуляций отмечалось в работе [4] для потенциалов уравнения Шредингера с бесконечным дискретным спектром и исследовалось в работе [15] методом обратной задачи рассеяния в классе потенциалов, отличных от самоподобных. Линеаризуя уравнение (25) для больших значений x и решая соответствующие функциональные уравнения,

Рис. 7

мы показали, что асимптотическое поведение функции f имеет вид

$$f \rightarrow \frac{\alpha_+(\ln x)}{x} + \frac{\beta_+(\ln x)}{x^2} + \dots, \quad x \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$f \rightarrow \pi - \frac{\alpha_-(\ln x)}{x} - \frac{\beta_-(\ln x)}{x^2} - \dots, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (28)$$

где $\alpha_{\pm}(y)$, $\beta_{\pm}(y)$ – периодические функции с периодом $-\ln q$. Такое поведение согласуется с численными расчетами (рис. 6 и 7).

На рис. 6 изображен профиль функции f при $f(0) = \pi/2$, $q = 1/10$, $\lambda_0 = -i$, $x_0 = 3/4$, $\Delta x = 1/8$.

На рис. 7 показано асимптотическое поведение функции $xf(x)$ при тех же значениях параметров. При начальных условиях $f(0)$, отличных от $\pi/2$, центр потенциала сдвигается. С точки зрения теории солитонов рассматриваемый потенциал представляет собой нелинейную суперпозицию бесконечного числа солитонов со спектром $\lambda_n = \{\lambda_0, q\lambda_0, q^2\lambda_0, \dots\}$.

Отметим, что такой потенциал не является единственным потенциалом с бесконечным спектром. С помощью одевающей цепочки нетрудно получить функциональное дифференциальное уравнение для функции $h_k = f_k + f_{k+1}$, которая определяет самоподобный при двойном дарбу-преобразовании потенциал $u_{k+2,x}(x, t) = qu_{k,x}(qx, t/q)$, совпадающий при $q = 0$ с бризерным решением.

4. В заключение заметим, что полученный профиль солитона может быть выбран в качестве начальных данных $u_x(x) \equiv u_x(x, t = 0)$ для численного решения уравнения синус-Гордон. Для описания динамики такого солитона можно использовать то обстоятельство, что в методе одевающих цепочек динамика по независимым переменным x и t разделяется. С помощью A -оператора (3) и матрицы W (11) нетрудно найти динамические уравнения для поля $f(x, t)$ (t -цепочка) [16]:

$$-\cos(f_k + f_{k+1})\lambda_k(f_{k,t}) - \sin(f_k + f_{k+1})\sqrt{1 - \lambda_k^2(f_{k,t})^2} + \lambda_{1+k}(f_{k+1,t}) = 0. \quad (29)$$

При этом поля $u_k(x, t)$ определяются уравнением

$$u_k(x, t) = f_k - \arcsin(\lambda_k f_{k,t}), \quad (30)$$

которое согласовано с уравнением (13). Тогда с помощью условий замыкания (24) мы получаем второе нелинейное функциональное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & -\cos\left(f_k(x, t) + f_k\left(qx, \frac{t}{q}\right)\right)\lambda_k(f_k(x, t))_t - \\ & -\sin\left(f_k(x, t) + f_k\left(qx, \frac{t}{q}\right)\right)\sqrt{1 - \lambda_k^2 f_k(x, t)_t^2} + q\lambda_k\left(f_k\left(qx, \frac{t}{q}\right)\right)_t = 0, \end{aligned}$$

решение которого по формуле (30) определяет динамику солитона с бесконечным спектром. Подробные результаты численных расчетов будут приведены в другой работе.

Благодарности. Авторы признательны А. Б. Шабату и А. Г. Шагалову за интерес к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 97-01-00431.

Список литературы

- [1] *M. M. Nieto, D. R. Truax.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 2843.
- [2] *С. Ю. Дубов, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин.* ЖЭТФ. 1992. Т. 102. Вып. 3(9). С. 814; *S. Yu. Dubov, V. M. Eleonskii, N. E. Kulagin.* Chaos. 1994. V. 4(1). P. 47.
- [3] *В. М. Елеонский, В. Г. Королев.* ЖЭТФ. 1996. Т. 110. Вып. 6(12). С. 1967.
- [4] *А. Дегасперис, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 230.
- [5] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ. и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1.
- [6] *М. Ф. Морс, Г. Фешбах.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958.
- [7] *Х. Грин.* Матричная квантовая механика. М.: Мир, 1968.
- [8] *J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 522.
- [9] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [10] *Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1986.
- [11] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Мир, 1986.
- [12] *V. B. Matveev, M. A. Salle.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
- [13] *V. E. Adler, I. T. Habibullin.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6717.
- [14] *А. Б. Шабат.* Частное сообщение.
- [15] *V. Yu. Novokshenov.* Physica D. 1995. V. 87. P. 109.
- [16] *А. Б. Борисов, С. А. Зыков.* ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 199.