Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, Фундаментальные математические структуры интегрируемых моделей, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 405–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:39:37

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

рассматриваются интегрируемые модели в полностью дискретном многомерном пространстве-времени. Динамические переменные связаны с клетками, образуемыми произвольным набором пересекающихся гиперплоскостей. Изучается $(2 + 1)$ -мерная модель, связанная с функциональным уравнением тетраэдров. Предлагается метод построения многих решений для аналогичных моделей в высших размерностях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель этой статьи – описать фундаментальные математические структуры, на которых зиждется интегрируемость как квантовых, так и классических моделей математической физики. Под такими структурами я понимаю алгебраические соотношения между “строительными блоками” интегрируемых моделей. Обычно такие объекты являются величинами, зависящими от нескольких индексов. Физическая модель получается из них, как стена из кирпичиков или кристалл из повторяющихся ячеек. При этом, конечно, могут использоваться различные предельные переходы, в частности, переходя к бесконечно малым ячейкам, можно строить модели теории поля в непрерывном пространстве-времени. Кроме того, часто бывает важно вычленив из слишком абстрактной конструкции труднообозримого множества таких объектов какие-либо “редукции” – подмножества, параметризуемые немногими параметрами, которым можно надеяться придать физический смысл.

Наиболее фундаментальной следует считать такую структуру, из которой другие получаются как частные или предельные случаи. Представление о такой структуре, конечно, меняется с развитием науки. Одно время в этой роли выступало (квантовое) уравнение Янга–Бакстера [1] для моделей $(1 + 1)$ -мерной квантовой теории поля и двумерной статистической физики и его классический аналог для соответствующих классических моделей. В настоящее время пик исследований сместился на модели в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени. Естественно поэтому, что роль фундаментальной структуры играет теперь $(2 + 1)$ -мерное обобщение уравнения Янга–Бакстера – *уравнение тетраэдров*, из решений которого, в частности, можно построить и

* Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия.
E-mail: igor@prima.tu-chel.ac.ru

решения уравнения Янга–Бакстера, отвечающие различным квантовым группам [2]. Известны различные формулировки уравнения тетраэдров, из которых мы здесь предпочтем *функциональное уравнение тетраэдров* (ФУТ) вследствие того, что и его происхождение, и конструкцию некоторых важных решений можно пояснить на основе элементарных соображений [3]. К тому же ФУТ описывает как классические, так и квантовые модели. Отметим, впрочем, что важным является и другое соотношение – *уравнение пентагона* [4].

Данная статья примыкает по содержанию к статье [3] и может рассматриваться как ее продолжение. В разделе 2 напоминаются некоторые факты о ФУТ. В разделе 3 приводится “векторная” переформулировка блочно-матричной модели, связанной с ФУТ, которая позволяет в простой абстрактной форме построить общее решение уравнений движения, а также естественно приводит к некоторым модификациям модели. В разделе 4 уравнения модели и конструкция их решений обобщаются на большее число измерений. В разделе 5 обсуждаются связи фундаментальных структур интегрируемости с теорией представлений и алгебраической геометрией, а также трудности, возникающие при многомерных обобщениях.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕТРАЭДРОВ

Кратко напомним, что такое ФУТ [3]. ФУТ возникает в *модели прямолинейных струн*. Эти струны представляют собой направленные прямые, все лежащие в одной плоскости, которые могут двигаться в этой плоскости, каждая оставаясь параллельной своему начальному положению. Точкам пересечения двух струн сопоставлены некие объекты, играющие роль динамических переменных (если струны обозначены a и b , то объект обозначим X_{ab}). Если прямая c пересекает точку $a \cap b$, то тройка объектов (X_{ab}, X_{ac}, X_{bc}) преобразуется в новую тройку $(X'_{ab}, X'_{ac}, X'_{bc})$ согласно определенному закону R [3]. ФУТ есть условие того, что два способа преобразования левой части рис. 1 в правую часть, один из которых начинается с того, что струна c проходит через точку $a \cap b$ (точка 1 на рисунке), а другой – с того, что струна d проходит через точку $b \cap c$ (т.е. точку 3), приводят к одинаковому результату.

Формально это записывается следующим образом:

$$R_{123} \circ R_{145} \circ R_{246} \circ R_{356} = R_{356} \circ R_{246} \circ R_{145} \circ R_{123}, \quad (1)$$

где индексы у R отвечают, конечно, точкам пересечения струн.

Единственная известная конструкция решений уравнения (1) связана с выбором объектов X в виде блочных матриц

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где A и D – квадратные матрицы, причем преобразование $R: (X_{ab}, X_{ac}, X_{bc}) \mapsto (X'_{ab}, X'_{ac}, X'_{bc})$ получается из соотношения, которое в сокращенном виде записывается как

$$X_{ab}X_{ac}X_{bc} = X'_{bc}X'_{ac}X'_{ab}, \quad (3)$$

Рис. 1

а в полном виде — как

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 \\ 0 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A'_3 & B'_3 \\ 0 & C'_3 & D'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 & 0 & B'_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ C'_2 & 0 & D'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_1 & B'_1 & 0 \\ C'_1 & D'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$X_{ab} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad X_{ac} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}, \quad X_{bc} = \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{pmatrix}, \\ X'_{ab} = \begin{pmatrix} A'_1 & B'_1 \\ C'_1 & D'_1 \end{pmatrix}, \quad X'_{ac} = \begin{pmatrix} A'_2 & B'_2 \\ C'_2 & D'_2 \end{pmatrix}, \quad X'_{bc} = \begin{pmatrix} A'_3 & B'_3 \\ C'_3 & D'_3 \end{pmatrix},$$

а 0 и 1 обозначают нулевые и единичные матрицы нужных размеров.

Как объяснено в работе [3], соотношение (3) определяет все матрицы X' с точностью до естественно возникающей в этой задаче “калибровочной эквивалентности”.

3. ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В “ВЕКТОРНОМ” ВИДЕ И ИХ РЕШЕНИЕ

В этом разделе матрицы, которые, напомним, в блочно-матричной модели находятся в точках пересечения струн, заменены векторами, лежащими на отрезках струн. Это делает очевидными как дальнейшие модификации и обобщения модели, так и построение решений ее уравнений.

Возьмем для простоты случай, когда блоки A, B, C, D в формуле (2) — это просто числа a, b, c, d (обобщение наших конструкций на матричный случай заслуживает, видимо, отдельного рассмотрения).

Рис. 2

Пусть каждой из (девяти) частей трех струн в левой части рис. 2 сопоставлен вектор из некоторого трехмерного векторного пространства V . Пусть выполнено следующее условие: четыре вектора вокруг каждой данной вершины (например, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$) лежат в некотором двумерном подпространстве пространства V . Это означает, что существуют (2×2) -матрицы X_{12} , X_{13} и X_{23} такие, что

$$X_{12} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix}, \quad X_{13} \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix}, \quad X_{23} \begin{pmatrix} \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix}.$$

Теперь расставим те же векторы $\vec{x}...$ и $\vec{z}...$ (но не $\vec{y}...$) в правой части рис. 2. После этого расставим на “внутренних” ребрах векторы $\vec{y}'...$, получаемые из следующих условий: вектор $\vec{y}'_1$ должен лежать как в двумерном подпространстве, натянутом на $\vec{x}_1$ и $\vec{z}_3$, так и в подпространстве, натянутом на $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$; аналогично вектор $\vec{y}'_2$ должен лежать в подпространствах, натянутых как на $\vec{x}_2$ и $\vec{z}_3$, так и на $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$; а $\vec{y}'_3$ – в подпространствах, натянутых как на $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$, так и на $\vec{x}_1$ и $\vec{z}_3$. Определим матрицы $X'...$ условиями

$$X'_{12} \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}'_1 \\ \vec{y}'_2 \end{pmatrix}, \quad X'_{13} \begin{pmatrix} \vec{y}'_1 \\ \vec{y}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}'_3 \end{pmatrix}, \quad X'_{23} \begin{pmatrix} \vec{y}'_2 \\ \vec{y}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что для матриц $X...$ и $X'...$ выполнено соотношение типа (3). Векторы $\vec{y}'...$ определены с точностью до мультипликативных констант, что в точности соответствует калибровочной свободе для матриц $X'...$.

Забудем теперь о матрицах и сформулируем векторную модель прямолинейных струн, требуя, чтобы как в исходном положении струн, так и при любых их движениях четыре трехмерных вектора, сопоставленные отрезкам, примыкающим к одной вершине, порождали двумерное подпространство. Это не налагает непомерных ограничений на начальные условия: грубо говоря, сопоставляем произвольно векторы половине имеющихся отрезков струн, а остальные векторы определяются по ним. Далее, при каждом

Рис. 3

“элементарном движении” типа рис. 2 “новые” векторы $\vec{y}'$... определены однозначно (с точностью до множителей), так что уравнения движения модели заданы.

Опишем простую абстрактную конструкцию решений этих уравнений. Пусть имеется всего N струн. Возьмем N -мерное векторное пространство $\mathcal{V}$ и для каждой струны (скажем, струны номер i) сопоставим каждой точке плоскости некоторую линейную форму (обозначаемую f_i , g_i или 0) на $\mathcal{V}$ по принципу, ясному из рис. 3. Далее, сопоставим каждому отрезку, на который струна делится другими струнами, вектор из $\mathcal{V}$, который аннулируется *всеми* линейными формами, сопоставленными точкам данного отрезка (из этих форм одна нулевая и $N - 1$ ненулевых). Теперь легко проверить, что четыре вектора на ребрах, примыкающих к одной вершине, лежат в двумерном подпространстве пространства $\mathcal{V}$. Для завершения конструкции возьмем произвольный линейный оператор $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — трехмерное линейное пространство, и заменим все векторы их образами относительно P .

Модификация модели. Рассмотрим опять модель прямых струн, двигающихся в плоскости, но сопоставим теперь векторные переменные не отрезкам струн, а частям плоскости, на которые она делится струнами. На сей раз эти переменные будут лежать в *четырёхмерном* пространстве V , а в уравнениях движения (и ограничениях на начальные условия) содержится требование, чтобы четыре вектора $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ на площадках вокруг одной вершины (рис. 4) лежали в *трехмерном* подпространстве пространства V . При “элементарном движении” это определяет новую переменную (внутри правого треугольника) с точностью до множителя.

Решение уравнений движения строится аналогично предыдущему. Если имеется N струн, мы возьмем теперь $(N + 1)$ -мерное пространство $\mathcal{V}$, введем для каждой струны две линейные формы, как на рис. 3 (впрочем, значения форм *на струнах* нас теперь не интересуют), и в каждой области, на которые разбита плоскость, возьмем вектор, аннулируемый всеми формами, соответствующими точкам этой области. Затем отображим $\mathcal{V}$ на четырехмерное пространство V .

Рис. 4

4. МОДЕЛЬ В ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрим теперь вместо прямолинейных струн, двигающихся в плоскости, несколько плоскостей, которые могут двигаться в трехмерном пространстве, каждая оставаясь параллельной своему исходному положению. Для этого $(3 + 1)$ -мерного случая можно предложить уравнения движения, аналогичные $(2 + 1)$ -мерным, рассмотренным в разделе 3. Здесь снова, конечно, возможны несколько модификаций модели, но мы рассмотрим только одну из них.

Пусть векторные “динамические переменные” принадлежат некоторому *пятимерному* пространству V . Эти переменные будут сопоставлены “одномерным клеткам” конфигурации плоскостей, т.е. отрезкам (в том числе бесконечным) линий пересечения плоскостей, ограниченным другими плоскостями. В уравнениях движения (и условиях на начальное состояние) содержится требование, чтобы векторы на шести ребрах вокруг общей вершины принадлежали *трехмерному* подпространству пространства V .

Типичное “элементарное движение” состоит в том, что плоскость проходит через точку пересечения трех других плоскостей. При этом динамические переменные на шести ребрах “вывернутого наизнанку” тетраэдра определяются, как и раньше, однозначно с точностью до множителей. Ниже, когда мы будем рассматривать переход от этой модели к $(2 + 1)$ -мерной модели, нам понадобятся также некоторые “вырожденные” движения.

Решения уравнения движения строятся следующим образом. Если плоскостей всего N , то возьмем сначала $(N - 1)$ -мерное векторное пространство $\mathcal{V}$. Затем каждой плоскости сопоставим две линейные формы на $\mathcal{V}$, точнее (по аналогии с рис. 3), одну форму — точкам пространства с одной стороны плоскости, другую — с другой и нулевую форму — точкам самой плоскости. Таким образом, точкам каждой 1-клетки сопоставлено $N - 2$ ненулевых форм, и мы выберем для этой клетки вектор из $\mathcal{V}$, аннулируемый всеми этими формами. После этого линейно отобразим пространство $\mathcal{V}$ на пятимерное пространство V . Таким способом можно построить много, но, к сожалению, не все решения уравнений движения модели.

$(2 + 1)$ -мерная модель как частный случай $(3 + 1)$ -мерной. Пусть теперь плоскости расположены в трехмерном пространстве специальным образом: одна из них горизонтальна, а все остальные вертикальны. Тогда и ребра этой конфигурации (отрезки

линий пересечения плоскостей) делятся на вертикальные и горизонтальные.

Выберем следующие начальные данные для модели. Разобьем пятимерное пространство V в прямую сумму двумерного пространства V_2 и трехмерного V_3 . Сопоставим вертикальным прямым некоторые векторы из V_2 (таким образом, двум ребрам на каждой прямой, лежащим снизу и сверху от горизонтальной плоскости, мы сопоставляем один и тот же вектор). Горизонтальным же ребрам сопоставим векторы из V_3 .

Элементарными движениями в этом вырожденном случае будут “выворачивания наизнанку” трехгранных углов, образованных вертикальными плоскостями. Примем, что при этом векторы на вертикальных ребрах не изменяются. Тогда нетрудно видеть, что динамика на горизонтальных ребрах будет в точности совпадать с динамикой модели с векторными переменными на ребрах из раздела 3.

5. ВЫВООДЫ

Напомним, что эта статья по своему содержанию примыкает к работе [3]. Из этих двух работ видно, что интегрируемость имеет свои собственные фундаментальные структуры, имеющие многочисленные связи, но не сводимые к структурам алгебраической геометрии или теории представлений (например, квантовых групп).

Заметим, что уравнения движения в разделах 3 и 4 при переходе к переменным, ассоциированным со струнами или плоскостями (линейным формам), “исчезают”. Это напоминает теорию твисторов Пенроуза, в которой полевые уравнения тоже “исчезают”.

Приведенные в этой статье модели абстрактны, поэтому еще раз подчеркнем, что очень важна проблема редукций – выделения из них простых физически осмысленных моделей. Скажем, красивые и очень нетривиальные редукции блочно-матричной модели найдены в [5]. В этой связи также отметим, что $(3 + 1)$ -мерная модель из раздела 4 может считаться многомерным обобщением билинейного уравнения Мивы [6] (и, конечно, билинейного уравнения Хироты [7]), т.к. модель Мивы получается из ее редукции – блочно-матричной модели раздела 2, согласно работам [8] и [3]. Обратим также внимание читателя на другой подход к многомерному обобщению модели Хироты [9].

Наша абстрактная схема построения решений уравнений движения моделей обобщает обычные алгебро-геометрические методы, в которых вместо наших абстрактных векторных пространств $\mathcal{V}$ используются пространства мероморфных функций на алгебраических кривых, а в качестве линейных форм на $\mathcal{V}$ берутся значения функций в различных точках кривой (или, скажем, некоторые коэффициенты рядов Лорана). Отметим, что уже обычные алгебро-геометрические методы дают полное решение задачи Коши для $(2 + 1)$ -мерных моделей, по крайней мере, когда струны образуют регулярную решетку [10]. К сожалению, простой подсчет параметров показывает, что уже для $(3 + 1)$ -мерных моделей мы получаем *не все* решения. Поиск недостающих решений и представляется сейчас актуальным направлением исследований. Другой актуальной задачей является обобщение схемы построения решений уравнений движения на квантовый случай, хотя бы лишь для $(2 + 1)$ -мерных моделей.

Наконец, отдельной крайне интересной задачей представляется исследование клас-

сических и квантовых систем, основанных на функциональном варианте уравнения пентагона [4].

Благодарности. Настоящая работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-01-00895).

Список литературы

- [1] *C. N. Yang.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1312–1314; *R. J. Baxter.* Ann. Phys. 1972. V. 70. P. 193–228; *L. D. Faddeev.* Sov. Sci. Rev. C. 1980. V. 1. P. 107–155.
- [2] *P. M. Кашаев.* Частное сообщение, 1998.
- [3] *P. M. Кашаев, И. Г. Корепанов, С. М. Сергеев.* ТМФ. 1998. Т. 117. С. 370–384.
- [4] *R. M. Kashaev, S. M. Sergeev.* On pentagon, ten-term, and tetrahedron relations. Preprint ENSLAPP-L-611/96. Lyon: ENS-Lyon, 1996, to appear in Commun. Math. Phys.
- [5] *S. M. Sergeev.* Lett. Math. Phys. 1998. V. 45. № 2. P. 113–119.
- [6] *T. Miwa.* Proc. Japan Acad. Ser. A. 1982. V. 58. P. 9–12.
- [7] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 11. P. 3785–3791.
- [8] *R. M. Kashaev.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 35. P. 389–397.
- [9] *N. Shinzawa, S. Saito.* A symmetric generalization of linear Bäcklund transformation associated with the Hirota bilinear difference equation, solv-int/9801002, 1998.
- [10] *И. Г. Корепанов.* Интегрируемые системы в дискретном пространстве-времени и неоднородные модели двумерной статистической физики. Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург: ПОМИ, 1995; solv-int/9506003, 1995.