Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Глебов, Резонансные слои в задачах о взаимодействии быстроосциллирующих волновых полей, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 375–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:46:02

© 1999 г.

С. Г. Глебов*

РЕЗОНАНСНЫЕ СЛОИ В ЗАДАЧАХ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Исследуются явления, имеющие место при слабом резонансном взаимодействии быстроосциллирующих волновых полей. В общем случае при резонансном взаимодействии обнаруживаются узкие переходные слои, внутри которых динамика волнового поля описывается в терминах нелинейного уравнения Шредингера.

Целью данной работы является описание динамики главного члена формального асимптотического решения задачи о слабом нелинейном взаимодействии в узких переходных слоях вблизи резонанса.

Известно, что многие волновые уравнения допускают решения в виде плоской, монохроматической волны $U = A \exp\{i(\langle k, x \rangle - \omega t)\}$, $k \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. При этом частота ω и волновой вектор k не произвольны, а связаны дисперсионным соотношением $L(\omega, k) = 0$. Вид дисперсионного соотношения определяется выбором уравнения. Однако большая часть решений не допускает выражения через столь простые функции. Поэтому имеет смысл искать решения не такого вида, а близкие к ним. Мерой близости является малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$.

В математической постановке задачи малый параметр может явно входить в начальные данные, характеризуя их отклонение от невозмущенных начальных данных. Примером служат начальные данные с медленной деформацией фазы $A \exp\{iS_0(\varepsilon x)/\varepsilon\}$ или амплитуды $A(\varepsilon x) \exp\{i\langle k, x \rangle\}$. Обычно такие задачи записываются в “медленных” переменных $\xi = \varepsilon x$, $\theta = \varepsilon t$ так, что соответствующее дифференциальное уравнение содержит малые множители при производных,

$$L(i\varepsilon \partial_\theta, -i\varepsilon \nabla_\xi)U = 0, \quad U|_{\theta=0} = A(\xi) \exp\left\{i \frac{S_0(\xi)}{\varepsilon}\right\}.$$

Асимптотические решения таких задач хорошо известны и описываются формулами ВКБ-приближений или коротковолновой асимптотики

$$U = \exp\left\{i \frac{S(\xi, \theta)}{\varepsilon}\right\} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n A^n(\xi, \theta). \quad (1)$$

*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия. E-mail: gloomy@imat.rb.ru; gloomy@oil.ru

Фаза S определяется из уравнения эйконала $L(-\partial_\theta S, \nabla_\xi S) = 0$, а коэффициенты разложения амплитуды $\overset{n}{A}$ – из уравнений переноса.

Эти формулы дают асимптотическое решение для линейных уравнений. Линейность обеспечивает простую суперпозицию волн с разными фазами. Такая ситуация сохраняется и при возмущении дифференциального уравнения

$$L(i\varepsilon\partial_\theta, -i\varepsilon\nabla_\xi, \xi, \theta; \varepsilon)U = \varepsilon f(U, \xi, \theta),$$

если возмущающие добавки – линейные операторы. При этом в асимптотическом решении изменения касаются лишь уравнений переноса.

Иное дело, если берется нелинейное возмущение. В этом случае возможны совершенно иные эффекты. Уравнения для амплитуд становятся квазилинейными и возможно появление в главном члене асимптотического решения слагаемых с новыми комбинационными фазами. Подобные ситуации характеризуются термином “резонансные”. В случае фаз с медленной деформацией S_1, S_2 , которые определяются из уравнений эйконала, резонансными называют такие ситуации, в которых комбинационная фаза $S(\xi, \theta) = S_1 + S_2$ сама удовлетворяет уравнению эйконала. Для разных типов решений уравнение эйконала может выполняться тождественно по $(\xi, \theta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (глобальный резонанс) либо на многообразиях меньшей чем $n+1$ размерности (слабый или локальный резонанс).

Задачи с локальным резонансом рассматривались как для обыкновенных дифференциальных уравнений [1–3], так и для систем уравнений в частных производных [4–7]. В данной статье рассматривается последний случай. Оказывается, что вблизи локального резонанса становится непригодным анзац ВКБ (1). Для того чтобы правильно описать поведение решения в окрестности резонансных многообразий (в переходных слоях), вводятся новые “растянутые” переменные, а затем с использованием этих новых переменных в слое локального резонанса строится свой “внутренний” анзац. При этом, естественно, требуется согласованность “внешнего” и “внутреннего” анзацев.

1. ВОЗМУЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим для иллюстрации задачу о возмущении волнового уравнения известной быстроосциллирующей силой

$$\varepsilon^2 U_{\theta\theta} - \varepsilon^2 c^2(\xi, \theta) U_{\xi\xi} = \exp \left\{ i \frac{\Phi(\xi, \theta)}{\varepsilon} \right\}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2)$$

Фаза возмущения Φ в уравнении (2) – известная гладкая функция своих переменных.

Будем искать формальное асимптотическое решение (ФАР) уравнения (2) в виде ВКБ-анзаца

$$U(\xi, \theta; \varepsilon) = \exp \left\{ i \frac{\Phi(\xi, \theta)}{\varepsilon} \right\} \left[U^0(\xi, \theta) + \varepsilon U^1(\xi, \theta) + \dots \right]. \quad (3)$$

Подставляя анзац (3) в уравнение (2) и собирая слагаемые при одинаковых степенях малого параметра, получаем рекуррентную последовательность уравнений для определения амплитуд $\overset{n}{U}(\xi, \theta)$.

Главный член ФАР

$$U = \frac{1}{c^2 \Phi_\xi^2 - \Phi_\theta^2}$$

имеет особенность в пространстве медленных переменных (ξ, θ) около кривой, где волновое число Φ_ξ и частота Φ_θ возмущения удовлетворяют уравнению эйконала

$$S_\theta^2 - c^2 S_\xi^2 = 0.$$

В следующих поправках порядок особенности нарастает. Ряд (3) перестает быть асимптотическим в узкой (порядка $\sqrt{\varepsilon}$) окрестности этой кривой. Это указывает на изменение характера главного члена формального асимптотического решения вблизи резонанса.

Выберем какую-нибудь одну из кривых $\Phi_\theta \pm c\Phi_\xi = 0$, например l_+ , и проведем построения в ее окрестности. Построения около резонансной кривой l_- проводятся аналогично.

Введем характерную переменную $Z = \Phi_\theta + c\Phi_\xi$, которая может рассматриваться как расстояние до кривой l_+ . Задача описания поведения решения при подходе к резонансной кривой равносильна построению ФАР при $Z \rightarrow 0$. ФАР уравнения (2) при подходе к линии локального резонанса (при $Z \rightarrow 0$) имеет вид

$$U(Z, \theta; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{Z^{2n+1}} \tilde{U}^n(Z, \theta), \quad Z \rightarrow 0,$$

здесь амплитуды $\tilde{U}^n$ — гладкие функции по переменной Z .

Для того чтобы правильно описать решение в окрестности кривой l_+ , введем новую “растянутую” переменную $\zeta = Z/\sqrt{\varepsilon}$.

Внутреннее ФАР будем искать в виде

$$U(\xi, \theta, \zeta; \varepsilon) = e^{i\frac{\Psi(\xi, \theta)}{\varepsilon}} \left[\varepsilon^{-1/2} \bar{V}^{-1}(\zeta, \theta) + \bar{V}^0(\zeta, \theta) + \sqrt{\varepsilon} \bar{V}^1(\zeta, \theta) + \dots \right], \quad (4)$$

здесь фаза Ψ внутреннего решения удовлетворяет уравнению эйконала $\Psi_\theta + c\Psi_\xi = 0$ и условиям $\Psi = \Phi$, $\Psi_\theta = \Phi_\theta$, $\Psi_\xi = \Phi_\xi$ на резонансной кривой l_+ . Появление отрицательных степеней малого параметра ε в асимптотическом решении (4) обусловлено резонансом и соответствует особенностям во внешнем разложении.

Для амплитуды главного члена асимптотики внутреннего решения получаем неоднородное линейное уравнение Шредингера

$$i\partial_\theta \bar{V}^{-1} + a(\theta) \partial_\zeta^2 \bar{V}^{-1} + ib(\theta) \bar{V}^{-1} = c(\theta) \exp\{ip_0(\theta)\zeta^2\},$$

коэффициенты которого — известные функции, зависящие только от переменной θ . Из условия согласования с решением во внешней области для функции $\bar{V}^{-1}$ выписывается асимптотика при $|\zeta| \rightarrow \infty$:

$$\bar{V}^{-1} \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sim O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right).$$

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Основной результат статьи содержится в этом разделе. Рассмотрим задачу Коши для двумерного слабонелинейного уравнения Шредингера

$$i\varepsilon \partial_\theta U + \varepsilon^2 \Delta U + qU + \varepsilon \gamma |U|^2 U = 0, \quad (5)$$

где $\Delta = \partial_\xi^2 + \partial_\eta^2$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $q(\xi, \eta, \theta)$ — известная гладкая функция.

Начальные данные берутся в виде суммы двух быстроосциллирующих гармоник с медленно меняющимися амплитудами

$$U|_{\theta=0} = A_1(\xi, \eta) \exp(i\varepsilon^{-1} \varphi_1^0) + A_2(\xi, \eta) \exp(i\varepsilon^{-1} \varphi_2^0). \quad (6)$$

Будем предполагать, что исходные фазы φ_1^0, φ_2^0 в начальный момент не произвольны, а связаны соотношением

$$\nabla \varphi_1^0(\xi, \eta) = \nabla \varphi_2^0(\xi, \eta) \quad (7)$$

в одной изолированной точке (ξ_0, η_0) .

Условия (7) замечательны тем, что они приводят к появлению в пространстве независимых переменных резонансных многообразий. Многообразием локального резонанса оказывается одномерная кривая, образуемая совпадающими лучами, выходящими из точки (ξ_0, η_0) . Под лучами здесь понимаются характеристики уравнения эйконала для соответствующей фазы.

Наша цель состоит в построении формального асимптотического решения задачи (5), (6), равномерно пригодного в некотором слое $\Omega = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \theta \leq \theta^*\}$. При этом, как обычно [8], вся область Ω разбивается на несколько подобластей со своим представлением решения в каждой из них. Подобласти удобно определить в переменных $S = \sqrt{2} \partial_\xi(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $R = \sqrt{2} \partial_\eta(\varphi_1 - \varphi_2)$,

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{ex}} &= \{0 \leq \theta \leq \theta^*, \sqrt{S^2 + R^2} \geq \varepsilon^{1/4}\} \quad \text{— внешняя область,} \\ \Omega_{\text{in}} &= \{0 \leq \theta \leq \theta^*, \sqrt{S^2 + R^2} \leq 2\varepsilon^{1/4}\} \quad \text{— внутренняя область.} \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции A_k, φ_k^0 и любые их производные равномерно ограничены по переменным ξ, η . Тогда в области Ω формальное асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи (5), (6) по модулю $O(\varepsilon^{5/2})$ в различных областях имеет разное асимптотическое представление,

$$U(\xi, \eta, \theta; \varepsilon) \approx U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2, \quad (\xi, \eta, \theta) \in \Omega_{\text{ex}}, \quad (8)$$

и

$$U(\xi, \eta, \theta; \varepsilon) \approx \exp\{i\varepsilon^{-1} \varphi_1^0\} \left[V + \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{V} + \varepsilon \frac{2}{V} \right], \quad (\xi, \eta, \theta) \in \Omega_{\text{in}}. \quad (9)$$

Построение ФАР во внешней области не вызывает затруднений. Решение ищется в виде обычного ВКБ-анзаца (8), где

$$U_n(\xi, \eta, \theta; \varepsilon) = \left[\sum_{\varphi \in \Phi_n} \overset{n}{A}_\varphi \exp(i\varepsilon^{-1}\varphi) + \sum_{\psi \in \Psi_n} \overset{n}{B}_\psi \exp(i\varepsilon^{-1}\psi) \right], \quad (10)$$

неизвестные функции $\overset{n}{A}_\varphi, \overset{n}{B}_\psi, \varphi, \psi$ зависят от переменных (ξ, η, θ) . Суммирование в формуле (10) происходит как по собственным фазам $\varphi \in \Phi_n, n = 0, 1, \dots$, удовлетворяющим уравнению эйконала, так и по несобственным комбинационным фазам $\psi \in \Psi_n, n = 0, 1, \dots$. В каждой поправке U_n имеется только конечное число слагаемых.

После подстановки представления (8) в задачу (5), (6) получается рекуррентная последовательность задач для определения фаз и амплитуд.

На первом шаге определяются собственные фазы φ_1, φ_2 . Они удовлетворяют неоднородному уравнению эйконала

$$l[\varphi_k] \equiv \partial_\theta \varphi_k + (\partial_\xi \varphi_k)^2 + (\partial_\eta \varphi_k)^2 = -q(\xi, \eta, \theta) \quad (11)$$

и начальным данным

$$\varphi_k|_{\theta=0} = \overset{0}{\varphi}_k(\xi, \eta), \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

ЛЕММА. *Кривая l , образуемая совпадающими лучами исходных гармоник, выходящими из точки (ξ_0, η_0) , является многообразием локального резонанса в том смысле, что на ней выполнены резонансные соотношения $\nabla \varphi_1 = \nabla \varphi_2, (\xi, \eta, \theta) \in l$.*

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственными вычислениями.

Несобственные комбинационные фазы ψ в главном члене отсутствуют, поэтому амплитуды $\overset{0}{B}_\psi$ при них тождественно равны нулю.

Собственные амплитуды $\overset{0}{A}_\varphi$ главного члена ФАР являются гладкими функциями своих переменных и определяются из квазилинейной системы уравнений переноса

$$i\partial_\theta \overset{0}{A}_k + 2i\langle \nabla \varphi_k, \nabla \overset{0}{A}_k \rangle + i\Delta \varphi_k \overset{0}{A}_k + \gamma \left[\left| \overset{0}{A}_k \right|^2 + 2 \sum_{m \neq k} \left| \overset{0}{A}_m \right|^2 \right] \overset{0}{A}_k = 0$$

и начальных данных

$$\overset{0}{A}_k \Big|_{\theta=0} = A_k(\xi, \eta), \quad k = 1, 2.$$

В первой поправке U_1 присутствуют несобственные комбинационные фазы $\psi \in \Psi_1 = (2\varphi_1 - \varphi_2, 2\varphi_2 - \varphi_1)$. Соответствующие им амплитуды $\overset{1}{B}_\psi$ определяются из алгебраических соотношений

$$l[\psi] \overset{1}{B}_\psi = \overset{1}{F}_\psi, \quad \psi \in \Psi_1. \quad (13)$$

Принимая во внимание лемму, непосредственными вычислениями проверяется, что множитель $l[\psi]$ на линии l локального резонанса обращается в нуль для всех комбинационных фаз первой поправки. Это приводит к тому, что все несобственные амплитуды $\overset{1}{B}_\psi$ имеют особенности на линии локального резонанса.

Для собственных амплитуд $\overset{1}{A}_k$ ($k = 1, 2$) получаем неоднородную систему уравнений переноса. Правые части этой линейной системы имеют особенности на линии локального резонанса. Наличие особенностей объясняется тем, что в правую часть уравнений входят несобственные амплитуды $\overset{1}{B}_\psi$ первой поправки.

Для того чтобы проанализировать поведение амплитуд $\overset{1}{A}_k$ ($k = 1, 2$) при подходе к линии локального резонанса, удобно использовать переменные $D = \sqrt{S^2 + R^2}$, $\Phi = \arctg(R/S)$, тем более что переход к этим переменным дает возможность получения равномерно пригодного выражения для асимптотики.

Система уравнений для определения собственных амплитуд первой поправки в переменных (D, Φ, θ) записывается следующим образом:

$$\partial_\theta A_k + a_k \partial_D A_k + \frac{1}{D} b_k \partial_\Phi A_k + c_k A_1 + d_k A_2 + e_k A_1^* + f_k A_2^* = \frac{1}{D^2} h_k, \quad (14)$$

начальные данные однородны

$$A_k|_{\theta=0} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Коэффициенты a_k , b_k являются гладкими функциями и имеют порядок $O(D)$ при $D \rightarrow 0$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи (14), (15) для амплитуд первой поправки существует, единственно и при подходе к линии локального резонанса имеет асимптотику вида*

$$\overset{1}{A}_k(D, \Phi, \theta) = \sum_{m=-2}^{\infty} \overset{k}{\alpha}_m(\Phi, \theta) D^m, \quad D \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \quad \overset{k}{\alpha}_{-2} \neq 0. \quad (16)$$

Доказательство теоремы проводится так же, как и в работе [8]. Выполняются формальные построения асимптотики, а затем проводится их обоснование.

Кроме исходных собственных фаз φ_1 и φ_2 , в первой поправке имеется новая пара собственных фаз φ , отсутствующая в главном члене. Слагаемые, соответствующие этим фазам, должны компенсировать в начальных данных вклады от несобственных комбинационных фаз ψ .

Новые собственные фазы φ определяются из уравнений эйконала (11) и начальных условий $\varphi|_{\theta=0} = \psi|_{\theta=0}$, где $\psi \in \Psi_1$. Соответствующие им амплитуды $\overset{1}{A}_\varphi$, $\varphi \neq \varphi_k$, удовлетворяют однородным уравнениям типа (14) и начальным данным

$$\overset{1}{A}_\varphi \Big|_{\theta=0} = -\overset{1}{B}_\psi \Big|_{\theta=0}. \quad (17)$$

Начальные данные (17) приводят к тому, что все новые собственные амплитуды $\overset{1}{A}_\varphi$ имеют особенности при любых $\theta \geq 0$ на линии l локального резонанса из-за особенностей соответствующих $\overset{1}{B}_\psi$.

В следующей поправке увеличивается число как несобственных комбинационных фаз ψ , так и компенсирующих их новых собственных фаз φ . Порядок особенностей при подходе к линии локального резонанса у всех амплитуд второй поправки увеличивается до $O(D^{-4})$. Представление (8) в окрестности l становится непригодным. Здесь предлагается использовать внутренние “растянутые” переменные $\sigma = S/\sqrt{\varepsilon}$, $\rho = R/\sqrt{\varepsilon}$ и решение исходной задачи искать в виде анзаца (9). При этом в представлении (9) сохраняется только одна фаза, т.к. в окрестности линии l фазы исходных гармоник отличаются на величину порядка $O(D^2)$, $D \rightarrow 0$.

Для амплитуды $\overset{0}{V}$ главного члена внутреннего ФАР получаем двумерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_\theta v + a(\theta)\partial_\sigma^2 v + b(\theta)\partial_{\sigma\rho}^2 v + c(\theta)\partial_\rho^2 v + f(\theta)v + \gamma|v|^2 v = 0 \quad (18)$$

и начальное условие

$$v|_{\theta=0} = A + B \exp\{i(k_1\sigma^2 + k_2\rho^2)\}. \quad (19)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого N имеется такое число $T_1(N)$, что для всех $\theta \in [0, T_1]$ решение задачи (18), (19) существует, единственно и при $\sigma^2 + \rho^2 \rightarrow \infty$ обладает равномерной по θ асимптотикой вида*

$$\begin{aligned} v(\sigma, \rho, \theta) = & \overset{0}{v}(\theta) + \overset{0}{v}_\nu(\theta) \exp\{i(\kappa_1(\theta)\sigma^2 + \kappa_2(\theta)\rho^2)\} + \\ & + \sum_{m \geq 1}^N \frac{1}{(\sigma^2 + \rho^2)^m} \left(\overset{-2m}{v}(\rho, \sigma, \theta) + \right. \\ & + \sum_{\nu} \overset{-2m}{v}_\nu(\rho, \sigma, \theta) \exp\{i(\kappa_1^\nu(\theta)\sigma^2 + \kappa_2^\nu(\theta)\rho^2)\} \Big) + \\ & + O((\sigma^2 + \rho^2)^{-(N+1)}). \end{aligned} \quad (20)$$

Вид асимптотики (20) определяется из условия согласования с уже построенным внешним ФАР.

Доказательство теоремы проводится с использованием преобразования Фурье по пространственным переменным [9]. Точное решение ищется в виде суммы нескольких первых членов асимптотики и остатка. После преобразования Фурье для остатка выписывается интегродифференциальное уравнение, которое можно рассматривать как уравнение в некотором банаховом пространстве. Выбор пространства осуществляется из соображений ограниченности получаемых операторов [10]. Таким пространством оказывается пространство $\mathcal{M}_r$ с введенной в нем нормой графика замкнутого оператора

свертки с быстрой экспонентой. Пользуясь этим и липшицевостью полученных операторов, методом последовательных приближений доказывается существование решения уравнения для остатка в классе ограниченных функций.

Старшие поправки $\tilde{V}^n$, $n = 1, 2$, находятся из задач Коши для уравнений Шредингера, линеаризованных на амплитудах предыдущих приближений. Начальные данные для этих уравнений получаются из условия (6) после перехода к “внутренним” переменным σ и ρ и соответствующего разложения полученных функций в ряд по малому параметру.

Эти построения завершают доказательство теоремы 1.

Список литературы

- [1] *M. Ablowitz, A. Funk, A. Newell.* Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 51–74.
- [2] *J. Kevorkian.* SIAM J. Appl. Math. 1971. V. 20. P. 364–373.
- [3] *L. Rubinfeld.* Stud. Appl. Math. 1977. V. 57. P. 77–92.
- [4] *J. C. Neu.* SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. № 1. P. 141–156.
- [5] *С. Ю. Доброхотов, П. Н. Жевандров, В. М. Кузьмина.* Прикл. матем. и мех. 1987. Т. 51. № 5. С. 798–806.
- [6] *Л. А. Калякин.* Метод ВКБ в слабо нелинейной задаче с локальным резонансом. В сб.: Асимптотические методы решения задач математической физики. Ред. В. Ю. Новокшенов и др. Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1989. С. 56–69.
- [7] *Л. А. Калякин.* Мат. заметки. 1988. Т. 44. № 5. С. 697–699.
- [8] *С. Г. Глебов.* Дифф. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1402–1408.
- [9] *С. Г. Глебов.* Теорема существования для N -мерного нелинейного уравнения Шредингера. В сб.: Асимптотики и симметрии в нелинейных динамических системах. Ред. Л. А. Калякин. Уфа: Изд-во Института математики с Вычислительным центром РАН, 1995. С. 31–37.
- [10] *Л. А. Калякин, С. Г. Глебов.* Мат. заметки. 1994. Т. 56. С. 32–40.