Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадильшин, О. М. Киселев, Структурная неустойчивость солитона уравнения Деви–Стюартсона II, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 354–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:06:59

СТРУКТУРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНА УРАВНЕНИЯ ДЕВИ–СТЮАРТСОНА II

Показано, что алгебраический солитон уравнения Деви–Стюартсона II теряет структурную устойчивость под воздействием малого возмущения начального условия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Деви–Стюартсона II (ДСII) [1, 2] описывает нелинейное взаимодействие длинных и коротких поверхностных волн. Оно является хорошо известным примером $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения [3, 4]. В работе исследован вопрос о структурной устойчивости “лампа” (солитона) уравнения ДСII, которое рассматривается в следующей форме [4]:

$$i\partial_t q + 2(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2)q + (g + \bar{g})q = 0, \\ \partial_{\bar{z}} g = \partial_z |q|^2,$$

где $z \in \mathbb{C}$ и черта означает комплексное сопряжение.

Известно [4], что существует взаимно однозначное соответствие между “лампами” и “полюсами” (по параметру k) матричного решения вспомогательной линейной системы

$$(I - G[q^0, k])\phi = E(kz), \quad (1.1)$$

где $E(kz) = \text{diag}(\exp(kz), \exp(\bar{k}\bar{z}))$, I – единичная матрица, $q^0(z)$ – начальное условие $q(z, 0)$ задачи Коши для уравнения ДСII, а $G[f, k]$ – интегральный оператор

$$G[f, k]\phi \equiv \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \begin{pmatrix} 0 & \frac{f(\zeta) \exp(k(z-\zeta))}{z-\zeta} \\ \frac{-\bar{f}(\zeta) \exp(\bar{k}(\bar{z}-\bar{\zeta}))}{\bar{z}-\bar{\zeta}} & 0 \end{pmatrix} \phi(k, \zeta).$$

Здесь и ниже зависимость функций от комплексно-сопряженных переменных опускается. Следуя статье [4], под “полюсами” мы будем понимать особенности обоих типов:

*Институт математики с ВЦ Уфимского НЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: grr@imat.rb.ru; ok@imat.rb.ru

$(k - k_0)^{-1}$ и $\overline{(k - k_0)}^{-1}$. Если решение уравнения (1.1) имеет “полюс”, то решение ДСП имеет солитонную структуру. В частности, простейшее односолитонное решение уравнения ДСП имеет вид [4]

$$q(z, t) = \frac{2\bar{\nu}}{|z + 4ik_0t + \mu|^2 + |\nu|^2} \exp\{k_0z - \bar{k}_0z + 2i(k_0^2 + \bar{k}_0^2)t\},$$

$$g(z, t) = \frac{-4\overline{(z + 4ik_0t + \mu)}^2}{(|z + 4ik_0t + \mu|^2 + |\nu|^2)^2},$$

и ему соответствует решение системы (1.1)

$$\phi(k, z) = E(kz) - \frac{1}{|z + \mu|^2 + |\nu|^2} \left(\begin{array}{cc} \frac{\exp\{kz\}\overline{(z + \mu)}}{k - k_0} & \frac{\bar{\nu} \exp\{(\bar{k} - \bar{k}_0 + k_0)z\}}{\bar{k} - \bar{k}_0} \\ \frac{\nu \exp\{(k - k_0 + \bar{k}_0)z\}}{k - k_0} & -\frac{\exp\{\bar{k}z\}\overline{(z + \mu)}}{\bar{k} - \bar{k}_0} \end{array} \right).$$

Ниже показано, что полюс решения системы (1.1) пропадает после малого возмущения потенциала. Это означает, что солитонное решение уравнения ДСП структурно неустойчиво относительно малых возмущений начальных данных.

2. РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.1) К ЗАДАЧЕ НА НУЛЕВОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Существование нетривиального решения граничной задачи

$$(I - G[q^0, k_0])\Phi = 0, \quad E(-k_0z)\Phi(z) \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

– необходимое условие существования особенности при $k = k_0$ у решения системы (1.1) [4]. С другой стороны, легко видеть, что существование нетривиального решения системы (2.1) эквивалентно существованию нетривиального, убывающего на бесконечности решения уравнения

$$(I - \mathcal{G}[q^0, k_0])\chi = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{G}[h, k] = E(-kz)G[\hat{h}, k], \quad \hat{h}(\zeta, k) = h(\zeta) \exp\{\bar{k}\zeta\}.$$

Можно показать (см. приложение), что если q^0 – непрерывная функция и $|q^0| \sim |z|^{-2}$ при $|z| \rightarrow \infty$, то $\mathcal{G}[q^0, k]$ – компактный оператор в пространстве $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|u\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left[(1 + |z|)(|u_1(z)| + |u_2(z)|) \right],$$

где u_j – компоненты вектор-функции u . Таким образом, вопрос о существовании “ламп” сводится к вопросу о существовании нулей собственных значений $\lambda(k)$ уравнения

$$(I - \mathcal{G}[q^0, k])A = \lambda(k)A. \quad (2.3)$$

Ниже будет показано, что нуль собственного значения неустойчив относительно малого возмущения потенциала q^0 . Как было сказано выше, это приводит к структурной неустойчивости “ламп” уравнения ДСП.

3. РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Пусть решение системы (1.1) имеет полюс первого порядка при $k = k_0$ для невозмущенного солитонного потенциала $q^0 = q_0$. Обозначим

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно [4], что если вектор $A^{(1)}$ является нетривиальным решением уравнения (2.2) (для $q^0(z) = q_0(z)$), то $A^{(2)} = \sigma \overline{A^{(1)}}$ – второе нетривиальное решение уравнения (2.2). Очевидно, что $A^{(i)}$ – собственная функция уравнения (2.3) при $k = k_0$, $q^0 = q_0$ и $\lambda(k_0) = 0$. Для определенности будем считать, что алгебраическая кратность нулевого собственного значения при $k_0 = 0$ равна двум. Заметим, что именно такая ситуация соответствует односолитонному случаю, упомянутому во введении.

Рассмотрим возмущенный потенциал

$$q^0(z) = q_0(z) + \varepsilon q_1(z), \quad (3.1)$$

где q_1 – гладкая финитная функция и $0 < \varepsilon \ll 1$. Главные члены асимптотик собственного значения и собственной функции уравнения (2.3) в возмущенном случае строятся в следующем виде:

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon, k) = \varepsilon \lambda^1(\varkappa), \quad (3.2)$$

$$\tilde{A}(z, k, \varepsilon) = A^0(z, \varkappa) + \varepsilon A^1(z, \varkappa), \quad (3.3)$$

где $\varkappa = (k - k_0)\varepsilon^{-1}$. Подставляя соотношения (3.1)–(3.3) в уравнение (2.3) и учитывая формальное асимптотическое разложение оператора $\mathcal{G}[q_0 + \varepsilon q_1, k]$ в окрестности точки k_0 , получаем следующие уравнения:

$$(I - \mathcal{G}[q_0, k_0]) A^0 = 0, \quad (3.4)$$

$$(I - \mathcal{G}[q_0, k_0]) A^1 = F^1, \quad (3.5)$$

где

$$F^1 = \mathcal{G}[q_1, k_0] A^0 + \varkappa \partial_k \mathcal{G}[q_0, k_0] A^0 + \bar{\varkappa} \partial_{\bar{k}} \mathcal{G}[q_0, k_0] A^0 + \lambda^1(\varkappa) A^0. \quad (3.6)$$

Очевидно, что функция

$$A^0(z, \varkappa) = \alpha(\varkappa) A^{(1)}(z) + \beta(\varkappa) A^{(2)}(z) \quad (3.7)$$

удовлетворяет уравнению (3.4) при любых α и β .

Обозначим

$$(u, v)_f = \int_{\mathbb{C}} dz \wedge d\bar{z} \left(\bar{f} \exp(k_0 z - \overline{k_0 z}) u_1 \bar{v}_1 + f \exp(\overline{k_0 z} - k_0 z) u_2 \bar{v}_2 \right),$$

где u_i, v_i – компоненты векторов u, v , соответственно. Для сопряженного к $(I + \mathcal{G}[q_0, k_0])$ относительно нормы $(\bullet, \bullet)_{q_0}$ оператора $(I + \mathcal{G}^*[q_0, k_0])$ интегральный оператор имеет вид

$$\mathcal{G}^*[h, k] = E(-kz)G[\tilde{h}, k], \quad \tilde{h}(\zeta, k) = \overline{h(\bar{\zeta})} \exp\{2k\zeta - \bar{k}\bar{\zeta}\},$$

и, если $B^{(1)}$ – собственная функция сопряженного оператора, то вторая собственная функция $B^{(2)}$ определяется равенством $B^{(2)} = \sigma \overline{B^{(1)}}$.

В силу альтернативы Фредгольма условие разрешимости (3.5) принимает вид

$$\left(\frac{1}{F}, B^{(j)}\right)_{q_0} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.8)$$

Нормируем функции $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ соотношениями

$$\begin{aligned} (A^{(1)}, e_1)_{q_0} &= 0, & (A^{(1)}, e_2)_{q_0} &= 4i\pi, \\ (e_1, B^{(1)})_{q_0} &= 0, & (e_2, B^{(1)})_{q_0} &= 4i\pi, \end{aligned}$$

где e_1, e_2 – столбцы единичной матрицы. Такая нормировка возможна, например, для односолитонного случая. Подставляя (3.6) в условие (3.8) и учитывая нормировку $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$, получаем следующую систему линейных уравнений на α и β :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\alpha\Omega_1 + \frac{1}{\lambda}\beta\Omega_2 + \alpha Q_1 + \beta Q_2 + 4i\pi\beta\bar{\varkappa} &= 0, \\ \frac{1}{\lambda}\alpha\bar{\Omega}_2 - \frac{1}{\lambda}\beta\bar{\Omega}_1 + \alpha\bar{Q}_2 - \beta\bar{Q}_1 - 4i\pi\alpha\varkappa &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\Omega_j = -4i\pi(A^{(j)}, B^{(1)})_{q_0}, \quad Q_j = (A^{(1)}, B^{(j)})_{q_1}.$$

Условие разрешимости системы (3.9) приводит к квадратному уравнению на λ :

$$(|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2)\lambda^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\Omega}_1 Q_1 + \Omega_2(\bar{Q}_2 - 4i\pi\bar{\varkappa}))\lambda + |4i\pi\bar{\varkappa} + Q_2|^2 + |Q_1|^2 = 0. \quad (3.10)$$

В силу теоремы Виета для решений $\frac{1}{\lambda_i}$ уравнения (3.10) (взятых с учетом их кратности) справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda_1(\varkappa)}\frac{1}{\lambda_2(\varkappa)} = \frac{|4i\pi\bar{\varkappa} + Q_2|^2 + |Q_1|^2}{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что если $Q_1 \neq 0$, то $\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2} \neq 0$ для $\varepsilon > 0$ и любого k , близкого к k_0 . Заметим, что из-за произвола в выборе функции q_1 ее можно подобрать так, чтобы Q_1 было отличным от нуля. Таким образом, формальные асимптотические построения показывают, что собственные значения возмущенной задачи не равны нулю (в случае достаточно общего положения). Следовательно, решение системы (1.1) при возмущенном потенциале не имеет особенностей при k , близких к k_0 . Строгое обоснование построенных выше асимптотик собственных значений приводится в следующем разделе.

4. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИК СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Большая часть рассуждений в этом разделе не зависит от индекса i в обозначении λ_i^1 . Поэтому там, где это не приводит к разночтениям, упомянутый индекс будет опускаться. Кроме этого, вследствие произвола в выборе q_1 будем считать это возмущение таким, что уравнение (3.10) имеет два различных решения $\lambda_1^1(\varkappa) \neq \lambda_2^1(\varkappa)$.

Нормируем (3.7) следующим равенством:

$$\alpha + |\beta| = 1, \quad \alpha \geq 0. \quad (4.1)$$

Из (3.10) следует, что

$$|\lambda^1| = O(1 + |\varkappa|). \quad (4.2)$$

Из соотношений (3.6), (3.7), (4.1) и (4.2) вытекает оценка

$$\|\bar{F}^1\| = O(1 + |\varkappa|). \quad (4.3)$$

Так как решение уравнения (3.5) определяется с точностью до линейной комбинации функций $A^{(j)}$, то нормируем $\bar{A}^1$ условием

$$(\bar{A}, A^{(j)})_{q_0} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Покажем, что при такой нормировке из оценки (4.3) следует, что

$$\|\bar{A}^1\| = O(1 + |\varkappa|). \quad (4.4)$$

Для этого достаточно показать, что если $u \in \mathcal{C}$ и $(u, A^{(j)})_{q_0} = 0$, то

$$\|u\| \leq C \|(I - \mathcal{G}[q_0, k_0])u\|. \quad (4.5)$$

Допустим противное, т.е. существует последовательность функций u_n таких, что $(u_n, A^{(j)})_{q_0} = 0$ и $\|u_n\| > n \|(I - \mathcal{G}[q_0, k_0])u_n\|$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|u_n\| = 1$. Тогда из последнего неравенства следует, что $\|(I - \mathcal{G}[q_0, k_0])u_n\| \rightarrow 0$. В силу компактности оператора $\mathcal{G}$ из этой сходимости вытекает существование подпоследовательности, для которой имеет место сходимость $u_n \rightarrow u_* \neq 0$, причем $(I - \mathcal{G}[q_0, k_0])u_* = 0$. С другой стороны, из последней сходимости вытекает нормировка $(u_*, A^{(j)})_{q_0} = 0$, что противоречит предположению о двукратности нулевого собственного значения оператора $(I - \mathcal{G}[q_0, k_0])$. Из этого противоречия следует оценка (4.5), а, следовательно, и оценка (4.4).

Обозначим $T(\varepsilon, k) = I - \mathcal{G}[q_0 + \varepsilon q_1, k] - \tilde{\lambda}(\varepsilon, k)$. Очевидно, что собственные значения $\mu(\varepsilon, k)$ оператора $T(\varepsilon, k)$ и собственные значения $\lambda(\varepsilon, k)$ оператора $I - \mathcal{G}[q, k]$ связаны равенством

$$\lambda(\varepsilon, k) = \tilde{\lambda}(\varepsilon, k) + \mu(\varepsilon, k). \quad (4.6)$$

Из соотношений (3.2)–(3.7), (4.1), (4.2) и (4.4) следует, что

$$T(\varepsilon, k)\tilde{A} = o(\varepsilon + |k - k_0|), \quad \|\tilde{A}\| \geq C > 0. \quad (4.7)$$

Пусть γ – окружность на комплексной плоскости достаточно малого радиуса с центром в нуле такая, что в ограничиваемом ею круге лежит только нулевое собственное значение оператора $T(0, k_0)$. Обозначим

$$P(\varepsilon, k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (T(\varepsilon, k) - \zeta)^{-1} d\zeta,$$

$$U(\varepsilon, k) = (1 - (P(\varepsilon, k) - P(0, k_0))^2)^{-1/2} (1 - P(\varepsilon, k) - P(0, k_0)).$$

Известно [5], что проектор $P(\varepsilon, k)$ и трансформирующая функция $U(\varepsilon, k)$ позволяют свести задачу на собственные значения для оператора $T(\varepsilon, k)$ к задаче на собственные значения для двумерного оператора

$$\hat{T}(\varepsilon, k) = P(0, k_0)U^{-1}(\varepsilon, k)T(\varepsilon, k)U(\varepsilon, k)P(0, k_0),$$

определенного в пространстве $P(0, k_0)\mathcal{C}$. Причем оба собственных значения оператора $\hat{T}$ и оба собственных значения оператора T (при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $k \rightarrow k_0$) совпадают. Из определения $\hat{T}$ и формул (4.7) следует, что для операторов $\hat{T}$ и $\hat{A}(\varepsilon, k) = U^{-1}(\varepsilon, k)\tilde{A}(\varepsilon, k)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\varepsilon, k) &= \varepsilon \hat{T}_1(\varepsilon, k) + (k - k_0)\hat{T}_2(\varepsilon, k), & \|\hat{T}_j\| &\leq C, \\ \hat{T}(\varepsilon, k)\hat{A} &= o(\varepsilon + |k - k_0|), & \|\hat{A}\| &\geq C > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В свою очередь, из соотношений (4.8) вытекает, что для (2×2) -матрицы $B(\varepsilon, k) = (\varepsilon + |k - k_0|)^{-1}\hat{T}(\varepsilon, k)$ имеют место соотношения

$$B\hat{A} = o(1), \quad \|B\| \leq C, \quad \|\hat{A}\| \geq C > 0, \quad (4.9)$$

а ее собственные значения $\nu(\varepsilon, k)$ связаны с собственными значениями $\mu(\varepsilon, k)$ матрицы $\hat{T}(\varepsilon, k)$ равенством

$$\mu(\varepsilon, k) = (\varepsilon + |k - k_0|)\nu(\varepsilon, k). \quad (4.10)$$

Из соотношений (4.9) следует, что существует стремящееся к нулю собственное значение $\nu(\varepsilon, k)$ и, следовательно, вследствие равенств (4.6) и (4.10) имеется собственное значение

$$\lambda(\varepsilon, k) = \tilde{\lambda}(\varepsilon, k) + o(\varepsilon + |k - k_0|). \quad (4.11)$$

Заметим, что на самом деле построены две асимптотики, соответствующие индексам $i = 1, 2$. Поэтому ниже будем вновь добавлять этот индекс в полученных формулах.

Обозначим через λ_i , $i = 1, 2$, собственные значения оператора $(I - \mathcal{G}[q^0, k])$, стремящиеся к нулю при $k \rightarrow k_0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку $\tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2$, то $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и из формул (3.2), (3.11) и (4.11) имеем

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{|4i\pi(\overline{k - k_0}) + \varepsilon Q_2|^2 + \varepsilon^2 |Q_1|^2}{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2} + o(\varepsilon^2 + \varepsilon|k - k_0| + |k - k_0|^2). \quad (4.12)$$

Из равенств (4.12) следует, что если $Q_1 \neq 0$, то $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ для $\varepsilon > 0$ и любого k , близкого к k_0 .

Таким образом, структура данных рассеяния (в терминах метода обратной задачи рассеяния [4]) неустойчива по отношению к малым возмущениям начальных данных.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показанная выше неустойчивость полюсов задачи рассеяния (1.1) служит обоснованием формальной асимптотики непрерывной части данных рассеяния, построенной в статье [6]:

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(k) &\sim \varepsilon b_1(k) && \text{при } |k - k_0| > \varepsilon^{1/2}, \\ b_\varepsilon(k) &\sim \varepsilon^{-1} B_{-1} \left(\frac{k - k_0}{\varepsilon} \right) + B_0 \left(\frac{k - k_0}{\varepsilon} \right) && \text{при } |k - k_0| < 2\varepsilon^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В работе [7] показано, что бессолитонное решение уравнения ДСП затухает при $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, следует ожидать, что дельтообразная структура данных рассеяния (5.1) приводит к сохранению солитонообразной формы решения уравнения ДСП для достаточно больших времен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что оператор $\mathcal{G}[q, k]$ с непрерывным потенциалом, убывающим как $|z|^{-2}$ при $|z| \rightarrow \infty$, является компактным в $\mathcal{C}$. Пусть $p_M(z)$ — гладкая обрезающая функция такая, что $p_M(z) = 0$ при $|z| \geq 2M$ и $p_M(z) = 1$ при $|z| \leq M$. Представим оператор $\mathcal{G}$ в виде

$$\mathcal{G} = (1 - p_M)\mathcal{G} + p_M\mathcal{G}p_M + p_M\mathcal{G}(1 - p_M)$$

и оценим вначале оператор $(1 - p_M)\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \|(1 - p_M)\mathcal{G}\phi\| &= \sup_{|z| \geq M} (1 + |z|) \left(\left| \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \frac{q(\zeta) \exp(\overline{k\zeta} - k\zeta) \phi_2(\zeta)}{z - \zeta} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \frac{\bar{q}(\zeta) \exp(k\zeta - \overline{k\zeta})}{z - \zeta} \phi_1(\zeta) \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\phi\| \sup_{|z| \geq M} (1 + |z|) \int_{\mathbb{R}^2} dx' dy' \frac{C}{|z - \zeta| (1 + |\zeta|) (1 + |\zeta|^2)}. \end{aligned}$$

Здесь $\zeta = x' + iy'$, ϕ_j — компоненты функции ϕ , функция $q(\zeta)$ оценена как $C(1 + |\zeta|^2)^{-1}$, а функции $\phi_j(\zeta)$ оценены через норму $\|\phi(\zeta, k)\|(1 + |\zeta|)^{-1}$. Заменив в интеграле ζ на ζ/z , получаем, что $\|(1 - p_M)\mathcal{G}\| \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Аналогично находится оценка для оператора $p_M\mathcal{G}(1 - p_M)$:

$$\|p_M\mathcal{G}(1 - p_M)\phi\| \leq C\|\phi\| \sup_{|z| \leq 2M} \int_{|z| \geq M} \frac{dx' dy'}{|z - \zeta| (1 + |\zeta|) (1 + |\zeta|^2)} \leq C_M \|\phi\|,$$

где $C_M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Оставшийся интегральный оператор $p_M\mathcal{G}p_M$ действует из пространства $\mathcal{C}$ в пространство финитных функций. Ядро $\mathcal{K}$ этого оператора равно нулю вне множества $D =$

$\{|\zeta| \leq 2M, |z| \leq 2M\}$. Внутри этого множества его можно с любой степенью точности аппроксимировать вырожденными ядрами [8]

$$\mathcal{K} = \mathcal{P} + \mathcal{Q},$$

где $\mathcal{P}$ – вырожденное непрерывное ядро, а $\mathcal{Q}$ – полярное ядро со сколь угодно малой нормой. Тогда оператор $\mathcal{G}$ представляется в виде

$$\mathcal{G} = K + Q,$$

где K – оператор с вырожденным ядром, а Q – оператор со сколь угодно малой нормой. Следовательно, $\mathcal{G}$ является компактным оператором в $\mathcal{C}$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 97-01-00459).

Список литературы

- [1] *A. Davey, K. Stewartson.* Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1974. V. 338. P. 101–110.
- [2] *V. D. Djordjevic, L. G. Redekopp.* J. Fluid Mech. 1977. V. 79. P. 703–714.
- [3] *A. S. Fokas, M. J. Ablowitz.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 2494–2505.
- [4] *V. A. Arkadiev, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov.* Physica D. 1989. V. 36. P. 189–197.
- [5] *T. Kato.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [6] *Р. Р. Гадильшин, О. М. Киселев.* ТМФ. 1996. Т. 106. С. 200–208.
- [7] *О. М. Киселев.* Дифф. уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 812–819.
- [8] *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.