Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Кашаев, О матричных обобщениях дилогарифма, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 398–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:44:05

© 1999 г.

Р. М. Кашаев*

О МАТРИЧНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ДИЛОГАРИФМА

На основе обобщенного коумножения, зависящего от непрерывного параметра, построены решения матричного уравнения, обобщающего пятичленное тождество Роджерса на дилогарифм.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дилогарифм Роджерса [1] как вещественнозначная функция на единичном интервале определяется следующим образом:

$$L(x) = \frac{1}{2} \log(x) \log(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad 0 < x < 1.$$

Он удовлетворяет пятичленному функциональному тождеству Роджерса

$$L(x) + L(y) = L\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right) + L(xy) + L\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right), \quad (1)$$

которое лежит в основе многочисленных применений этой функции в математике и математической физике [2].

Следующее операторное (или матричное) уравнение обобщает тождество Роджерса:

$$S_{23}(x)S_{12}(y) = S_{12}\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right)S_{13}(xy)S_{23}\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right), \quad (2)$$

где $S(x) \in A \otimes A$ для некоторой ассоциативной алгебры A (здесь и далее нижними индексами изображается способ вложения элементов алгебры в ее тензорную степень). Действительно, уравнение (1) можно записать в виде (2), если положить

$$S(x) = \lambda^{L(x)} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова, Санкт-Петербург, Россия

Назовем уравнение (2) *операторным уравнением Роджерса* (ОУР). Оно является частным случаем *пентагонального уравнения* (ПУ) со спектральными параметрами [3]. Известный пример решения этого уравнения – циклический квантовый дилогарифм [4, 5], тесно связанный с теорией циклических представлений борелевской подалгебры квантовой группы $U_q(sl(2))$ [6]. С помощью этого дилогарифма была построена комбинаторная топологическая квантовая теория поля в трех измерениях – квантовый вариант евклидовой $(2+1)$ -гравитации с отрицательным космологическим членом, а также были найдены соответствующие инварианты узлов и зацеплений в трехмерных многообразиях, обобщающие гиперболический объем [6, 7]. Циклический квантовый дилогарифм также оказался связанным с трехмерной интегрируемой решеточной моделью Замолдчикова–Бажанова–Бакстера [8, 9]. При этом уравнение (2) по существу оказалось эквивалентным так называемому ограниченному уравнению “звезда-треугольник”, которое обеспечивает локальную интегрируемость модели [10]. Наконец, решения ПУ, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям [3, 11], позволяют строить решения уравнения тетраэдров – наиболее общего локального условия интегрируемости в трех измерениях [8]. В этом свете представляется правдоподобным то, что новые решения уравнения (2), если таковые существуют, могут привести к построению новых интегрируемых решеточных моделей в трех измерениях.

В данной работе вводится понятие обобщенного коумножения в алгебре и показывается его связь с решениями ОУР. В частности, приводятся новые примеры решений. Попутно показывается, как строить решения специального вида для постоянного ПУ из решений ОУР.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ПУ

Здесь мы напоминаем один результат работы [11].

Пусть $I =]0, 1[$ есть открытый единичный интервал, снабженный отображением $I \times I \ni (x, y) \mapsto x * y \equiv (y - xy)/(1 - xy) \in I$, которое удовлетворяет уравнениям

$$(x * y)((xy) * z) = x * (yz), \quad (x * y) * ((xy) * z) = y * z. \quad (3)$$

Легко проверить, что при этом обратимый оператор

$$Sf(x, y) := f(xy, x * y), \quad f \in \mathbb{C}^{I \times I}, \quad (4)$$

в пространстве комплекснозначных функций на $I \times I$ удовлетворяет постоянному ПУ

$$S_{23}S_{12} = S_{12}S_{13}S_{23}, \quad (5)$$

где каждый оператор S_{ij} действует на функции трех аргументов, причем индексы указывают на номера тех аргументов, которые преобразуются согласно уравнению (4). Такое решение мы называем функциональным. Заметим, что постоянное ПУ взаимосвязано с бивалгебрами, в частности с алгебрами Хопфа, а также с их дублями Гейзенберга (cross products) [12, 13] (см. также [14]).

3. ОБОБЩЕННОЕ КОУМНОЖЕНИЕ

Напомним, что алгебра A снабжена коассоциативным коумножением, если имеется гомоморфизм алгебр $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, удовлетворяющий уравнению коассоциативности

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Коумножение позволяет снабдить дуальное пространство A^* ассоциативным умножением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что алгебра A снабжена *обобщенным коумножением*, если имеется семейство гомоморфизмов алгебр $\Delta_x: A \rightarrow A \otimes A$, параметризованное открытым единичным интервалом I и удовлетворяющее обобщенным уравнениям коассоциативности

$$(\Delta_x \otimes \text{id}) \circ \Delta_y = (\text{id} \otimes \Delta_{x*y}) \circ \Delta_{xy}.$$

При этом подразумевается, что $\Delta_x(1) = 1 \otimes 1$.

Аналогично обычному коумножению обобщенное коумножение снабжает дуальное пространство A^* семейством умножений

$$A^* \otimes A^* \ni f \otimes g \mapsto f_x g \in A^*,$$

удовлетворяющих обобщенным уравнениям ассоциативности

$$(f_x g)_y h = f_{xy} (g_{x*y} h).$$

ПРИМЕР 1. Обширный класс примеров обобщенных коумножений получается с помощью следующей конструкции. Пусть A есть алгебра с коассоциативным коумножением (т.е. существование ни коединицы, ни антипода, вообще говоря, не предполагается) и $D: A \rightarrow A$ – такое дифференцирование, что

$$\Delta \circ D = (D \otimes \text{id} + \text{id} \otimes D) \circ \Delta.$$

Тогда композиция

$$\Delta_x \equiv (x^D \otimes (1-x)^D) \circ \Delta, \quad 0 < x < 1,$$

является обобщенным коумножением.

4. РЕШЕНИЯ ОУР

Пусть простая алгебра A снабжена обобщенным коумножением и существует такой элемент $T^x \in A \otimes A$, что

$$\Delta_x(a) = T^x a \otimes 1 (T^x)^{-1} \equiv \text{Ad}(T^x)(a \otimes 1).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\Delta_x \otimes \text{id}) \circ \Delta_y(a) &= \text{Ad}(T_{12}^x T_{13}^y)(a \otimes 1 \otimes 1), \\ (\text{id} \otimes \Delta_{x*y}) \circ \Delta_{xy}(a) &= \text{Ad}(T_{23}^{x*y} T_{12}^{xy})(a \otimes 1 \otimes 1). \end{aligned}$$

Учитывая, что у алгебры A имеется тривиальный центр, мы приходим к выводу, что должно выполняться уравнение

$$T_{12}^x T_{13}^y S_{23}^{x,y} = T_{23}^{x*y} T_{12}^{xy} \quad (6)$$

для некоторого $S^{x,y} \in A \otimes A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Элемент $S^{x,y}$ удовлетворяет следующему ПУ:

$$S_{12}^{x,y} S_{13}^{xy,z} S_{23}^{x*y,(xy)*z} = S_{23}^{y,z} S_{12}^{x,yz}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (7) является следствием цепочки следующих равенств (на каждом шаге фрагмент, который преобразуется согласно уравнению (6), подчеркнут; на четвертом шаге используются уравнения (3)):

$$\begin{aligned} \underline{T_{01}^x T_{02}^y T_{03}^z S_{12}^{x,y} S_{13}^{xy,z} S_{23}^{x*y,(xy)*z}} &= T_{12}^{x*y} \underline{T_{01}^{xy} T_{03}^z S_{13}^{xy,z} S_{23}^{x*y,(xy)*z}} = \\ &= \underline{T_{12}^{x*y} T_{13}^{(xy)*z}} T_{01}^{xyz} S_{23}^{x*y,(xy)*z} = \\ &= T_{23}^{(x*y)*((xy)*z)} T_{12}^{(x*y)((xy)*z)} T_{01}^{xyz} = \\ &= T_{23}^{y*z} \underline{T_{12}^{x*(yz)} T_{01}^{xyz}} = \underline{T_{23}^{y*z} T_{01}^{yz}} \underline{T_{02}^x} S_{12}^{x,yz} = \\ &= T_{01}^x T_{02}^y T_{03}^z S_{23}^{y,z} S_{12}^{x,yz}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что уравнение (7) можно переписать в виде постоянного ПУ. Действительно, рассмотрим некоторый точный A -модуль M и определим оператор $\mathbf{S}$ в $(M \otimes M)^{I \times I}$ формулой

$$\mathbf{S}f(x, y) = S^{x,y} f(xy, x * y), \quad f \in (M \otimes M)^{I \times I}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Уравнение (7) эквивалентно постоянному ПУ для оператора $\mathbf{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{13} \mathbf{S}_{23} f(x, y, z) &= \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{13} S_{23}^{y,z} f(x, yz, y * z) = \\ &= \mathbf{S}_{12} S_{13}^{x,z} S_{23}^{y,x*z} f(xz, y(x * z), y * (x * z)) = \\ &= S_{12}^{x,y} S_{13}^{xy,z} S_{23}^{x*y,(xy)*z} f(xyz, (x * y)((xy) * z), (x * y) * ((xy) * z)). \end{aligned} \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{S}_{23} \mathbf{S}_{12} f(x, y, z) = \mathbf{S}_{23} S_{12}^{x,y} f(xy, x * y, z) = S_{23}^{y,z} S_{12}^{x,y*z} f(xyz, x * (yz), y * z). \quad (10)$$

Учет уравнений (3) завершает доказательство.

Допустим, что элемент $S^{x,y}$ зависит только от одной комбинации своих аргументов, т.е.

$$S^{x,y} = S\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right). \quad (11)$$

Тогда легко проверить, что $S(x)$ удовлетворяет уравнению (2).

ПРИМЕР 2. Пусть алгебра A в примере 1 допускает элементы $S, T \in A \otimes A$, удовлетворяющие уравнению

$$T_{12}T_{13}S_{23} = T_{23}T_{12},$$

и при этом коумножение имеет вид $\Delta(a) = Ta \otimes 1T^{-1}$. Пусть также дифференцирование D внутреннее: $D(a) = [H, a] \equiv Ha - aH$. Тогда легко проверить, что

$$T^x = x^{H_1}(1-x)^{H_2}T(1-x)^{-H_2}, \quad (12)$$

$$S^{x,y} = (1-x)^{H_1}(1-y)^{H_2}S(1-xy)^{H_2-H_1}(1-y)^{-H_2}. \quad (13)$$

Если $SH_1 = (H_1 + H_2)S$, $H_2S = SH_2$, то уравнение (11) выполняется и при этом $S(x) = (1-x)^{H_1}S$.

Ниже приводятся три примера простых алгебр, допускающих обобщенное коумножение, причем все они могут быть получены из конструкции примера 1 при подходящем выборе алгебры Хопфа A с последующей факторизацией по центру. Для всех этих примеров выполняется уравнение (11) и, более того, элемент T^x может быть выбран в виде $S(1-x)$.

ПРИМЕР 3. Алгебра A порождена двумя генераторами $a^\pm$ с соотношением $[a^-, a^+] = 1$, а обобщенное коумножение имеет вид

$$\Delta_x(a^\pm) = \sqrt{x}a_1^\pm + \sqrt{1-x}a_2^\pm, \quad 0 < x < 1.$$

Это фактор алгебры Ли группы Гейзенберга. Соответствующее решение уравнения (2) записывается следующим образом:

$$S(x) = \exp(\arcsin(\sqrt{x})(a_1^-a_2^+ - a_1^+a_2^-)). \quad (14)$$

Заметим, что в функциональном представлении

$$a^+f(z) = zf(z), \quad a^-f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

оператор $S_{ij}(x)$, входящий в уравнение (2), есть не что иное, как функциональная реализация ортогонального поворота в $\mathbb{R}^3$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости (ij) , на угол $\arcsin \sqrt{x}$.

ПРИМЕР 4. Алгебра A эквивалентна алгебре $N \times N$ матриц $\text{Mat}(N)$ и порождена двумя генераторами X, Y , удовлетворяющими соотношениям

$$YX = \omega XY, \quad X^N = Y^N = 1, \quad (15)$$

где ω — примитивный корень N -й степени из единицы. Обобщенное коумножение имеет вид

$$\Delta_x(X) = X_1X_2, \quad \Delta_x(Y) = x^{1/N}Y_1 + (1-x)^{1/N}X_1Y_2, \quad 0 < x < 1. \quad (16)$$

Это фактор борелевской подалгебры квантовой группы $U_q(sl(2))$ при $q = \omega$. Элемент $S(x)$ совпадает с циклическим q -дилогарифмом

$$S(x) = \Psi_x(E)L(Y, X), \quad E = -Y_1^{-1}X_1Y_2, \quad (17)$$

где $\Psi_x(E)$ – решение операторного функционального уравнения

$$\Psi_x(\omega^{-1}E) = ((1-x)^{1/N} - x^{1/N}E)\Psi_x(E), \quad E^N = -1, \quad (18)$$

с определенной нормировкой и

$$L(\alpha, \beta) = N^{-1} \sum_{k,l=0}^{N-1} \omega^{-kl} \alpha^k \otimes \beta^l, \quad \alpha^N = \beta^N = 1. \quad (19)$$

ПРИМЕР 5. Пусть s – натуральное число и N – некоторый делитель числа $s(s-1)+1$. Алгебра A , эквивалентная алгебре $\text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$, порождена четырьмя генераторами X, Y, U, V , удовлетворяющими соотношениям (15), а также соотношениям

$$UV = VU, \quad U^N = V^N = 1, \quad (20)$$

$$UX = \omega^s XU, \quad VX = \omega^s XV, \quad UY = \omega^s YU, \quad VY = \omega^{s-1} YV, \quad (21)$$

где ω – примитивный корень N -й степени из единицы. Обобщенное коумножение на генераторах X и Y определяется согласно формулам (16), а на генераторах U, V – формулами

$$\begin{aligned} \Delta_x(U) &= x^{2/N}U_1 + (1-x)^{2/N}X_1^{1-s}U_2 + (x-x^2)^{1/N}X_1^{-s}Y_1(U_2+V_2)Y_2^{-1}, \\ \Delta_x(V) &= x^{2/N}V_1 + (1-x)^{2/N}X_1^{1-s}V_2 + (x-x^2)^{1/N}(U_1+V_1)Y_1^{-1}X_1Y_2. \end{aligned}$$

В определенном смысле это минимальное обобщение предыдущего примера на квантовую группу $U_q(sl(3))$. Действительно, генератор X здесь описывает вырожденную (специфика выбора корня из единицы) одномерную подалгебру Картана, генератор Y соответствует одному простому корню, в то время как второму простому корню сопоставляется элемент $Z = (U+V)Y^{-1}$ с обобщенным коумножением

$$\Delta_x(Z) = x^{1/N}Z_1 + (1-x)^{1/N}X_1^{-s}Z_2.$$

Соответствующее решение уравнения (2) имеет вид

$$S(x) = \Psi_x(E)\Psi_x(F)\Psi_x(G)\Psi_x(H)L(U^sV^{-1}, X), \quad (22)$$

где Ψ -функция и оператор E определены формулами (17), L -функция – формулой (19), а остальные операторы даются выражениями

$$F = U_1^{-1}X_1^{1-s}V_2E^{-1}, \quad G = U_2V_2^{-1}F, \quad H = U_1V_1^{-1}E.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы показали, что ОУР (2) допускает несколько решений, которые описаны в примерах 2–5. Понятие обобщенного коумножения оказалось удобной алгебраической основой для построения этих решений. Примеры 4 и 5 алгебраически связаны с квантовыми группами $U_q(sl(2))$ и $U_q(sl(3))$ при корнях из единицы, соответственно. Вероятно, существует и бесконечная цепочка решений, ассоциированных с квантовыми группами $U_q(sl(n))$.

Благодарности. Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00851.

Список литературы

- [1] *L. J. Rogers.* Proc. London Math. Soc. 1907. V. 4. P. 169–189.
- [2] *J. L. Dupon, C. H. Sah.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 161. P. 265–282.
- [3] *J. M. Maillet.* Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 206–214.
- [4] *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 427–434.
- [5] *V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A. Math. Gen. 1995. V. 28. P. 2217–2226.
- [6] *R. M. Kashaev.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 3757–3768.
- [7] *R. M. Kashaev.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 269–275.
- [8] *A. B. Zamolodchikov.* Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 489–505.
- [9] *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter.* J. Stat. Phys. 1993. V. 71. P. 839–864.
- [10] *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter.* J. Stat. Phys. 1992. V. 69. P. 453–485.
- [11] *R. M. Kashaev, S. M. Sergeev.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 195. P. 309–319.
- [12] *S. Baaj, G. Skandalis.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4 série. 1993. V. 26. P. 425–488.
- [13] *S. L. Woronowicz.* Int. J. Math. 1996. V. 7. № 1. P. 127–149.
- [14] *R. M. Kashaev.* Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 4. С. 63–74.