Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыльшин, О спектре лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 347–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:46:41

© 1999 г.

Д. И. Борисов*, Р. Р. Гадымльшин†

О СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА С ЧАСТО МЕНЯЮЩИМСЯ ТИПОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрена краевая задача для лапласиана в двумерной области с часто меняющимся типом граничных условий. Построены первые члены асимптотик собственных значений и соответствующих собственных функций в случае, если предельной задачей является третья краевая задача.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается лапласиан в двумерной ограниченной области с часто меняющимся типом граничного условия. Вопросы сходимости решений подобных задач рассматривались многими авторами [1–3]. В данной работе строятся первые члены теории возмущений для собственных значений и соответствующих собственных функций в случае, если предельной задачей является третья краевая задача.

Пусть Γ – окружность единичного радиуса, $N \gg 1$ – целое число, $\varepsilon = 2N^{-1}$, δ_ε – дуга $\{(r, \theta): r = 1, -\varepsilon a(\varepsilon) < \theta < \varepsilon a(\varepsilon)\}$, где (r, θ) – полярные координаты, $a(\varepsilon) < \pi/2$. Далее, пусть γ_ε – объединение дуг, получающихся из δ_ε радиальными сдвигами, кратными $\varepsilon\pi$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, являющейся образом единичного круга при отображении $\mathcal{P} \in C^\infty$, под часто меняющимся типом граничных условий будем понимать задание граничного условия Неймана на $\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{P}(\Gamma_\varepsilon)$ и граничного условия Дирихле на $\gamma(\varepsilon) = \mathcal{P}(\gamma_\varepsilon)$. Таким образом, возмущенная краевая задача на собственные значения имеет вид

$$-\Delta \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma(\varepsilon), \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma(\varepsilon), \quad (2)$$

где ν – внешняя нормаль. Пусть $s = s(t)$ – длина образа дуги $0 < \theta < t$ на единичной окружности при отображении $\mathcal{P}$, $\theta(s)$ – обратная функция к $s(\theta)$. Можно показать (для

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: grr@imat.rb.ru

†Институт математики с ВЦ Уфимского НЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: grr@imat.rb.ru

случая $\theta'' = 0$ см. [1]), что если

$$a(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon A(\varepsilon)}\right) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\varepsilon) = A_0 > 0,$$

то предельной будет задача

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A_0 \theta'\right) \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Ниже на основе методов составных разложений [4], многих масштабов [5] и согласования асимптотических разложений [6] строятся первые члены асимптотик собственного значения задачи (1), (2), сходящегося при $\varepsilon \rightarrow 0$ к простому собственному значению λ_0 предельной задачи, и соответствующие собственные функции.

1. СЛУЧАЙ $A(\varepsilon) \equiv A_0$

В малой окрестности $\partial\Omega$ введем координаты

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \frac{\theta(s)}{\varepsilon}, \quad \xi_2 = \frac{\theta'(s)\tau}{\varepsilon},$$

где τ – расстояние от точки до $\partial\Omega$, измеренное в направлении внутренней нормали, проходящей через эту точку, а s – длина дуги от фиксированной точки (будем считать ее образом точки $(r, \theta) = (1, 0)$ при отображении $\mathcal{P}$) до точки пересечения этого направления с $\partial\Omega$. В переменных (ξ_1, ξ_2) граничные условия изменяются периодически, а оператор Лапласа принимает вид

$$\varepsilon^{-2}(\theta')^2 \Delta_\xi + \sum_{n=-1}^1 \varepsilon^n \mathcal{L}_n + O(\varepsilon^2), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{L}_n = \xi_2^{n+2} \sum_{k \geq j \geq 1}^2 a_{k,j}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_j} + \xi_2^{n+1} \sum_{j=1}^2 \left(a_{j,0}^{(n)} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + a_{j,3}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial s} \right) + a_{3,3}^{(n)} \xi_2^n \frac{\partial^2}{\partial s^2},$$

$a_{k,j}^{(n)}(s) \in C^\infty$, и, в частности, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_{2,2}^{(-1)} &= a_{2,3}^{(-1)} = a_{3,3}^{(-1)} = 0, \quad a_{1,1}^{(-1)} = -2a_{2,0}^{(-1)}, \quad a_{1,0}^{(-1)} = \frac{1}{2}a_{1,2}^{(-1)}, \\ a_{1,2}^{(-1)} &= (a_{1,3}^{(-1)})', \quad a_{2,0}^{(0)} + a_{1,1}^{(0)} - a_{2,2}^{(0)} = 2\left(\frac{a_{2,0}^{(-1)}}{\theta'}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a_{1,3}^{(-1)}(a_{1,3}^{(-1)})'}{(\theta')^2}\right)', \\ a_{3,3}^{(0)} &= \frac{3}{4}\left(\frac{a_{1,3}^{(-1)}}{\theta'}\right)^2 - 2, \quad a_{2,3}^{(0)} + \frac{3}{2}a_{1,3}^{(-1)}\left(\frac{a_{1,3}^{(-1)}}{(\theta')^2}\right)' = -4\frac{\theta''}{\theta'}. \end{aligned} \quad (4)$$

Асимптотические разложения собственного значения и собственной функции (вне окрестности $\gamma(\varepsilon)$) строятся в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^3 \lambda_3 + \dots, \quad (5)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \varepsilon^3 \psi_3(x) + \dots + \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j v_j(\xi, s) + \dots, \quad (6)$$

где ψ_0 – нормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ собственная функция предельной задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разложение (6) соответствует комбинации метода составных разложений (т.е. v_j будем искать в классе экспоненциально убывающих при $\xi_2 \rightarrow \infty$ функций) и метода многих масштабов (s – аналог “медленного” времени).

Подставляя ряд (5) и первые два слагаемых из (6) в уравнение (1), получаем уравнение для $\psi_3(x)$:

$$-\Delta \psi_3 = \lambda_0 \psi_3 + \lambda_3 \psi_0, \quad x \in \Omega,$$

условием разрешимости которого является равенство

$$\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} \psi_0 \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A_0 \theta' \right) \psi_3 ds. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (3), (5) и сумму v_j из (6) в краевую задачу (1), (2), переходя к переменным ξ и к пределу $a \rightarrow 0$ (в граничных условиях), получаем краевые задачи для v_j :

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_j &= -\frac{1}{\theta'(s)^2} \left(\sum_{k=-1}^j \mathcal{L}_k v_{j-k-2} + \lambda_0 v_{j-2} \right), \quad \xi_2 > 0, \\ \frac{\partial v_j}{\partial \xi_2} &= b_j, \quad \xi \in \Gamma^0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$b_1(s) = -A_0 \phi_0(s), \quad b_2(s) = b_3(s) = 0, \quad b_4(s) = \frac{1}{\theta'(s)} \frac{\partial \psi_3}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \phi_0(s) = \psi_0|_{\partial\Omega},$$

а Γ^0 – ось $O\xi_1$ без точек $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} X_0(\xi) &= \operatorname{Re} \ln \sin z - \xi_2 + \ln 2, \quad \text{где } z = \xi_1 + i\xi_2, \\ X_1(\xi) &= -\frac{1}{2} \int_{\xi_2}^{+\infty} t X_0(\xi_1, t) dt, \\ X_2(\xi) &= \frac{1}{4} \int_{\xi_2}^{+\infty} \left(\int_t^\infty t X_0(\xi_1, \tau) d\tau - t^2 X_0(\xi_1, t) \right) dt, \\ X_3(\xi) &= -\frac{1}{4} \int_{\xi_2}^{+\infty} t X_1(\xi_1, t) dt, \\ X_4(\xi) &= -\frac{1}{6} \int_{\xi_2}^{+\infty} t^3 X_0(\xi_1, t) dt + 2X_3(\xi). \end{aligned}$$

По определению $X_j - \pi$ -периодические, четные по переменной ξ_1 , экспоненциально убывающие при $\xi_2 \rightarrow \infty$ функции, удовлетворяющие следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Delta X_0 &= 0, \quad \Delta X_1 = X_0, \quad \Delta X_2 = \xi_2 X_0, \quad \Delta X_3 = X_1, \quad DX_4 = \xi_2^2 X_0, \\ \frac{\partial X_0}{\partial \xi_2} &= -1, \quad \frac{\partial X_j}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad j \geq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

и имеющие следующие асимптотики при $|\xi| \rightarrow 0$:

$$X_0(\xi) = \ln |\xi| + \ln 2 + O(|\xi|), \quad X_j(\xi) = X_j(0) + O(|\xi|), \quad j \geq 1. \quad (10)$$

Принимая во внимание уравнения (9) и (4), получаем, что решения системы краевых задач (8) имеют вид

$$\begin{aligned} v_1 &= -b_1 X_0, \quad v_2 = \xi_2^2 \sum_{j=1}^2 \beta_{0,j}^{(2)} \frac{\partial X_0}{\partial \xi_j} + \beta_{1,0}^{(2)} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1}, \\ v_3 &= \sum_{j=0}^2 \beta_{0,j}^{(3)} \xi_2^{j+2} \frac{\partial^j X_0}{\partial \xi_2^j} + \sum_{j=0}^1 \beta_{1,j}^{(3)} \xi_2^{j+3} \frac{\partial^{j+1} X_0}{\partial \xi_2^j \partial \xi_1} + \beta X_1, \\ v_4 &= \sum_{j=0}^3 \beta_{0,j}^{(4)} \xi_2^{j+3} \frac{\partial^j X_0}{\partial \xi_2^j} + \sum_{j=0}^2 \beta_{1,j}^{(4)} \xi_2^{j+4} \frac{\partial^{j+1} X_0}{\partial \xi_2^j \partial \xi_1} + \beta_{2,0}^{(4)} X_2 + \\ &\quad + \beta_{3,0}^{(4)} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} + \beta_{4,0}^{(4)} \frac{\partial X_4}{\partial \xi_1} - b_4 X_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\beta_{k,j}^{(n)}(s), \beta(s) \in C^\infty$ – некоторые функции, явно выражаемые через функции $\theta, a_{l,m}^{(t)}$ и их производные. В частности,

$$\beta(s) = -\frac{A_0^2}{\theta'} \left(\lambda_0 \phi_0 - 2\theta' \left(\frac{\phi_0'}{\theta'} \right)' \right).$$

Для того чтобы добиться требуемого граничного условия Дирихле на множестве $\gamma(\varepsilon)$, мы вынуждены рассматривать (вводить) в окрестности этих частей границ новые разложения по масштабу, соответствующему длине отдельной составляющей множества $\gamma(\varepsilon)$. Так как функции v_1 и v_4 имеют особенности в точках $(\pi m, 0)$, то приходится использовать метод согласования асимптотических разложений. При этом достаточно произвести согласование разложений в точке $\xi = (0, 0)$, перенеся затем полученные результаты “по периоду”.

Переписывая асимптотику ψ_ε в нуле в переменных $\zeta = \xi a^{-1}$, с учетом формул (10) и (11) получаем, что в окрестности $\gamma(\varepsilon)$ асимптотика ψ_ε должна иметь вид

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j V_j(\zeta, s) + \dots, \quad (12)$$

где при $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$V_1(\zeta, s) = -b_1(s)(\ln |\zeta| + \ln 2) + O(|\zeta|^{-1}), \quad (13)$$

$$V_2(\zeta, s) = O(|\zeta|^{-1}), \quad (14)$$

$$V_3(\zeta, s) = \frac{b_4}{A_0} + \psi_3|_{\partial\Omega} + \beta(s)X_1(0) + O(|\zeta|^{-1}). \quad (15)$$

Подставляя разложения (5), (12) в задачу (1), (2), получаем следующие краевые задачи для V_j :

$$\Delta_\zeta V_j = 0, \quad \zeta_2 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} V_j = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1, \quad V_j = 0, \quad \zeta \in \gamma^1, \quad (16)$$

где γ^1 – интервал $(-1, 1)$ на оси $O\zeta_1$, а Γ^1 – ось $O\zeta_1$ без сегмента $\overline{\gamma^1}$.

Следуя методу согласования асимптотических разложений, будем искать решения краевых задач (16), имеющие асимптотики (13)–(15). Обозначим $Y_0(\zeta) = \operatorname{Re} \ln(w + (w^2 - 1)^{1/2})$, где $w = \zeta_1 + i\zeta_2$. По определению $Y_0(\zeta)$ – гармоническая в полуплоскости $\zeta_2 > 0$ функция, удовлетворяющая однородному граничному условию Дирихле на γ^1 и однородному граничному условию Неймана на Γ^1 и имеющая асимптотику

$$Y_0(\zeta) = \ln |\zeta| + \ln 2 + O(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Из соотношений (13), (16), (17) вытекает, что $V_1(\zeta, s) = -b_1(s)Y_0(\zeta)$. С другой стороны, поскольку не существует нетривиальных, ограниченных на бесконечности решений (16), то из асимптотик (14), (15) следует, что $V_2 = V_3 \equiv 0$. Последнее тождество, равенство (15) и значения b_4 и β определяют граничное условие для ψ_3

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A_0 \theta'(s) \right) \psi_3 \Big|_{\partial\Omega} = \frac{A_0^2}{\theta'(s)} \left(\lambda_0 \phi_0(s) - 2\theta'(s) \left(\frac{\phi'_0(s)}{\theta'(s)} \right)' \right) X_1(0). \quad (18)$$

Подставляя условие (18) в равенство (7) и учитывая, что [7]

$$\phi_0 \left(\frac{\phi'_0}{\theta'} \right)' = \left(\frac{\phi_0 \phi'_0}{\theta'} \right)' - \frac{(\phi'_0)^2}{\theta'} \quad \text{и} \quad X_1(0) = \frac{1}{8} \zeta(3),$$

где $\zeta(p)$ – дзета-функция Римана, получаем первый член теории возмущений

$$\lambda_3 = -\frac{A_0^2 \zeta(3)}{8} \int_{\partial\Omega} (\lambda_0 \phi_0(s)^2 + 2\phi'_0(s)^2) \frac{ds}{\theta'(s)}.$$

Заметим, что в вышерассмотренном случае ограничение $\mu(\varepsilon) = A(\varepsilon) - A_0 \equiv 0$ существенно влияет на вид первого члена теории возмущений.

2. СЛУЧАЙ $\varepsilon = o(\mu)$

Так как в нижерассматриваемом случае малый параметр μ является “большим” по сравнению с ε , то будем искать асимптотики λ_ε и ψ_ε в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \dots, \quad (19)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \mu\psi_1(x) + \dots + \varepsilon v(\xi, s; \mu) + \dots \text{ вне окрестности } \gamma(\varepsilon). \quad (20)$$

Подставляя разложения (19), (20) в уравнение (1) и учитывая, что ψ_0 — решение предельной краевой задачи, получаем уравнение для ψ_1

$$(\Delta + \lambda_0)\psi_1 = -\lambda_1\psi_0, \quad x \subset \Omega, \quad (21)$$

и краевую задачу для v

$$\Delta_\xi v = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = \Psi(s, \mu), \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (22)$$

где

$$\Psi(s, \mu) = \frac{1}{\theta'(s)} \frac{\partial}{\partial \nu} (\psi_0 + \mu\psi_1) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (23)$$

Легко видеть, что функция

$$v(\xi, s; \mu) = -\Psi(s, \mu)X_0(\xi) \quad (24)$$

является решением задачи (22). Переписывая асимптотику (20) в нуле в переменных ζ , получаем, что

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon V(\zeta, s; \mu) + \dots \text{ в окрестности } \gamma(\varepsilon), \quad (25)$$

$$V(\zeta, s; \mu) \sim -\Psi(s, \mu) \ln |\zeta|, \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Подставляя разложение (25) в уравнение (1), получаем следующую краевую задачу для V :

$$\Delta_\zeta V = 0, \quad \zeta_2 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} V = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1, \quad V = 0, \quad \zeta \in \gamma^1.$$

Решением этой задачи, имеющим асимптотику (26), является функция

$$V(\xi, s; \mu) = -\Psi(s, \mu)Y_0(\zeta). \quad (27)$$

Условие согласования рядов (20), (24) и (25), (27) до величин порядка единицы по переменным x , ξ и ζ и до величин порядка μ по малому параметру приводит к необходимости выполнения равенства

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A_0 \theta' \right) \psi_1 = -\theta' \psi_0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (28)$$

Условие разрешимости краевой задачи (21), (28) определяет значение λ_1 :

$$\lambda_1 = \int_{\partial\Omega} \theta' \psi_0^2 ds. \quad (29)$$

Поскольку нас интересуют только главные члены теории возмущений, то из соотношений (20), (23)–(25) и (27) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) &= \psi_0(x) + \mu\psi_1(x) + \varepsilon A_0\phi_0(s)X_0(\xi) + \dots \quad \text{вне окрестности } \gamma(\varepsilon), \\ \psi_\varepsilon(x) &= \varepsilon A_0\phi_0(s)Y_0(\zeta) + \dots \quad \text{в окрестности } \gamma(\varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом построения асимптотик из предыдущего раздела легко видеть, что асимптотики (19), (29), (30) остаются справедливыми вплоть до случая $\varepsilon = o(\mu^{1/3})$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (96-01-00501).

Список литературы

- [1] Г. А. Чечкин. Мат. сборник. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
- [2] О. А. Олейник, Г. А. Чечкин. УМН. 1993. Т. 48. № 6(294). С. 163–164.
- [3] A. Friedman, C. Huang, J. Yong. Commun. Partial Differ. Equ. 1995. V. 20 (1/2). P. 59–102.
- [4] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [5] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
- [6] А. М. Ильин. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [7] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.