Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Гангопадья, Д. В. Маллоу, К. Расинариу, У. П. Сухатми, Точно решаемые модели суперсимметричной квантовой механики и их связь с генерирующей спектр алгеброй, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 362–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:26:41

© 1999 г.

А. Гангопатья*, Д. В. Маллоу†,
К. Расинариу‡, У. П. Сухатми§

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ
СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КВАНТОВОЙ
МЕХАНИКИ И ИХ СВЯЗЬ
С ГЕНЕРИРУЮЩЕЙ СПЕКТР АЛГЕБРОЙ

В рамках хорошо известного подхода суперсимметричной квантовой механики можно получить аналитические выражения для собственных значений и собственных векторов нерелятивистских форминвариантных гамильтонианов. Поскольку большая часть таких гамильтонианов обладает также генерирующими спектр алгебрами, соответствующие им задачи оказываются разрешимыми и с использованием независимого теоретико-группового метода. В данной работе показана эквивалентность двух методов решения, для чего развит алгебраический подход к форминвариантным гамильтонианам, связанный с общей заменой параметров и включающий нелинейные обобщения алгебр Ли.

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперсимметричная квантовая механика (ССКМ) [1] дает возможность получать замкнутые аналитические выражения для собственных значений и собственных функций оператора энергии для широкого класса одномерных задач. Основными элементами в ССКМ являются гамильтонианы-суперпартнеры $H_- \equiv A^\dagger A$ и $H_+ \equiv AA^\dagger$. Используемые в такой факторизации операторы A и $A^\dagger$ выражаются в терминах суперпотенциала W следующим образом:

$$A(x, a) = \frac{d}{dx} + W(x, a), \quad A^\dagger(x, a) = -\frac{d}{dx} + W(x, a). \quad (1)$$

*Department of Physics, Loyola University Chicago, Chicago, USA. E-mail: agangop@luc.edu, asim@uic.edu

†Department of Physics, Loyola University Chicago, Chicago, USA. E-mail: jmallow@luc.edu

‡Department of Physics, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA. E-mail: costel@uic.edu

§Department of Physics, University of Illinois at Chicago, Chicago, USA. E-mail: sukhathme@uic.edu

Здесь W – вещественная функция x , а a – параметр (или множество параметров), играющий важную роль в нашем подходе. Важная особенность ССКМ состоит в том, что для форминвариантной системы [2], т.е. для системы, удовлетворяющей условию интегрируемости

$$W^2(x, a_0) + \frac{dW(x, a_0)}{dx} = W^2(x, a_1) - \frac{dW(x, a_1)}{dx} + R(a_0), \quad a_1 = f(a_0), \quad (2)$$

полный спектр можно определить алгебраически, даже не обращаясь к исходным дифференциальным уравнениям [1].

Известно также, что некоторые из таких точно решаемых систем обладают так называемой генерирующей спектр алгеброй [3, 4]. Гамильтониан таких систем можно записать в виде линейной или квадратичной функции на исходной алгебре, а все квантовые состояния таких систем могут быть определены теоретико-групповым методом.

Естественно возникает вопрос о том, существует ли какая-либо связь между общим условием форминвариантности и генерирующей спектр алгеброй. В данной работе мы показываем эквивалентность двух подходов, рассматривая широкий спектр изменений параметров, включающий трансляции, масштабные преобразования, проективные преобразования, а также более сложные функции $f(a_0)$.

В разделе 2 рассматривается форминвариантная модель общего вида. Для построения алгебры с тремя генераторами используются операторы A и $A^\dagger$. В частности, условие форминвариантности играет решающую роль в замыкании алгебры, которая оказывается или алгеброй $so(2, 1)$, или ее деформацией. В разделе 3 приведено несколько примеров. В частности, обсуждаются форминвариантные потенциалы, полученные в результате трансляционного изменения параметров $a_1 = a_0 + k$, а также в результате чисто масштабного преобразования $a_1 = qa_0$, $q = \text{const}$ ($0 < q < 1$). В случае масштабного преобразования оказывается, что порождаемая им потенциальная алгебра является нелинейной деформацией алгебры $su(2)$. Кроме того, мы описываем потенциальные алгебраические структуры, порождаемые циклическими потенциалами [5], представляющими собой серии повторяющихся после цикла из k итераций форминвариантных потенциалов. Мы также обсуждаем потенциальную алгебру потенциалов Натансона [6] и показываем, что из них можно получить все трансляционно-форминвариантные потенциалы.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМИНВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ

Чтобы начать построение операторной алгебры, выразим условие форминвариантности (2) в терминах операторов A и $A^\dagger$:

$$A(x, a_0)A^\dagger(x, a_0) - A^\dagger(x, a_1)A(x, a_1) = R(a_0). \quad (3)$$

По своей структуре это соотношение напоминает коммутатор. Чтобы получить замкнутую алгебру типа $su(2)$, введем вспомогательную переменную ϕ и определим операторы

$$J_+ = e^{ip\phi} A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi)), \quad J_- = A(x, \chi(i\partial_\phi)) e^{-ip\phi}, \quad (4)$$

где p – произвольная вещественная константа, а χ – произвольная вещественная функция. Операторы $A(x, \chi(i\partial_\phi))$ и $A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi))$ получаются из уравнения (1) после подстановки $a_0 \rightarrow \chi(i\partial_\phi)$. Такое обобщение аналогично известной схеме разделения переменных в сферических координатах, когда $\partial_\phi \Phi(\phi) \rightarrow (\text{const}) \times \Phi(\phi)$; постоянное собственное значение в этом случае равно a_0 .

Из уравнения (4) получаем

$$[J_+, J_-] = e^{ip\phi} A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi)) A(x, \chi(i\partial_\phi)) e^{-ip\phi} - A(x, \chi(i\partial_\phi)) A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi)). \quad (5)$$

Уравнение (5) легко может быть преобразовано к виду

$$[J_+, J_-] = -\{A(x, \chi(i\partial_\phi)) A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi)) - A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi + p)) A(x, \chi(i\partial_\phi + p))\}. \quad (6)$$

Если при этом выбрать функцию $\chi(i\partial_\phi)$ так, чтобы $\chi(i\partial_\phi + p) = f[\chi(i\partial_\phi)]$, то правую часть уравнения (6) можно упростить, используя условие форминвариантности

$$A(x, \chi(i\partial_\phi)) A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi)) - A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi + p)) A(x, \chi(i\partial_\phi + p)) = R(\chi(i\partial_\phi)), \quad (7)$$

где

$$a_0 \rightarrow \chi(i\partial_\phi), \quad a_1 = f(a_0) \rightarrow f[\chi(i\partial_\phi)] = \chi(i\partial_\phi + p). \quad (8)$$

Для завершения построения определим оператор J_3 как $J_3 = (-i/p)\partial_\phi$.

В результате мы получаем деформированную алгебру Ли с генераторами J_+ , J_- и J_3 , удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = \xi(J_3), \quad (9)$$

где $\xi(J_3) \equiv -R(\chi(i\partial_\phi))$ задает деформацию. Таким образом, мы видим, что условие форминвариантности играет важнейшую роль в замыкании алгебры.

В зависимости от выбора функции χ в уравнении (8) мы получаем различные репараметризации, соответствующие нескольким моделям, например:

1) трансляционные модели: $a_1 = a_0 + p$ для $\chi(z) = z$ (если в этих моделях R является линейной функцией J_3 , то алгебра оказывается $so(2, 1)$ -или $so(3)$ -алгеброй [7]; к такому же выводу пришел Балантекин [8], используя несколько иной подход);

2) модели с масштабными преобразованиями: $a_1 = e^p a_0 \equiv q a_0$ для $\chi(z) = e^z$;

3) циклические модели: $a_1 = (\alpha a_0 + \beta)(\gamma a_0 + \delta)$ для

$$\chi(z) = ((\lambda_1 - \delta)\lambda_1^{z/p} + (\lambda_2 - \delta)\lambda_2^{z/p} B(z))(\gamma[\lambda_1^{z/p} + \lambda_2^{z/p} B(z)]),$$

где $\lambda_{1,2}$ – решения уравнения $(x - \alpha)(x - \delta) - \beta\gamma = 0$, а $B(z)$ – произвольная периодическая функция z с периодом p .

Другие замены параметров определяются выбором функции $\chi(z)$ более сложного вида. Например, если взять $\chi(z) = e^{e^z}$, то получим замену параметров $a_1 = a_0^2$.

Заметим, что величина $J_+ J_-$ соответствует гамильтониану

$$H_-(x, i\partial_\phi + p) = A^\dagger(x, \chi(i\partial_\phi + p))A(x, \chi(i\partial_\phi + p)). \quad (10)$$

Чтобы найти энергетический спектр гамильтониана H_- из (10), построим сначала унитарные представления деформированной алгебры Ли, определяемой уравнениями (9). Метод заключается в следующем [9].

Определим с точностью до аддитивной постоянной функцию $g(J_3)$ так, чтобы

$$\xi(J_3) = g(J_3) - g(J_3 - 1). \quad (11)$$

Тогда оператор Казимира этой алгебры имеет вид $C_2 = J_- J_+ + g(J_3)$. Известно, что в базисе, в котором операторы J_3 и C_2 диагональны, J_+ и J_- играют роль соответственно повышающего и понижающего операторов.

Действуя операторами на произвольное состояние $|h\rangle$, получим

$$J_3|h\rangle = h|h\rangle, \quad J_-|h\rangle = a(h)|h-1\rangle, \quad J_+|h\rangle = a^*(h+1)|h+1\rangle. \quad (12)$$

Из уравнений (9) и (12) следует, что

$$|a(h)|^2 - |a(h+1)|^2 = g(h) - g(h-1). \quad (13)$$

Вид функции $g(h)$ определяет размерность унитарного представления. Чтобы пояснить, как работает этот метод, рассмотрим два случая, показанные на рис. 1.

Рис. 1. Типичное поведение функции $g(h)$.

Конечномерные представления (см. рис. 1а) получаются, если начать движение из точки $h = h_{\min}$ на графике $g(h)$ и двигаться целочисленными шагами параллельно оси h до точки $h = h_{\max}$. В конечных точках $a(h_{\min}) = a(h_{\max} + 1) = 0$, и мы получаем конечномерное представление. (Так происходит, например, для алгебры $su(2)$, когда функция $g(h)$ задается параболой $h(h + 1)$.) Если $g(h)$ монотонно убывает (см. рис. 1б), то существует только одна конечная точка при $h = h_{\min}$. Значение h может возрастать целочисленными шагами от $h_{\min}$ до бесконечности. В этом случае мы имеем бесконечномерное представление. Как и в конечномерном случае, величина $h_{\min}$ нумерует представления. Различие состоит в том, что в бесконечномерном случае $h_{\min}$ принимает непрерывные значения. Аналогичные рассуждения проводятся и для монотонно возрастающей функции $g(h)$.

Построив представление алгебры, ассоциированной с характеристической моделью, мы получаем (используя уравнения (10), (13)) полный спектр системы.

В следующем разделе будут рассмотрены некоторые примеры.

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Самоподобные потенциалы. Первый пример относится к случаю масштабных преобразований параметров: $a_1 = qa_0$. Рассмотрим простой вариант выбора $R(a_0) = r_1 a_0$, где r_1 — константа. Такой выбор порождает самоподобные потенциалы, исследовавшиеся в работах [10, 11].

В этом случае соотношения (9) принимают вид

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = \xi(J_3) \equiv -r_1 \exp(-pJ_3), \quad (14)$$

что является деформацией стандартной алгебры Ли $so(2, 1)$. Тогда из уравнений (14) и (11) мы получаем

$$g(h) = \frac{r_1}{e^p - 1} e^{-ph} = -\frac{r_1}{1 - q} q^{-h}, \quad q = e^p. \quad (15)$$

Отметим, что задачи, связанные с масштабным преобразованием [11], требуют выполнения условия $0 < q < 1$, откуда следует, что $p < 0$. Для монотонно убывающих функций $g(h)$ отсюда вытекает, что унитарные представления этой алгебры имеют бесконечную размерность.

Обозначая состояние младшего веса оператора J_3 через $h_{\min}$, получим $a(h_{\min}) = 0$. Коэффициенты $a(h)$ можно выбрать вещественными без потери общности. Тогда из уравнения (13) для произвольного значения $h = h_{\min} + n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, получим

$$a^2(h) = g(h - n - 1) - g(h - 1) = r_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} q^{1-h}. \quad (16)$$

Спектр гамильтониана $H_-(x, a_1)$ имеет вид

$$H_-|h\rangle = a^2(h)|h\rangle = r_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} q^{1-h}|h\rangle. \quad (17)$$

Следовательно, для собственных значений энергии получаем

$$E_n(h) = r_1 \alpha(h) \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \alpha(h) \equiv q^{1-h}. \quad (18)$$

Чтобы сравнить найденный выше с использованием теоретико-группового метода спектр с результатами, полученными с помощью ССКМ [11], перейдем к x -представлению. В этом случае $|h\rangle \propto e^{ip h \phi} \psi_{h_{\min}, n}(x)$ и уравнение Шредингера для гамильтониана H_- записывается как

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x, e^{i\partial_\phi + p}) - W'(x, e^{i\partial_\phi + p}) - E \right\} e^{ip h \phi} \psi_{h_{\min}, n}(x) = 0$$

или

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x, \alpha(h)) - W'(x, \alpha(h)) - E \right\} \psi_{h_{\min}, n}(x) = 0, \quad (19)$$

что представляет собой в точности уравнение Шредингера из работы [11] с собственными значениями энергии, определяемыми уравнением (18). Соответствие между потенциальной алгеброй и ССКМ для форминвариантных потенциалов подробно описано в работе [12].

В более общем случае полагаем

$$R(a_0) = \sum_{j=1}^{\infty} R_j a_0^j.$$

Тогда

$$g(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_j}{1 - e^{jp}} e^{-jp h}, \quad (20)$$

и, следовательно,

$$a^2(h) = g(h - n - 1) - g(h - 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(h) \frac{1 - q^{jn}}{1 - q^j}, \quad (21)$$

где $\alpha_j(h) = R_j e^{-j(h-1)}$. Эти результаты согласуются с результатами, полученными в работе [11].

3.2. Циклические потенциалы. Рассмотрим частный случай замены параметров, определяемой следующим циклом (или цепочкой):

$$a_0, \quad a_1 = f(a_0), \quad a_2 = f(a_1), \quad \dots, \quad a_{k-1} = f(a_{k-2}), \quad a_k = f(a_{k-1}) = a_0, \quad (22)$$

и выберем $R(a_i) = a_i \equiv \omega_i$. Такой выбор определяет циклические потенциалы, изучавшиеся в работе [5].

Рис. 2. Первый потенциал $V(x, a_0)$ из последовательности 3-цепочечных ($k = 3$) циклических потенциалов.

Циклические потенциалы составляют последовательность форминвариантных потенциалов, эта последовательность повторяется после каждого цикла из k итераций. На рис. 2 показан первый потенциал $V(x, a_0)$ из последовательности 3-цепочечных ($k = 3$) циклических потенциалов, соответствующий значениям $\omega_0 = 0.15$, $\omega_1 = 0.25$, $\omega_2 = 0.60$.

Такие потенциалы имеют бесконечное число периодически распределенных собственных значений. Расстояния между уровнями определяются значениями $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_0, \omega_1, \dots$.

Для того чтобы осуществить замену параметров (22), функция f должна удовлетворять соотношению $f(f(\dots f(x)\dots)) \equiv f^{(k)}(x) = x$. Проективное отображение

$$f(y) = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \quad (23)$$

с определенными условиями на параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ удовлетворяет такому соотношению [5].

Следующий шаг заключается в указании алгебры Ли, лежащей в основе данной модели. Для этого необходимо найти функцию χ , удовлетворяющую уравнению

$$\chi(z + p) = f(\chi(z)) \equiv \frac{\alpha \chi(z) + \beta}{\gamma \chi(z) + \delta}. \quad (24)$$

Это разностное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$\chi(z) = \frac{(\lambda_1 - \delta)\lambda_1^{z/p} + (\lambda_2 - \delta)\lambda_2^{z/p} B(z)}{\gamma[\lambda_1^{z/p} + \lambda_2^{z/p} B(z)]}, \quad (25)$$

где $\lambda_{1,2}$ – решения уравнения $(x - \alpha)(x - \delta) - \beta\gamma = 0$. Для простоты функцию $B(z)$ можно выбрать в виде произвольной постоянной.

Подставляя это выражение в соотношения (9), получаем

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, \\ [J_+, J_-] &= \xi(J_3) \equiv -\frac{1}{c} \frac{A(\lambda_1 - \delta)\lambda_1^{-J_3} + B(\lambda_2 - \delta)\lambda_2^{-J_3}}{A\lambda_1^{-J_3} + B\lambda_2^{-J_3}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Применяя нашу стандартную процедуру для нахождения спектра гамильтониана $H_- = J_+ J_-$, видим, что основное состояние лежит на нулевом уровне энергии. Следующие $(k - 1)$ собственных значений суть

$$E_l = \sum_{j=0}^l \omega_j, \quad l = 0, 1, \dots, k - 2,$$

а остальные получаются в результате добавления произвольных величин, кратных $\Omega_k \equiv \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{k-1}$.

Этот результат полностью согласуется с результатами работы [5].

3.3. Потенциалы Натансона. В разделе 2 мы отмечали, что для форминвариантных потенциалов с параметрами, связанными трансляционным преобразованием (т.е. $a_1 = a_0 + 1$), условие форминвариантности способствует замыканию алгебры в известную алгебру типа $so(3)$ или $so(2, 1)$, обеспечивая линейную зависимость функции $R(a_0)$ от a_0 [7]. К этой категории принадлежит ряд форминвариантных потенциалов, среди которых потенциал Морзе, потенциалы Scarf I, Scarf II, а также обобщенные потенциалы Пешля–Теллера. Однако есть много важных форминвариантных потенциалов (например, кулоновский), для которых $R(a_0)$ не являются линейными функциями a_0 . На основании метода, описанного в предыдущем разделе, деформированные потенциальные алгебры можно было бы получить и для таких систем. Хотя мы теперь знаем, как получать представления таких алгебр, в этом разделе мы воспользуемся другим подходом. Он состоит в том, чтобы обобщить структуру операторов $J_{\pm}$ так, чтобы их алгебра оставалась линейной. В этом пункте, вместо того чтобы выявлять алгебраическую структуру, скрытую в форминвариантной системе, мы фактически получаем форминвариантные потенциалы из основной потенциальной алгебры.

В работе [3] было показано, что алгебра, ассоциированная с потенциалом Натансона общего вида, является алгеброй $so(2, 2)$. Уравнение Шредингера для таких потенциалов сводится, вообще говоря, к гипергеометрическому уравнению. Ниже будет показано, что наложение дополнительного условия порождает форминвариантные потенциалы с трансляционной заменой параметров. Для полноты картины в этом пункте мы

также вкратце исследуем свойства алгебры $so(2, 2)$ и покажем, что она связана с потенциалами Натансона [6]. Затем, наложив некоторое дополнительное условие, мы покажем, что потенциалы Натансона становятся форминвариантными. Мы увидим, что данное условие действительно приводит к построению всех известных форминвариантных потенциалов трансляционного типа. Фактически будет показано, что подмножество потенциалов Натансона, ассоциированное с трансляционными (аддитивными) форминвариантными потенциалами, имеет более простую алгебру $so(2, 1)$.

Начнем с описания реализации алгебры $so(2, 2)$, исследованной в работе [3], в терминах дифференциальных операторов. Чтобы быть последовательными, используем формализм и обозначения работ [3].

Дифференциальную реализацию можно записать в следующем явном виде:

$$\begin{aligned} A_{\pm} &\equiv A_1 \pm A_2 = \frac{1}{2} e^{\pm i(\phi + \theta)} \left[\mp \frac{\partial}{\partial \chi} + \operatorname{th} \chi(-i\partial_{\phi}) + \operatorname{cth} \chi(-i\partial_{\theta}) \right], \\ A_3 &= -\frac{i}{2} (\partial_{\phi} + \partial_{\theta}), \\ B_{\pm} &\equiv B_1 \pm B_2 = \frac{1}{2} e^{\pm i(\phi - \theta)} \left[\mp \frac{\partial}{\partial \chi} + \operatorname{th} \chi(-i\partial_{\phi}) + \operatorname{cth} \chi(+i\partial_{\theta}) \right], \\ B_3 &= -\frac{i}{2} (\partial_{\phi} - \partial_{\theta}). \end{aligned} \quad (27)$$

Соответствующая этим операторам алгебра $so(2, 1)$ задается соотношениями

$$[A_3, A_{\pm}] = \pm A_{\pm}, \quad [A_+, A_-] = -2A_3$$

и аналогично для операторов B . Оператор Казимира имеет вид

$$\begin{aligned} C_2 &= 2(A_3^2 - A_+ A_- - A_3) + 2(B_3^2 - B_+ B_- - B_3) = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + (\operatorname{th} \chi + \operatorname{cth} \chi) \frac{\partial}{\partial \chi} + \operatorname{sech}^2 \chi (-i\partial_{\phi})^2 - \operatorname{cosech}^2 \chi (-i\partial_{\theta})^2 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Операторы A_3 , B_3 и C_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду, причем они следующим образом действуют на общее собственное состояние:

$$\begin{aligned} C_2 |\omega, m_1, m_2\rangle &= \omega(\omega + 2) |\omega, m_1, m_2\rangle, \\ A_3 |\omega, m_1, m_2\rangle &= m_1 |\omega, m_1, m_2\rangle, \\ B_3 |\omega, m_1, m_2\rangle &= m_2 |\omega, m_1, m_2\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что записанный выше оператор Казимира действительно является самосопряженным относительно меры $\operatorname{sh} \chi \operatorname{ch} \chi d\chi d\phi d\theta$.

Теперь кратко опишем потенциал Натансона общего вида и покажем, что он связан с упомянутым выше оператором Казимира. Потенциал Натансона общего вида $U(r)$ неявно определяется [6] следующим образом:

$$U[z(r)] = \frac{-fz(1-z) + h_0(1-z) + h_1z}{Q(z)} - \frac{1}{2}\{z, r\}, \quad (30)$$

где функция $Q(z)$ квадратична по z : $Q(z) = az^2 + b_0z + c_0 = a(1-z)^2 - b_1(1-z) + c_1$, а $f, h_0, h_1, a, b_0, b_1, c_0, c_1$ — константы. Производная Шварца $\{z, r\}$ задана соотношением

$$\{z, r\} \equiv \frac{\frac{d^3z}{dr^3}}{\frac{dz}{dr}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2z}{dr^2}}{\frac{dz}{dr}} \right)^2. \quad (31)$$

Связь переменных z ($0 < z < 1$) и r неявно определяется уравнением

$$\left(\frac{dz}{dr} \right) = \frac{2z(1-z)}{\sqrt{Q(z)}}. \quad (32)$$

Чтобы найти связь между оператором Казимира C_2 алгебры $so(2, 2)$ (см. уравнение (28)) и потенциалом Натансона общего вида, подвергнем C_2 преобразованию подобия при помощи функции F , которое затем дополним подходящей заменой переменных $\chi = g(r)$. В работе [13] было показано, что, для того чтобы оператор C_2 имел вид гамильтониана уравнения Шредингера, необходимо выбрать $F \sim (\text{sh}(2g)/g')^{1/2}$, $z = \text{th}^2 g$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} U(z(r)) &= \frac{EQ - \frac{7}{4} + \frac{5}{2}z - \frac{7}{4}z^2 - z(1-z)(-i\partial_\phi)^2 + (1-z)(-i\partial_\theta)^2}{Q} - \frac{1}{2}\{z, r\} = \\ &= \frac{1}{Q(z)} \left[- \left(aE - \frac{4}{7} + (-i\partial_\phi)^2 \right) z(1-z) + \left(c_0E - \frac{7}{4} + (-i\partial_\theta)^2 \right) (1-z) + \right. \\ &\quad \left. + ((a + b_0 + c_0)E - 1) \right] - \frac{1}{2}\{z, r\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$g' = \frac{dg}{dr} = \frac{dg}{dz} \frac{dz}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{z}(1-z)} \frac{2z(1-z)}{Q} = \sqrt{\frac{z}{Q}},$$

$g = \text{th}^{-1} \sqrt{z}$, а также выражением для dz/dr из уравнения (32). Теперь, учитывая соотношения

$$\begin{aligned} f &= aE - \frac{7}{4} + (-i\partial_\phi)^2, \\ h_0 &= c_0E - \frac{7}{4} + (-i\partial_\theta)^2, \\ h_1 &= (a + b_0 + c_0)E - 1, \end{aligned} \quad (34)$$

получаем, что потенциал (33) действительно имеет вид общего потенциала Натансона (см. уравнение (30)). Дальнейшие подробности можно найти в работах [13, 14].

Теперь мы готовы явно показать существование связи между алгеброй, соответствующей потенциалу Натансона, и форминвариантными потенциалами ССКМ.

Заметим, что преобразование подобия можно переписать в другом виде, пользуясь тем фактом, что $g = \text{th}^{-1} \sqrt{z}$, $g' = \sqrt{z/Q}$, а также уравнением (32). Мы получаем, что $(\text{sh}(2g)/g') = z/z'$. Здесь необходимо вернуться к операторам $A_{\pm}$ (см. уравнение (27)) и выяснить, как они изменяются при преобразовании подобия, задаваемом функцией $F \sim (\text{sh}(2g)/g')^{1/2} \sim \sqrt{z/z'}$.

Такое преобразование переводит операторы $A_{\pm}$ в операторы $\tilde{A}_{\pm}$:

$$A_{\pm} \longrightarrow \tilde{A}_{\pm} = \frac{e^{\pm i(\phi+\theta)}}{2} \left[\mp \left(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{2z'} \frac{dz'}{d\chi} - \frac{1}{2z} \frac{dz}{d\chi} \right) + \text{th} \chi (-i\partial_{\phi}) + \text{cth} \chi (-i\partial_{\theta}) \right]. \quad (35)$$

Эти выражения, за исключением члена

$$\left(\frac{1}{2z'} \frac{dz'}{d\chi} - \frac{1}{2z} \frac{dz}{d\chi} \right),$$

очень похожи на выражения (27) и фактически представляют собой операторы $A_{\pm}$ форминвариантного потенциала Пешля–Теллера [1].

Таким образом, если бы выражение

$$\left(\frac{1}{2z'} \frac{dz'}{d\chi} - \frac{1}{2z} \frac{dz}{d\chi} \right)$$

было линейной комбинацией $\text{th} \chi$ и $\text{cth} \chi$, то операторы $\tilde{A}_{\pm}$ можно было бы преобразовать к виду, подобному операторам $A_{\pm}$ из уравнения (27), и мы получили бы операторы $A_{\pm}$, порождающие форминвариантные гамильтонианы.

Поэтому, чтобы получить форминвариантные потенциалы, мы должны потребовать выполнения условия

$$\left(\frac{1}{2z'} \frac{dz'}{d\chi} - \frac{1}{2z} \frac{dz}{d\chi} \right) = \alpha \text{th} \chi + \beta \text{cth} \chi. \quad (36)$$

Отсюда следует

$$z' = z^{1+\beta} (1-z)^{-\alpha-\beta}, \quad (37)$$

что является вторым условием, связывающим переменные z и r . Поскольку эти переменные уже связаны соотношением (32), то только некоторые решения могут удовлетворять обоим ограничениям. Функции $z(r)$, одновременно удовлетворяющие уравнениям (32) и (37), имеют вид

$$z^{1+\beta} (1-z)^{-\alpha-\beta} = \frac{2z(1-z)}{\sqrt{Q(z)}}, \quad (38)$$

где $Q(z)$ – квадратичная функция z . После некоторых вычислений получаем, что существует только конечное число значений α, β , удовлетворяющих уравнению (38). Эти значения представлены в таблице, причем они исчерпывают все известные форминвариантные потенциалы, приводящие к гипергеометрическому уравнению.

α	β	$z(r)$	Суперпотенциал	Потенциал
0	0	$z = e^{-r}$	$\tilde{m}_1 \operatorname{cth} \frac{r}{2} + \tilde{m}_2$	Эккарта
0	$-\frac{1}{2}$	$z = \sin^2 \frac{r}{2}$	$\tilde{m}_1 \operatorname{cosec} r + \tilde{m}_2 \operatorname{ctg} r$	Общий Пешля–Теллера Тригонометрический
0	-1	$z = 1 - e^{-r}$	$\tilde{m}_1 \operatorname{cth} \frac{r}{2} + \tilde{m}_2$	Эккарта
$-\frac{1}{2}$	0	$z = \operatorname{sech}^2 \frac{r}{2}$	$\tilde{m}_1 \operatorname{cosec} r + \tilde{m}_2 \operatorname{cth} r$	Пешля–Теллера II
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$z = \operatorname{th}^2 \frac{r}{2}$	$\tilde{m}_1 \operatorname{th} \frac{r}{2} + \tilde{m}_2 \operatorname{cth} \frac{r}{2}$	Общий Пешля–Теллера
-1	0	$z = 1 + \operatorname{th} \frac{r}{2}$	$\tilde{m}_1 \operatorname{th} \frac{r}{2} + \tilde{m}_2$	Розена–Морзе

Более того, в то время как потенциальная алгебра общей системы Натансона является алгеброй $so(2, 2)$ и требует наличия двух наборов повышающих и понижающих операторов $A_{\pm}$ и $B_{\pm}$, для всех трансляционных форминвариантных потенциалов необходим только один такой набор. Получаем, что для всех форминвариантных потенциалов, представленных в табл. 4.1 работы [1], все “потенциалы-партнеры” связаны заменой только одного независимого параметра (хотя там могут присутствовать и другие, неизменяющиеся параметры). Таким образом, имеется последовательность потенциалов, отличающихся только одним параметром. С точки зрения потенциальной алгебры все эти потенциалы отличаются только собственными значениями оператора, представляющего собой линейную комбинацию A_3 и B_3 , причем все они характеризуются общим собственным значением оператора C_2 . Таким образом, эти форминвариантные потенциалы можно связать с потенциальной алгеброй $so(2, 1)$, порождаемой операторами A_+ , A_- и той же самой линейной комбинацией операторов A_3 и B_3 .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы исследовали причины, обеспечивающие интегрируемость форминвариантных гамильтонианов, и показали, что такие системы обычно допускают существование алгебраической структуры, известной как потенциальная алгебра. Мы получили такие алгебры для форминвариантных систем с заменой параметров посредством трансляции или масштабного преобразования, а также для циклических потенциалов. В общем случае мы получаем деформации алгебры Ли $so(2, 1)$. Наш метод связывает подходы теоретико-групповой и ССКМ к анализу форминвариантных потенциалов.

Благодарности. А.Г. выражает благодарность Чикагскому университету Лойолы за предоставленные отпуск от преподавания и грант, без которых его участие в дан-

ной работе было бы невозможно. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства энергетики США.

Список литературы

- [1] *F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme.* Phys. Rep. 1995. V. 251. P. 268.
- [2] *L. Infeld, T. E. Hull.* Rev. Mod. Phys. 1951. V. 23. P. 21; *Л. Е. Генденштейн.* Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 299.
- [3] *Y. Alhassid, F. Gürsey, F. Iachello.* Ann. Phys. 1983. V. 148. P. 346; *J. Wu, Y. Alhassid.* Phys. Rev. A. 1990. V. 31. P. 557.
- [4] *A. O. Barut, A. Inomata, R. Wilson.* J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. P. 4075; P. 4083; *M. J. Englefield.* J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 827; *M. J. Englefield, C. Quesne.* J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 24. P. 3557; *R. D. Tangerman, J. A. Tjon.* Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 1089.
- [5] *Asim Gangopadhyaya, Uday P. Sukhatme.* Phys. Lett. A. 1996. V. 224. P. 5; *U. P. Sukhatme, C. Rasinariu, A. Khare.* Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 401; Cyclic Shape Invariant Potentials. hep-ph/9706282.
- [6] *Г. А. Натанзон.* ТМФ. 1979. Т. 38. С. 219.
- [7] *A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, U. P. Sukhatme.* Shape invariance and its connection to potential algebra. In: Lect. Notes in Phys. Supersymmetry and Integrable Models. Proc. of Workshop. Chicago, IL, USA, June 12–14, 1997. V. 502. Eds Henrik Aratyn et al. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1998. P. 341.
- [8] *A. B. Balantekin.* Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 4188; Algebraic Approach to Shape Invariance. quant-ph/9712018.
- [9] *M. Rocek.* Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 554; *T. Curtright, C. Zachos.* Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 237; *T. Curtright, G. Ghandour, C. Zachos.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 676.
- [10] *A. Shabat.* Inverse Prob. 1992. V. 8. P. 303; *V. P. Spiridonov.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 398.
- [11] *D. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A. Pagnamenta, U. Sukhatme.* Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 2786.
- [12] *S. Chaturvedi, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, P. Panigrahi, C. Rasinariu, U. Sukhatme.* To appear in Phys. Lett. A. 1998.
- [13] *A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, U. P. Sukhatme.* Shape invariance and inherent potential algebra. To appear in Phys. Rev. A.
- [14] *A. Gangopadhyaya, P. Panigrahi, U. Sukhatme.* Helv. Phys. Acta. 1994. V. 67. P. 363.