Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Возмущение сингулярного решения уравнения Лиувилля, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 390–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:35:03

ВОЗМУЩЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Построено асимптотическое по малому параметру решение задачи Коши для возмущенного уравнения Лиувилля в случае, если невозмущенное решение имеет сингулярности на времениподобных линиях. Предлагается модификация метода Крылова–Боголюбова, которая, в частности, обеспечивает нахождение асимптотических поправок для линий сингулярности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В моделях нелинейной теории поля [1, 2] хорошо известно уравнение Лиувилля $\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + 2 \exp \phi = 0$. Данное волновое уравнение имеет общее решение

$$\phi(x, t) = \ln 4 \frac{r'_+(s^+) r'_-(s^-)}{r^2(s^+, s^-)}, \quad r = r_+(s^+) + r_-(s^-), \quad s^\pm = x \pm t. \quad (1.1)$$

Штрихи всюду означают дифференцирование по пространственной x либо по конусной переменной $s^\pm$. Эта формула, полученная еще Лиувиллем [3], содержит две произвольные функции $r_\pm$, которые обеспечивают решение задачи Коши.

В данной статье изучается задача Коши для уравнения с малым возмущением

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 2 \exp u = \varepsilon F[u], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.2)$$

Предполагается, что начальные функции могут содержать малый параметр ε , при этом они разлагаются в асимптотические ряды

$$u|_{t=0} = \psi_0(x; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_0^n(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi_1(x; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_1^n(x). \quad (1.3)$$

Оператор возмущения задается гладкой функцией трех переменных $F[u] = F(u, u_x, u_t)$. Ставится задача об асимптотическом приближении решения $u(x, t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

*Институт математики, Уфа, Россия. E-mail: klen@imat.rb.ru

Простейшая конструкция в виде стандартного ряда теории возмущений

$$u \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^n(x, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

при подходящих ограничениях дает асимптотику решения, равномерную в любом замкнутом характеристическом треугольнике, в котором коэффициенты $u^n(x, t)$ не имеют особенностей. В качестве главного члена берется решение нелинейного уравнения $u^0 = \phi(x, t)$, остальные коэффициенты определяются из линеаризованных уравнений. На этом пути затруднений не встречается.

Мы рассматриваем принципиально иную ситуацию, когда исходное решение уравнения Лиувилля $\phi(x, t)$ имеет сингулярности на времениподобных линиях Γ , которые определяются нулем функции $r \equiv r_+(s^+) + r_-(s^-) = 0$ при $r'_\pm > 0$ [1, 2]. В этом случае постановка задачи должна быть уточнена. Известно, что в невозмущенной задаче требуются дополнительные условия для единственности решения [4]. Такими условиями могут служить требования непрерывности (нулевого скачка) при переходе через линии Γ двух выражений:

$$\left[\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + 2 \exp u - 2u_{xx} \right]_\Gamma = 0, \quad [-u_t u_x + 2u_{tx}]_\Gamma = 0. \quad (1.5)$$

Эти выражения представляют собой компоненты модифицированного тензора энергии-импульса для уравнения Лиувилля [2, 4]. Рассматривая возмущенную задачу, мы ограничимся случаем, когда уравнения сшивки (1.5) не подвергаются возмущению. Для задачи (1.2), (1.3) и (1.5) строится формальное асимптотическое решение (ФАР) при $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерное по x, t на любом компакте в $\mathbb{R}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под ФАР понимается решение, для которого при любом $N > 0$ можно найти функцию $U_N(x, t; \varepsilon)$, удовлетворяющую уравнениям (1.2), (1.3) с точностью $O(\varepsilon^N)$ всюду вне узких полос шириной $O(\varepsilon^N)$. Внутри полос существуют линии $\Gamma_N(\varepsilon)$, при переходе через которые с той же точностью $O(\varepsilon^N)$ выполняются условия сшивки (1.5).

При построении ФАР предполагается, что линии сингулярности Γ деформируются при возмущении и могут быть приближенно локализованы в узких полосах шириной $O(\varepsilon^N)$. Теорема существования и единственности точного сингулярного решения для возмущенной задачи здесь не доказывается. Однако можно ожидать, что если возмущение $\mathbf{F}[u]$ не содержит старших производных, то сингулярности при возмущении не исчезают. Поэтому мы рассматриваем возмущение, которое представляется функцией от производных не выше первого порядка. Кроме того, мы ограничиваемся случаем, когда существует лишь одна линия сингулярности. В общей ситуации построения не меняются, но усложняется исследование коэффициентов асимптотики из-за сетки особенностей функций $r_\pm$.

2. ФОРМАЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Непригодность стандартного ряда (1.4) теории возмущений обнаруживается вблизи линий сингулярности и связана с их деформацией при возмущении. Этот эффект можно увидеть на простейшем примере, когда возмущение содержится лишь в начальных данных и имеется точное решение (1.1) с парой функций $r_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon)$, гладко зависящих от ε . Эти функции разлагаются в ряды Тейлора при $\varepsilon \rightarrow 0$ с главными членами $r_{\pm}^0(s^{\pm}) = r_{\pm}(s^{\pm}, 0)$. Соответствующее разложение решения в ряд по степеням ε приводит к коэффициентам, которые на линиях $r \equiv r_+(s^+) + r_-(s^-) = 0$ имеют особенности растущего порядка $u(x, t) = O((r^0)^{-n})$. Поэтому ряд оказывается не асимптотическим вблизи этих линий на расстоянии порядка $O(\varepsilon)$ и не аппроксимирует там точное решение. Неравномерность асимптотики обязана тейлоровскому разложению функции $\ln r(s^+, s^-; \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если ограничиться разложением Тейлора только функций $r_{\pm} = R_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon; N) + O(\varepsilon^{2N+1})$, удерживая логарифм в явном виде, то для решения можно написать асимптотическую формулу

$$u(x, t; \varepsilon) = \ln 4 \frac{R'_+ R'_-}{R^2} + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (R = R_+ + R_-).$$

Оценка остатка будет равномерной на любом компакте вне узкой полосы шириной $O(\varepsilon^N)$, которая определяется неравенством $R(s^+, s^-; \varepsilon) \leq O(\varepsilon^N)$. Точная линия сингулярности $r(s^+, s^-; \varepsilon) = 0$ находится внутри этой полосы на расстоянии $O(\varepsilon^{2N+1})$ от приближенной линии $R(s^+, s^-; \varepsilon) = 0$.

В решении можно выделить регулярную часть, которая допускает разложение Тейлора при $\varepsilon \rightarrow 0$, пригодное всюду. Это можно сделать разными способами, например выделить $\ln(R'_+ R'_-)$. На этом пути получаются разные формулы, аппроксимирующие решение с одной и той же точностью. Неединственность асимптотики связана с зависимостью коэффициентов от параметра ε .

Предлагаемый нами подход напоминает известный метод Крылова–Боголюбова. Асимптотическое решение строится в виде ряда

$$u(x, t; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^n(x, t; \varepsilon). \quad (2.1)$$

В качестве главного члена берется решение невозмущенного уравнения

$$u^0 = \ln 4 \frac{r'_+(s^+; \varepsilon) r'_-(s^-; \varepsilon)}{r^2(s^+, s^-; \varepsilon)} \quad (r = r_+ + r_-, \quad s^{\pm} = x \pm t), \quad (2.2)$$

которое параметризуется парой функций $r_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon)$, зависящих от ε . Для них строится свой асимптотический ряд

$$r_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n r_{\pm}^n(s^{\pm}). \quad (2.3)$$

Таким способом в возмущенном решении выделяется часть, ответственная за деформацию линий сингулярности.

Построение ФАР сводится к нахождению коэффициентов $\overset{n}{u}, \overset{n}{r}_{\pm}$. В главном члене функции $\overset{0}{r}_{\pm}(s^{\pm})$ берутся из решения невозмущенной задачи. Они определяются через начальные данные $\overset{0}{\psi}_0, \overset{0}{\psi}_1(x)$ и считаются трижды дифференцируемыми всюду: $\overset{0}{r}_{\pm} \in C^3(\mathbb{R})$. Такая гладкость обеспечивается при соответствующей гладкости начальных функций, если линия сингулярности $\overset{0}{r}_+(s_+) + \overset{0}{r}_-(s_-) = 0$ единственна [4].

Для поправок $\overset{n}{u}$, $n \geq 1$, выписывается рекуррентная система линейаризованных уравнений

$$\partial_t^2 \overset{n}{u} - \partial_x^2 \overset{n}{u} + 8 \frac{r'_+ r'_-}{r^2} \overset{n}{u} = \overset{n}{f}(x, t; \varepsilon), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Правые части определяются через предыдущие приближения, например

$$\overset{1}{f} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \overset{0}{u} \end{bmatrix}, \quad \overset{2}{f} = \delta \mathbf{F} \begin{bmatrix} \overset{0}{u} \end{bmatrix} \overset{1}{u} - 4 \frac{r'_+ r'_-}{r^2} \left(\overset{1}{u} \right)^2.$$

Эффективность всего построения основывается на формуле для общего решения однородного линейаризованного уравнения

$$u_0(x, t; \varepsilon) = \frac{j'_+}{r'_+} + \frac{j'_-}{r'_-} - 2 \frac{j_+ + j_-}{r}, \quad (2.5)$$

которая содержит пару произвольных функций $j_{\pm} = \overset{n}{j}_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon)$, различных на разных шагах. В этой формуле обратим внимание на сингулярность порядка $O(1/r)$.

Наличие общего решения обеспечивает, в частности, эффективный способ интегрирования неоднородного уравнения, частное решение которого можно искать в похожей форме

$$u_1(x, t; \varepsilon) = \frac{j'_+(s^+, t; \varepsilon)}{r'_+(s^+; \varepsilon)} + \frac{j'_-(s^-, t; \varepsilon)}{r'_-(s^-; \varepsilon)} - 2 \frac{j_+(s^+, t; \varepsilon) + j_-(s^-, t; \varepsilon)}{r(s^+, s^-; \varepsilon)} \quad (2.6)$$

с парой функций $j_{\pm}$, зависящих от двух переменных $s^{\pm}, t$. На этом пути удастся разделить переменные x, t так, что производные $\partial_t j_{\pm}(s^{\pm}, t; \varepsilon) = J_{\pm}(x, t; \varepsilon)$ при $s^{\pm} = x \pm t$ выписываются через интегралы от правой части как решения обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.13) (см. ниже):

$$J_{\pm} = \pm \frac{1}{4} \int r r'_{\pm} \left(\int \frac{f}{r} dx \right) dx + \frac{1}{4} \int r'_{\pm} \left(\int (r_+ - r_-)' \left(\int \frac{f}{r} dx \right) dx \right) dx.$$

Затем полученные выражения следует проинтегрировать вдоль характеристик $s^{\pm} = \text{const}$, что дает пару функций для (2.6):

$$j_{\pm}(s^{\pm}, t; \varepsilon) = \int_0^t J_{\pm}(s^{\pm} \mp \eta, \eta; \varepsilon) d\eta.$$

Отметим, что константы интегрирования не проявляются в формуле (2.6), а полученное решение удовлетворяет однородным начальным условиям. Таким образом, частные

решения дифференциальных уравнений можно выразить через $r_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon)$ и $j_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon)$ посредством вполне определенных операторов $u_1^n = \mathbf{U} \begin{bmatrix} r_{\pm}, j_{\pm}, \dots, j_{\pm}^{n-1} \end{bmatrix}$. Выделим в таком представлении регулярную и сингулярную части в соответствии с (2.6):

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} r_{\pm}, j_{\pm}, \dots, j_{\pm}^{n-1} \end{bmatrix} - \frac{2}{r} \mathbf{W} \begin{bmatrix} r_{\pm}, j_{\pm}, \dots, j_{\pm}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что на каждом шаге n такие формулы эффективны настолько, насколько известны пары функций $r_{\pm}$ из главного члена и всевозможные функции $j_{\pm}^m$, $1 \leq m < n$, от предыдущих поправок. Все эти функции, зависящие от одной переменной, $r_{\pm}$, $j_{\pm}(x; \varepsilon)$ определяются из начальных условий, которые оказываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром:

$$\ln 4 \frac{r'_+ r'_-}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[\frac{j'_+}{r'_+} + \frac{j'_-}{r'_-} - \frac{2}{r} (j_+ + j_-) + u_1^n \right] = \psi_0(x; \varepsilon), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{r''_+}{r'_+} - \frac{r''_-}{r'_-} - 2 \frac{r'_+ - r'_-}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[\left(\frac{j'_+}{r'_+} \right)' - \left(\frac{j'_-}{r'_-} \right)' - \frac{2}{r} (j'_+ - j'_-) + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} (j_+ + j_-) (r'_+ - r'_-) + \partial_t u_1^n \right] = \psi_1(x; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Наивный подход к асимптотическому интегрированию этих уравнений состоит в следующем. Если отождествить пару функций $r_{\pm}$ с главным членом асимптотики $r_{\pm} = r_{\pm}^0(s^{\pm})$, который удовлетворяет нелинейным уравнениям при $\varepsilon = 0$, то все функции $j_{\pm}^n(s^{\pm})$ определяются из рекуррентной системы линейных уравнений. В итоге ФАР получается в виде ряда (1.4) теории возмущений с нарастающими сингулярностями в коэффициентах асимптотики. Константы интегрирования не проявляются в этих коэффициентах.

В нашем подходе предлагается построить для функций $r_{\pm}$ асимптотический ряд (2.3). Возникающий при этом дополнительный произвол в виде коэффициентов $r_{\pm}^n(s^{\pm})$, $n \geq 1$, используется для устранения сингулярностей в поправках u . Требование отсутствия сингулярностей в общем решении линеаризованного уравнения, которое комбинируется из (2.5) и (2.6), приводит к серии алгебраических уравнений

$$j_+^n(s^+; \varepsilon) + j_-^n(s^-; \varepsilon) + \mathbf{W} \begin{bmatrix} r_{\pm}, j_{\pm}, \dots, j_{\pm}^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad r(s^+, s^-; \varepsilon) = 0. \quad (2.9)$$

Чтобы избежать особенностей при разложении функции $r(x, x; \varepsilon)$ в начальных уравнениях (2.7) и (2.8), наложим требование¹⁾

$$r_+^n(x) + r_-^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 1). \quad (2.10)$$

¹⁾ При этом гарантируется неподвижность начальной точки сингулярностей.

Таким образом удастся замкнуть систему уравнений для функций $\overset{n}{r}_{\pm}$, $\overset{n}{j}_{\pm}$.

Заметим, что уравнения (2.9) содержат функции $r_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon)$, зависящие от ε , а потому и функции $\overset{n}{j}_{\pm}$ должны зависеть от ε . Для них строятся свои асимптотические ряды

$$\overset{n}{j}_{\pm}(x; \varepsilon) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \overset{n,m}{j}_{\pm}(x). \quad (2.11)$$

Для коэффициентов получается система алгебраических уравнений

$$\overset{n,m}{j}_{+}(s^{+}) + \overset{n,m}{j}_{-}(s^{-}) = \overset{n,m}{W} \quad (n \geq 1, \quad m < n) \quad \text{при} \quad \overset{0}{r}(s^{+}, s^{-}) = 0 \quad (2.12)$$

с правыми частями, определяемыми через предыдущие приближения $\overset{p}{r}_{\pm}$, $\overset{p,q}{j}_{\pm}$ ($p + q < n + m$).

Формальная процедура асимптотического интегрирования уравнений (2.7)–(2.10) приводит к рекуррентной системе задач. Поправки $\overset{n,m}{j}_{\pm}$ при $m \geq 1$ определяются из уравнений (2.12)²⁾, а основными являются уравнения для функций $\overset{n}{r}_{\pm}$, $\overset{n,0}{j}_{\pm}(x)$, $n \geq 1$. При этом дифференциальные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\overset{n}{y}'_{+}}{\overset{0}{r}'_{+}(x)} + \frac{\overset{n}{y}'_{-}}{\overset{0}{r}'_{-}(x)} - 2 \frac{\overset{n}{y}_{+} + \overset{n}{y}_{-}}{r(x, x)} &= \overset{n}{\Psi}_0, \\ \left(\frac{\overset{n}{y}'_{+}}{\overset{0}{r}'_{+}(x)} - \frac{\overset{n}{y}'_{-}}{\overset{0}{r}'_{-}(x)} \right)' - 2 \frac{\overset{n}{y}'_{+} - \overset{n}{y}'_{-}}{r(x, x)} + \\ + 2 \frac{(\overset{n}{y}_{+} + \overset{n}{y}_{-})(\overset{0}{r}'_{+}(x) - \overset{0}{r}'_{-}(x))}{r^2(x, x)} &= \overset{n}{\Psi}_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

для комбинаций

$$\overset{n}{r}_{\pm}(x) + \overset{n,0}{j}_{\pm}(x) = \overset{n}{y}_{\pm}(x). \quad (2.14)$$

Правые части $\overset{n}{\Psi}_0$, $\overset{n}{\Psi}_1(x)$ определяются через предыдущие приближения. Если учесть, что $r(x, x) = \overset{0}{r}_{+}(x) + \overset{0}{r}_{-}(x)$, то решение дифференциальных уравнений выписывается в явной форме через интегралы

$$\begin{aligned} y_{\pm} &= \frac{1}{2} \int (\Psi_0 \pm g) \overset{0}{r}'_{\pm} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \overset{0}{r}'_{\pm} \left(\int \left(\frac{\Psi_0 r'}{r} + \left(\overset{0}{r}_{+} - \overset{0}{r}_{-} \right)' \frac{g}{r} \right) dx \right) dx, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$g(x) = r(x, x) \int \left(\frac{\Psi_1(x)}{r(x, x)} + \Psi_0(x) \frac{\left(\overset{0}{r}_{+}(x) - \overset{0}{r}_{-}(x) \right)'}{r^2(x, x)} \right) dx.$$

²⁾ Неоднозначность этих функций соответствует неединственности асимптотических формул с коэффициентами, зависящими от ε .

После этого задача сводится к алгебраическим уравнениям (2.10), (2.12) и (2.14). Уравнение (2.12) связывает значения функций по разные стороны от точки сингулярности $s^+ > \gamma$, $s^- < \gamma$, а потому решение системы содержит произвол либо в виде функций $j_+^n(s^+)$ при $s^+ > \gamma$, либо в виде функций $j_-^n(s^-)$ при $s^- < \gamma$. Этот произвол, а также константы интегрирования в (2.15) не проявляются в соответствующих порядках ФАР.

3. ОБОСНОВАНИЕ ФОРМАЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

Обоснование ФАР состоит в доказательстве гладкости получаемых решений. Приведенная конструкция за конечное число шагов N обеспечивает получение явных формул для функций

$$\begin{aligned} R_{\pm}(s_{\pm}; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^N \varepsilon^n r_{\pm}^n(s_{\pm}), \quad j_{\pm}(s^{\pm}; \varepsilon) = \sum_{m=0}^{N-n} \varepsilon^n j_{\pm}^{n,m}(s^{\pm}), \quad s^{\pm} = x \pm t, \\ U(x, t; \varepsilon) &= \ln 4 \frac{R'_+ R'_-}{R^2}, \quad R = R_+ + R_-, \\ U(x, t; \varepsilon) &= \frac{j'_+}{R'_+} + \frac{j'_-}{R'_-} - 2 \frac{j_+ + j_-}{R^2} + \mathbf{U} \left[R_{\pm}, j_{\pm}^1, \dots, j_{\pm}^{n-1} \right], \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Все эти функции зависят еще и от N . На их основе составляется приближенное решение в виде отрезка ряда

$$U(x, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U^n(x, t; \varepsilon). \quad (3.1)$$

Главный член U^0 является точным решением уравнения Лиувилля и имеет сингулярность на линии $R(s^+, s^-; \varepsilon) = 0$. Поправки U^n удовлетворяют уравнениям (2.4), линеаризованным на U^0 , с невязками $O(\varepsilon^{N+1-n})$. Поэтому отрезок (3.1) удовлетворяет возмущенным уравнениям (1.2) и (1.3) с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$ вне линии сингулярности. Чтобы данная конструкция соответствовала определению ФАР, требуются оценки невязок, равномерные по x, t вне узкой полосы. Такие оценки возможны при гладких поправках. Чтобы это обеспечить, оператор возмущения должен иметь на сингулярном решении определенную асимптотическую структуру при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[u] &= \frac{A_2(r_{\pm})}{r^2} + \frac{A_1(r_{\pm})}{r} + \\ &+ \sum_{p=0}^q B_p(r_{\pm}) \ln^p |r| + o(1) \quad \text{при} \quad u = \ln 4 \frac{r'_+ r'_-}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Асимптотика считается дифференцируемой. Этого условия достаточно для построения гладкой первой поправки. Для построения старших поправок подобное условие требуется от производных соответствующих порядков функции трех переменных $F(u, u_x, u_t)$.

Условия на начальные данные состоят в требовании гладкости функций $\psi_0 \in C^2$, $\psi_1 \in C^1$ всюду вне начальной точки сингулярности γ и в требовании согласования в

этой точке. Согласование в главных членах $\overset{0}{\psi}_0(x)$, $\overset{0}{\psi}_1(x)$, указанное в работе [4], обеспечивает гладкость главного члена ФАР $\overset{0}{U} \in C^2$ вне линии сингулярности. Для гладкости поправок $\overset{n}{U}$ требуется согласование соответствующих коэффициентов асимптотики начальных функций $\overset{n}{\psi}_0(x)$, $\overset{n}{\psi}_1(x)$ и коэффициентов асимптотики для оператора возмущения (3.2) в точке γ .

Все эти условия необходимы для исключения особенности вдоль характеристик $s^\pm = x \pm t = \gamma$, выходящих из точек сингулярности. Так, при условиях A_2 , A_1 , $B_p \equiv 0$ для первой поправки на этих линиях гарантируется непрерывность производных до второго порядка. Условия сшивки на линии $\Gamma_N = \{(x, t): R(s^+, s^-; \varepsilon) = 0\}$ выполняются в силу гладкости поправок $\overset{n}{u} \in C^2(\mathbb{R}^2)$. В общей ситуации при условии (3.2) получаемые функции могут иметь во вторых производных слабые (логарифмические) особенности на линии Γ_N и на характеристиках $s^\pm = \gamma$. Условия сшивки при этом следует несколько изменить, требуя нулевого предела для разности выражений из (1.5) на близких линиях $\Gamma_\delta^\pm = \{x, t: r(s^+, s^-; \varepsilon) = \pm\delta\}$ при $\delta \rightarrow 0$.

4. ПРИМЕР

Простейший пример дает уравнение с линейным возмущением $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 2 \exp u = \varepsilon \lambda u$, $\lambda = \text{const}$, и с начальными условиями $u|_{t=0} = -\ln x^2$, $\partial_t u|_{t=0} = 0$. Линия сингулярности $\Gamma = \{x = 0, \forall t\}$ не деформируется при таком возмущении. Асимптотическое решение с учетом первой поправки $u(x, t; \varepsilon) \approx -\ln x^2 + \varepsilon \lambda v(x, t)$ содержит функцию со слабой особенностью

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{4} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{16} (x+t)^2 \left(3 \ln^2 |x+t| - \ln |x+t| + \frac{1}{2} \right) - \\ & - \frac{1}{16} (x-t)^2 \left(3 \ln^2 |x-t| - \ln |x-t| + \frac{1}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{16x} (x+t)^3 \left(\ln^2 |x+t| - \ln |x+t| + \frac{1}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{16x} (x-t)^3 \left(\ln^2 |x-t| - \ln |x-t| + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-01-00459, 96-15-96241).

Список литературы

- [1] А. К. Погребков, М. К. Поливанов. Тр. МИАН. 1987. Т. 176. С. 86–96.
- [2] Г. П. Джорджадзе, А. К. Погребков, М. К. Поливанов. ТМФ. 1979. Т. 40. № 2. С. 221–234.
- [3] J. Liouville. J. Math. Pure Appl. 1853. V. 18. P. 71–74.
- [4] А. К. Погребков. ДАН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 873–876.