Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ильин, О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 383–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:02:06

© 1999 г.

А. М. Ильин*

О МЕТОДЕ ДВУХ МАСШТАБОВ В ЗАДАЧЕ О ВОЗМУЩЕНИИ ОДНОЧАСТОТНОГО КОЛЕБАНИЯ

Рассматривается асимптотика решения начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром. Построено и обосновано асимптотическое приближение с точностью до любой степени малого параметра ε при значениях времени $t \gg \varepsilon^{-1}$.

Хорошо известно, что для решения задачи Коши

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = b, \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

регулярный ряд по степеням малого параметра ε , вообще говоря, не является асимптотическим при $t \gg 1$. Для того чтобы получить равномерное асимптотическое приближение при $t = O(\varepsilon^{-1})$, можно применить метод Крылова–Боголюбова–Митропольского или метод двух масштабов [1–6]. После введения медленного времени $\tau = \varepsilon t$ решение задачи (1) ищется в виде $u(t, \varepsilon t, \varepsilon)$, где функция $u(t, \tau, \varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \tau).$$

Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что $\omega = 1$. Условие отсутствия секулярных членов позволяет построить все $u_k(t, \tau)$, которые периодичны по переменной t . Главный член – это $u_0(t, \tau) = A(\tau) \cos(t + B(\tau))$, где $A(\tau)$ – решение задачи

$$2\pi A'(\tau) = - \int_0^{2\pi} f(A(\tau) \cos y, -A(\tau) \sin y) \sin y \, dy, \quad (2)$$

$$A(0) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Остальные дифференциальные уравнения относительно τ , возникающие в процессе исключения секулярных членов, линейны. Можно доказать [5], что при $t \leq L/\varepsilon$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \quad (3)$$

* Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: iam@imm.uran.ru

является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (1). Ясно, что L — это такая постоянная, при которой решение задачи (1) существует на отрезке $[0, L]$.

Естественно возникают следующие вопросы: существует ли решение задачи (1) при $t \gg \varepsilon^{-1}$ и, если оно существует, то каково его асимптотическое разложение?

Также естественны две гипотезы:

1. Если решение задачи (2) существует лишь на полуинтервале $[0, L]$, то и решение задачи (1) не может быть продолжено на всю полуось $[0, \infty)$.

2. Если решение задачи (2) может быть продолжено на всю полуось и к тому же экспоненциально быстро стремится к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, то ряд (3) является равномерно асимптотическим на всей полуоси $[0, \infty)$.

Оказывается, что, строго говоря, обе гипотезы неверны.

Гипотеза 2 несправедлива даже для самого популярного примера — уравнения Ван-дер-Поля, где $f(u, u') = u'(1 - u^2)$. В этом случае решение уравнения (2) экспоненциально быстро стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к пределу $A_\infty = 2$. Однако при этом следующие члены ряда (3) содержат секулярные слагаемые, так что этот ряд не является равномерно асимптотическим для решения задачи (1) при $t \gg \varepsilon^{-1}$.

Существуют разные подходы для построения асимптотики решения при временах $t \gg 1$. В работе [7] асимптотика строится при $t = O(\varepsilon^{-2})$, в работе [8] для построения асимптотики при больших временах требуется выполнение дополнительных соотношений. Известны способы получения асимптотики для больших значений t с помощью цепочки нелинейных замен [9, гл. 5]. Тем не менее представляется полезным другой подход, основанный на применении метода двух масштабов.

В данной публикации таким методом построена и обоснована асимптотика решения с точностью до любой степени ε^{-1} на промежутке времени $t = O(\varepsilon^{-N})$, где N — произвольное натуральное число.

В уравнении (1) (при $\omega = 1$) сделаем обычный переход к фазовым переменным:

$$u = \rho \cos(\varphi - \varphi_0), \quad \frac{du}{dt} = -\rho \sin(\varphi - \varphi_0), \quad (4)$$

где $\operatorname{tg} \varphi_0 = b/a$. Тогда задача (1) переходит в задачу

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 - \varepsilon H(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (5)$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \varepsilon G(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (6)$$

$$\varphi(0, \varepsilon) = 0, \quad \rho(0, \varepsilon) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (7)$$

где

$$H(\rho, \varphi, \varepsilon) = \rho^{-1} \cos(\varphi - \varphi_0) f(\rho \cos(\varphi - \varphi_0), -\rho \sin(\varphi - \varphi_0)),$$

$$G(\rho, \varphi, \varepsilon) = -\rho H(\rho, \varphi, \varepsilon) \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) [1 - \varepsilon H(\rho, \varphi, \varepsilon)]^{-1}.$$

Сначала рассмотрим дифференциальное уравнение (6), где $G(\rho, \varphi, \varepsilon) \in C^\infty - 2\pi$ -периодическая функция по переменной φ ,

$$G(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k G_k(\rho, \varphi). \quad (8)$$

Здесь и далее все ряды понимаются как асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предположим, что для некоторого $a_0 > 0$ справедливы соотношения

$$\int_0^{2\pi} G_0(a_0, \varphi) d\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial G_0(a_0, \varphi)}{\partial r} d\varphi = -2\gamma < 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\frac{\partial G_0(a_0, \varphi)}{\partial r} = \left. \frac{\partial G_0(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a_0}.$$

Если иметь в виду первоначальную задачу (1) и замену (4), то предположения (9), (10) соответствуют экспоненциально быстрому стремлению $A(\tau)$ (решения уравнения (6)), к пределу $a_0 > 0$, но дальнейшее рассмотрение носит более общий характер.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (9), (10), $G_k(\rho, \varphi) \in C^\infty$ в некоторой окрестности линии $\rho = a_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует 2π -периодическое решение $z(\varphi, \varepsilon)$ уравнения (6), для которого при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$z(\varphi, \varepsilon) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r_k(\varphi). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство существования периодического решения имеется, например, в [10, гл. XIV, § 1]. Для доказательства (11) подставим формальный ряд (11) в уравнение (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{d\varphi} &= G_0(a_0, \varphi), \\ \frac{dr_2}{d\varphi} &= \frac{\partial G_0(a_0, \varphi)}{\partial r} r_1 + G_1(a_0, \varphi), \\ \frac{dr_3}{d\varphi} &= \frac{\partial G_0(a_0, \varphi)}{\partial r} r_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_0(a_0, \varphi)}{\partial r^2} r_1^2 + \frac{\partial G_1(a_0, \varphi)}{\partial r} r_1 + G_2(a_0, \varphi), \\ &\dots \end{aligned} \quad (12)$$

Из этих уравнений последовательно находятся все r_k . В частности,

$$r_1(\varphi) = \int_0^\varphi G_0(a_0, \theta) d\theta + a_1.$$

Вследствие условия (9) величина r_1 является 2π -периодической функцией. Постоянная a_1 находится из следующего уравнения системы (12), условия периодичности на r_2 и условия (10). Далее таким же образом однозначно находятся все $r_k(\varphi)$.

Введем обозначение для частичной суммы построенного ряда (11):

$$z_n(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k r_k(\varphi), \quad r_0 = a_0.$$

Пусть $z_n(0, \varepsilon) = \alpha_n(\varepsilon)$, а $z(0, \varepsilon) = \alpha(\varepsilon)$, где $z(\varphi, \varepsilon) - 2\pi$ -периодическое решение уравнения (6). Тогда по построению

$$\frac{dz_n}{d\varphi} = \varepsilon G(z_n, \varphi, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} z_n(\varphi, \varepsilon) - z(\varphi, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^\varphi [G(z_n(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - G(z(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon)] d\xi + \\ &+ \alpha_n(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим $h_n(\varphi, \varepsilon) = z_n(\varphi, \varepsilon) - z(\varphi, \varepsilon)$, $\beta_n(\varphi, \varepsilon) = \alpha_n - \alpha$. Тогда из (13) вытекает, что

$$|h_n(\varphi, \varepsilon)| \leq |\beta_n(\varepsilon)| + \varepsilon M \int_0^\varphi |h_n(\xi, \varepsilon)| d\xi + O(\varepsilon^{n+1})$$

и, следовательно, $|h_n(\varphi, \varepsilon)| \leq M|\beta_n| + O(\varepsilon^{n+1})$ (посредством M всюду обозначаются постоянные, не зависящие от ε). Из этой оценки и (13) следует, что

$$h_n(\varphi, \varepsilon) = \beta_n(\varepsilon) + O(\varepsilon|\beta_n(\varepsilon)| + \varepsilon^{n+1}). \quad (14)$$

Запишем соотношение (13) при $\varphi = 2\pi$:

$$0 = \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(\tilde{z}, \xi, \varepsilon)}{\partial r} h_n(\xi, \varepsilon) d\xi + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (14a)$$

Здесь $\tilde{z} = \tilde{z}(\xi, \varepsilon)$ лежит между $z_n(\xi, \varepsilon)$ и $z(\xi, \varepsilon)$. Подставляя в (14a) выражение (14), получаем из условия (10), что $\beta_n(\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$ и, следовательно, $h_n(\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$.

Далее рассмотрим начальную задачу (6), (7) и будем искать ее решение методом двух масштабов.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия (9), (10) и значение $\sqrt{a^2 + b^2}$ близко к a_0 , то решение $\rho(\varphi, \varepsilon)$ начальной задачи (6), (7) разлагается в равномерно асимптотический на полупрямой $[0, \infty)$ ряд

$$\rho(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\varphi, \varepsilon), \quad (15)$$

где $\rho_k(\varphi, \theta) \in C^\infty - 2\pi$ -периодические по φ функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, сначала будем считать медленную переменную $\theta = \varepsilon\varphi$ независимой переменной. Запишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \varepsilon G(\rho, \varphi, \varepsilon). \quad (16)$$

Подставляя в него ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\varphi, \theta)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} = G_0(\rho_0, \varphi), \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial G_0(\rho_0, \varphi)}{\partial \rho} \rho_1 + G_1(\rho_0, \varphi), \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_2}{\partial \theta} &= \frac{\partial G_0(\rho_0, \varphi)}{\partial \rho} \rho_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_1(\rho_0, \varphi)}{\partial \rho^2} \rho_1^2 + \\ &\quad + \frac{\partial G_1(\rho_0, \varphi)}{\partial \rho} \rho_1 + G_3(\rho_0, \varphi), \\ &\dots \end{aligned} \quad (17)$$

очень похожую на систему (12). Таким образом, ρ_0 зависит лишь от θ . Из второго уравнения системы (17) и периодичности ρ_1 по φ вытекает, что

$$2\pi \frac{d\rho_0}{d\theta} = \int_0^{2\pi} G_0(\rho_0, \varphi) d\varphi.$$

Следовательно, $\rho_0(\theta) = a_0 + O(\exp(-\gamma\theta))$. Продолжая далее этот процесс, можно построить все $\rho_k(\varphi, \theta)$ с указанными выше свойствами. При этом нетрудно проверить, что $\rho_k(\varphi, \theta) = r_k(\varphi) + O(\exp(-\gamma\theta))$, где $r_k(\varphi)$ – построенные в теореме 1 коэффициенты ряда (11) для периодического решения.

Осталось показать, что построенный ряд (15) является равномерно асимптотическим для решения задачи (6), (7) при $0 \leq \varphi < \infty$. Обозначим частичную сумму построенного ряда (15) следующим образом:

$$s_n(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \rho_k(\varphi, \varepsilon\varphi).$$

Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{ds_n}{d\varphi} = \varepsilon G(s_n, \varphi, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно на всей полупрямой. Следовательно, для разности $w_n(\varphi, \varepsilon) = s_n(\varphi, \varepsilon) - \rho(\varphi, \varepsilon)$, где $\rho(\varphi, \varepsilon)$ – решение задачи (6), (7), справедливы соотношения

$$\frac{dw_n}{d\varphi} = \varepsilon [G(s_n, \varphi, \varepsilon) - G(\rho, \varphi, \varepsilon)] + O(\varepsilon^{n+1}), \quad w_n(0, \varepsilon) = 0. \quad (18)$$

Введем обозначение $c_{n,k} = w_n(2\pi k, \varepsilon)$. Тогда для $2\pi k \leq \varphi \leq 2\pi(k+1)$ имеем

$$|w_n(\varphi, \varepsilon)| \leq |c_{n,k}| + M\varepsilon \int_{2\pi k}^{\varphi} |w_n(\xi, \varepsilon)| d\xi + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Следовательно, $|w_n(\varphi, \varepsilon)| \leq M|c_{n,k}| + O(\varepsilon^{n+1})$, и для этих же аргументов $w_n(\varphi, \varepsilon) = c_{n,k} + O(\varepsilon|c_{n,k}| + \varepsilon^{n+1})$.

Из (18) вытекает равенство

$$\begin{aligned} c_{n,k+1} - c_{n,k} &= \varepsilon \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{dG}{d\rho}(\tilde{\rho}, \varphi, \varepsilon)(c_{n,k} + O(\varepsilon|c_{n,k}| + \varepsilon^{n+1})) d\xi = \\ &= \varepsilon c_{n,k} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{dG}{d\rho}(\tilde{\rho}, \varphi, \varepsilon) d\xi + O(\varepsilon^2|c_{n,k}| + \varepsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

здесь $\tilde{\rho} \in [2\pi k, 2\pi(k+1)]$.

Если s_n и ρ находятся в малой окрестности линии $\rho = a_0$, то

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{dG}{d\rho}(\tilde{\rho}, \varphi, \varepsilon) d\xi < -\gamma.$$

Следовательно, $|c_{n,k+1}| \leq |c_{n,k}|(1 - \varepsilon\gamma) + O(\varepsilon^{n+1})$. Отсюда вытекает, что $c_{n,k} = O(\varepsilon^n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все утверждения теорем 1 и 2 сохраняются и для систем вида (6), где G – вектор-функция, с очевидным видоизмененным условием (10).

Равномерная асимптотика решения задачи (6), (7) не влечет за собой равномерную асимптотику решения задачи (1), т. к. φ и t связаны уравнением (5). Однако для любого натурального N из ряда (15) и уравнения (5) можно извлечь равномерную асимптотику на отрезке времени $[0, \varepsilon^{-N}]$. Для этого достаточно подставить частичную сумму ряда (15) в правую часть уравнения (5). В результате интегрирования получится выражение для t в виде суммы интегралов вида

$$\int_0^{\varphi} S(\xi, \varepsilon\xi) d\xi,$$

где $S(\xi, \theta)$ периодичны по ξ , а по $\theta = \varepsilon\xi$ экспоненциально быстро стремятся к функциям, периодическим по ξ . Описывая асимптотику подобных интегралов при $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерную на отрезке $[0, \varepsilon^{-N}]$, можно получить асимптотику решения задачи (1).

Благодарности. Исследование было поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 96-01-00501, 96-15-96241.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
- [2] *Е. А. Гребеников.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
- [3] *Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. Киев: Наукова думка, 1983.
- [4] *М. М. Хапаев.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая школа, 1988.
- [5] *В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков.* Метод возмущений в теории распространения волн. В сб.: Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах. Ред. Е.И. Нефедов, О.Е. Шушканов. М.: Изд-во ИРЭ АН СССР, 1979. С. 28.
- [6] *А. Найфэ.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
- [7] *Р. П. Кузьмина.* УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 231.
- [8] *В. В. Ларичева.* Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 4. С. 775.
- [9] *В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт.* Математические аспекты классической и небесной механики. В сб.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5.
- [10] *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИИЛ, 1958.