Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Лазарев, Возмущение двухсолитонного решения уравнения Кортевега–де Фриза в случае близких значений амплитуд, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 434–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:07:45

© 1999 г.

В. А. Лазарев*

ВОЗМУЩЕНИЕ ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В СЛУЧАЕ БЛИЗКИХ ЗНАЧЕНИЙ АМПЛИТУД

Исследуется процесс взаимодействия двух солитонов с близкими значениями амплитуд при наличии малого возмущения. Определен главный член формального асимптотического решения в виде суммы двух солитонов с медленно деформирующимися параметрами. Выписаны уравнения медленных деформаций для сдвигов фаз солитонов. Показано, что эффекты, связанные со взаимодействием возмущенных солитонов, способны при некоторых условиях компенсировать разность скоростей, что может привести к образованию так называемой квазистационарной солитонной пары.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза, возмущенного малой добавкой,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon F[u], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Начальные данные берутся в виде двухсолитонного потенциала $U_2(x; \kappa_1, \kappa_2, s_1, s_2)$ с близкими значениями амплитуд κ_1, κ_2 такими, что $(\kappa_1 - \kappa_2)/(\kappa_1 + \kappa_2) = \varepsilon$. Оператор возмущения $F[u]$ – гладкая функция от u и от конечного числа ее производных, удовлетворяющая условиям $F[0] = 0$, $\partial_u F[0] = 0$.

Исследуется вопрос о построении формального асимптотического решения (ФАР). Под ФАР понимается функция

$$U(x, t, \varepsilon) = u^0(x, t; \varepsilon) + \varepsilon v(x, t; \varepsilon) + \varepsilon^2 w(x, t; \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2)$$

удовлетворяющая двум условиям: 1) подстановка ее в уравнение (1) дает невязку $o(\varepsilon^2)$; 2) поправка к главному члену мала, т.е. при $\varepsilon \rightarrow 0$ оценка $\varepsilon v + \varepsilon^2 w = o(1)$ выполняется равномерно для $|x| + t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Основная цель состоит в определении главного члена $u^0(x, t; \varepsilon)$.

*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия.
E-mail: lazva@imat.rb.ru.

Следуя подходу Крылова–Боголюбова, в качестве главного члена мы выбираем соответствующее начальным данным двухсолитонное решение невозмущенного уравнения. При этом параметры $\kappa_1, \kappa_2, s_1, s_2$ полагаются зависящими от “медленного” времени $\tau = \varepsilon t$. Такая зависимость главного члена от ε позволяет учесть эффекты порядка $O(1)$, вызываемые возмущением на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$.

Асимптотика невозмущенного двухсолитонного решения в случае близких амплитуд известна: в главном порядке по ε это сумма двух солитонов близкой формы, находящихся в любой момент времени на большом, не менее $\kappa_0^{-1} |\ln \varepsilon|$, расстоянии друг от друга [1]:

$$U_2 = V(x; \kappa_-, \kappa_+, s_-, s_+) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$V(x; \kappa_-, \kappa_+, s_-, s_+) = \frac{2\kappa_-^2(\tau, \varepsilon)}{\text{ch}^2 \eta_-} + \frac{2\kappa_+^2(\tau, \varepsilon)}{\text{ch}^2 \eta_+}, \quad (3)$$

$$\eta_{\pm} = \kappa_{\pm}(\tau, \varepsilon) [x + s_{\pm}(\tau, \varepsilon)], \quad \tau = \varepsilon t. \quad (4)$$

Параметры функции V определяются асимптотическими формулами

$$\kappa_{\pm} = \kappa_0(1 \pm \varepsilon \tanh \sigma), \quad s_{\pm}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} 4\kappa_{\pm}^2(\rho) d\rho \pm \frac{1}{2\kappa_0} \ln \varepsilon + \frac{s_0}{\kappa_0} + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon), \quad (5)$$

где $\sigma(\tau) = 16\kappa_0^3 \tau + \hat{s} + O(\varepsilon)$, $\hat{s} = (s_1 - s_2)/2$, $s_0 = (s_1 + s_2)/2$, $\kappa_0 = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

Легко понять, что для выделения главного члена ФАР достаточно определить в функции V дополнительные медленные деформации параметров, обусловленные возмущением уравнения. Для этих параметров строятся асимптотические формулы

$$\kappa_{\pm}(\tau, \varepsilon) = \left(\overset{0}{\kappa}(\tau) + \varepsilon \overset{1}{\kappa}_{\pm}(\tau) \right) (1 \mp \varepsilon \tanh \sigma), \quad (6)$$

$$s_{\pm}(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} 4\kappa_{\pm}^2(\rho) d\rho + \overset{0}{s}_{\pm}(\tau, \varepsilon) + \overset{1}{s}_{\pm}(\tau, \varepsilon). \quad (7)$$

Логарифмический сдвиг внесен здесь в функции $s_{\pm}$. Необходимо определить коэффициенты $\overset{0}{\kappa}, \overset{1}{\kappa}_{\pm}(\tau), \overset{0}{s}_{\pm}(\tau, \varepsilon)$ как функции “медленного” переменного τ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Существует ФАР задачи (1) в виде (2), обладающее следующими свойствами:*

1. Подстановка ФАР в уравнение (1) дает малую невязку $O(\varepsilon^{2+\alpha})$, $\exists \alpha > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, \tau_0 \varepsilon^{-1}]$, $\tau_0 = \text{const}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Главный член ФАР представляет собой двухсолитонный потенциал $\overset{0}{u} = U_2$, который, в свою очередь, в главном порядке по ε представляет собой сумму двух солитонов (3) с медленно меняющимися параметрами (6), (7).

3. Коэффициенты в уравнениях (6), (7) определяются из дифференциальных и интегральных уравнений, однозначно разрешимых на некотором интервале $\tau \in [0, \tau_0]$. Поправка к главному члену в ФАР имеет порядок $\varepsilon v + \varepsilon^2 w = O(\varepsilon^{2/9})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве главного члена удобно брать потенциал U_2 , а не его асимптотику (3). Дело в том, что линеаризованное именно по U_2 уравнение имеет простое представление для решения в виде разложения Фурье.

Отметим, что функции $\kappa_{\pm}$ подлежат определению до членов $O(\varepsilon)$ включительно. Это необходимо для того, чтобы найти полный сдвиг фазы солитонов в членах порядка $O(1)$, как это видно из формул (5).

Доказательство теоремы сводится к анализу задач для поправок v, w .

2. РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

Выбор главного члена в виде (3), (4) и (5) обеспечивает выполнение уравнения (1) с точностью $O(\varepsilon)$. Для дальнейших поправок получаются линеаризованные по U_2 уравнения с правыми частями, определенными через предыдущие приближения.

Асимптотический анализ поправок и выделение из них растущих при $\varepsilon \rightarrow 0$ членов основаны на формулах явного представления решения линеаризованного уравнения в виде спектрального разложения по специальному базису, составленному из производных квадратов функций Йоста $\Phi^+, \Phi_j^{\pm}$ [2–4],

$$v(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \partial_x \Phi^+ \hat{v} + \sum_{j=1}^2 [\partial_x \Phi_j^+ v_j^- - \partial_x \Phi_j^- v_j^+]. \quad (8)$$

Производные $\partial_x \Phi^+, \partial_x \Phi_j^{\pm}$ являются решениями соответствующего линеаризованного однородного уравнения. Непосредственная подстановка разложения (8) в линеаризованное уравнение переводит последнее в систему тривиальных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_{\tau} \hat{v}(k, \tau, \varepsilon) &= \hat{g}(k, \tau, \varepsilon), & \varepsilon \partial_{\tau} v_j^{\pm}(\tau, \varepsilon) &= g_j^{\pm}(\tau, \varepsilon), \\ \hat{v}|_{\tau=0} &= 0, & v_j^{\pm}|_{\tau=0} &= 0, & k \in \mathbb{R}, & j = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Правые части этих уравнений представляют собой коэффициенты спектрального разложения функции g :

$$\hat{g}(k, \tau, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} g(x, \tau, \varepsilon) \Phi^-(k, x, \tau, \varepsilon) dx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$g_j^{\pm}(\tau, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} g(x, \tau, \varepsilon) \Phi_j^{\pm}(x, \tau, \varepsilon) dx, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Для выделения секулярных членов необходимы асимптотика функций Йоста (причем функций Φ^+ до членов порядка ε) и также асимптотический анализ интеграла из разложения (8). В случае двухсолитонного потенциала выражения для функций Йоста выписываются явно. Получить их асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно так же, как это сделано для двухсолитонного решения в работе [1]. Имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции Йоста на непрерывном спектре $k \in \mathbb{R}$ имеют асимптотику

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= \left(\frac{k^2 - \kappa_0^2 + \kappa_0(ik - \kappa_0) \operatorname{th} \eta_+ + \kappa_0(ik + \kappa_0) \operatorname{th} \eta_-}{(k + i\kappa_0)^2} \right) \exp(ik[x + 4k^2 t]) + O(\varepsilon), \\ \Phi^- &= \left(\frac{k^2 - \kappa_0^2 - \kappa_0(ik + \kappa_0) \operatorname{th} \eta_+ - \kappa_0(ik - \kappa_0) \operatorname{th} \eta_-}{(k + i\kappa_0)^2} \right) \exp(-ik[x + 4k^2 t]) + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции Йоста на дискретном спектре $k \in \{i\kappa_1, i\kappa_2\}$ имеют асимптотику

$$\begin{aligned}\Phi_1^+ &= \frac{\nu_1}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{\nu_2}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} + \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}^2 \sigma} \left[\frac{(\operatorname{th} \eta_- - \operatorname{th} \eta_+)^2}{2} - \frac{\eta_+ + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{\eta_- + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} \right] + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon), \\ \Phi_2^+ &= \frac{\nu_2}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{\nu_1}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}^2 \sigma} \left[\frac{(\operatorname{th} \eta_- - \operatorname{th} \eta_+)^2}{2} - \frac{\eta_+ + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{\eta_- + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} \right] + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon); \quad (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^- &= \frac{1}{K} \left[\frac{\nu_1 \eta_+ + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{\nu_2 \eta_- + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} - \frac{\operatorname{th} \sigma}{4} (\operatorname{th} \eta_- - \operatorname{th} \eta_+)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\operatorname{th}^2 \eta_+ - \operatorname{th}^2 \eta_- + 2 \operatorname{th} \eta_+ + 2 \operatorname{th} \eta_-) \right] + \frac{p_1}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{p_2}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} + O(\varepsilon), \quad (13) \\ \Phi_2^- &= \frac{1}{K} \left[\frac{\nu_2 \eta_+ + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{\nu_1 \eta_- + R}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} + \frac{\operatorname{th} \sigma}{4} (\operatorname{th} \eta_- - \operatorname{th} \eta_+)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\operatorname{th}^2 \eta_+ - \operatorname{th}^2 \eta_- + 2 \operatorname{th} \eta_+ + 2 \operatorname{th} \eta_-) \right] + \frac{p_2}{\operatorname{ch}^2 \eta_+} + \frac{p_1}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}K &= 2 - \frac{16\tau \operatorname{th} \sigma}{\operatorname{ch}^2 \sigma}, \quad p_1 = \frac{1 - 32\kappa_0^3 \tau \nu_1}{4K\varepsilon}, \quad p_2 = \frac{-1 - 32\kappa_0^3 \tau \nu_2}{4K\varepsilon}, \\ \nu_1 &= \frac{1 + \operatorname{th} \sigma}{2}, \quad \nu_2 = \frac{1 - \operatorname{th} \sigma}{2}.\end{aligned} \quad (14)$$

В формулах (12), (13) через $R = R(\tau, \varepsilon)$ обозначены функции, ограниченные по τ на любом конечном промежутке и имеющие при $\varepsilon \rightarrow 0$ не более чем логарифмический рост: $\exists c > 0$, $|R(\tau, \varepsilon)| \leq c |\ln \varepsilon|$, $\forall \tau \in [0, \tau_0]$. В определении солитонных параметров эти функции не участвуют, и поэтому вид их не уточняется. Заметим, что коэффициенты $p_{1,2}$ в функциях Φ_j^- неограниченно возрастают при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. АСИМПТОТИКА ПОПРАВКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОЛИТОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Первая поправка определяется из линеаризованного уравнения

$$\partial_t v + 6\partial_x(U_2 v) + \partial_x^3 v = g \quad (15)$$

с правой частью

$$g = F[V^0] - 4\kappa^0 \kappa'^0 \partial_\kappa V^0 - 4\kappa^0 \left(s_-'^0 \partial_{s_-} + s_+'^0 \partial_{s_+} \right) V^0,$$

зависящей только от главного члена $V^0(x; \kappa^0, s_-^0, s_+^0) = 2\kappa^2 (\text{sech}^2 \eta_- + \text{sech}^2 \eta_+)$ функции V . С учетом асимптотической структуры базисных функций из представления (8) для решения $v(x, t, \varepsilon)$ легко выделить секулярные члены. Их источники – не ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициенты $v_j^\pm$, $\hat{v}$ (9) и $p_j^\pm$ (14). Требование их исключения приводит к условиям на правые части уравнения, удовлетворить которым можно подходящим выбором функций $\kappa^0, s_\pm^0$.

Исключение членов $O(\varepsilon^{-2})$ приводит к известному условию асимптотической ортогональности правой части g и убывающих базисных функций $\Phi_{1,2}^+$:

$$\int_{\mathbb{R}} g \Phi_j^+ dx = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

Это условие дает уравнение для главного члена амплитуды $\kappa^0(\tau)$:

$$4\kappa^0 \kappa'^0 = \int_{-\infty}^{\infty} F \left[\frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 y} \right] \frac{dy}{\text{ch}^2 y}, \quad \kappa^0(0) = \kappa_0. \quad (16)$$

Члены порядка $O(\varepsilon^{-1})$ содержатся как в дискретной части разложения, так и в непрерывной. Асимптотика интегралов типа (8) неоднократно обсуждалась в задачах о возмущении солитонов в общем случае [5, 6]. В рассматриваемой задаче результат совпадает с односолитонным случаем, главным секулярным членом здесь является полувывчет в точке $k = 0$:

$$\partial_x \Phi^+ \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\tau d\rho \int_{\mathbb{R}} g_\pm \Phi^\pm dx \right) \Big|_{k=0}.$$

Особенность данной задачи проявляется лишь в появлении стационарной точки фазы внутри полосы интегрирования $(k, \rho) \in \mathbb{R} \times [0, \tau]$. Однако находится эта точка недалеко от границы, и ее вклад оценивается через $O(\sqrt{\varepsilon})$ [6].

Объединив члены порядка $O(\varepsilon^{-1})$ и потребовав их исключения, приходим к паре интегральных уравнений на главные члены асимптотик сдвигов фаз:

$$h^\pm(\tau) s_\pm^0(\tau) + \int_0^\tau H^\pm(\tau, \rho) s_\pm^0(\rho) d\rho = G^\pm(\tau). \quad (17)$$

Правые части $G^\pm(\rho)$ – интегралы от известных функций.

Значения функций $h^+(\tau)$, $h^-(\tau)$ в начальный момент времени для любого возмущения в нуль не обращаются, что обеспечивает разрешимость системы (17) на некотором промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$.

Уравнения (16), (17) гарантируют ограниченность первой поправки $v = O(1)$. Чтобы обеспечить требуемую невязку в уравнении (1), вторая поправка w должна удовлетворять уравнению

$$\partial_t w + 6\partial_x({}^0uw) + \partial_x^3 w = f \quad (18)$$

с известной правой частью f , определенной через предыдущие приближения.

Во второй поправке только члены порядка $O(\varepsilon^{-2})$ оказываются сравнимыми с главным членом. Исключение таких членов обеспечивает пара условий

$$\int_{\mathbb{R}} f \Phi_j^{\pm} dx = o(1), \quad j = 1, 2, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Исходя из них выписываются уравнения на первые поправки амплитуд

$$4 \left[{}^0\kappa_{\pm} \left(1 \pm {}^0\kappa \operatorname{th} \sigma \right) \right]'(\tau) = {}^0\kappa(\tau) \int_{\mathbb{R}} (\delta_u F[V^0])(v + V^1) - \partial_{\tau} v - 3\partial_x v^2 \operatorname{ch}^{-2} \eta_{\pm} dx,$$

$$V^1 = \frac{2{}^0\kappa \left(\frac{1}{\kappa_-} - {}^0\kappa \operatorname{th} \sigma \right)}{\operatorname{ch}^2 \eta_-} + \frac{2{}^0\kappa \left(\frac{1}{\kappa_+} + {}^0\kappa \operatorname{th} \sigma \right)}{\operatorname{ch}^2 \eta_+}.$$

Начальные значения определяются согласно формулам (5), (6): ${}^1\kappa_{\pm}(0) = 0$.

Определение поправок к сдвигам фаз ${}^1s_{\pm}$ для идентификации главного члена 0u не требуется, однако подходящим их выбором достигается оценка для второй поправки $\varepsilon^2 w = O(\varepsilon^{1+2/9})$, что гарантирует необходимую невязку в уравнении (1). Оценка поправки $\varepsilon v + \varepsilon^2 w = O(\varepsilon^{2/9})$ связана с оценкой стандартных интегралов и от специфики данной задачи не зависит.

Первые поправки амплитуд полностью определяют сдвиг фаз солитонов в членах $O(1)$, так что для расстояния между солитонами можно написать соотношение

$$(s_+ - s_-)(\tau) = - \int_0^{\tau} 16\kappa_0^2 \operatorname{th} \sigma d\rho + \int_0^{\tau} 8\kappa_0 \left(\frac{1}{\kappa_+} - \frac{1}{\kappa_-} \right) (\rho) d\rho + {}^0s_+(\tau) - {}^0s_-(\tau).$$

С рассматриваемой задачей связан вопрос о возможности и условиях образования так называемых квазистационарных солитонных пар [7], когда расстояние между солитонами не возрастает. В этом случае разбегание солитонов вследствие разности скоростей компенсируется дополнительными сдвигами фаз, полученными в результате слабого взаимодействия. Для не слишком больших времен о направлении относительного движения солитонов можно судить по асимптотике разности фаз при $\tau \rightarrow 0$:

$$s_+ - s_- = \ln \varepsilon + \tau \left[{}^0s'_+(0) - {}^0s'_-(0) - 16\kappa_0^2 \operatorname{th} \hat{s} \right] + O(\tau^2).$$

Положительность коэффициента при τ выражает условие сближения солитонов. Такое свойство имеет место при определенных ограничениях на начальные данные и возмущение. Так, например, при $F = -\gamma u$ требуется, чтобы $8\kappa_0^3 \operatorname{th} \hat{s} > \gamma$, а при $F = \alpha u_{xx}$ необходимо выполнение условия $15\kappa_0 \operatorname{th} \hat{s}/4 < \alpha$. На временах $\tau = O(1)$ образование

солитонной пары можно увидеть из численного решения системы (17) при тех же условиях. Проблема очень далеких времен $\tau = \varepsilon t \gg 1$ здесь не обсуждается.

Условие на оператор возмущения $F_1 = \partial_u F[0] = 0$ не ограничивает общности методики. Наличие линейного члена в возмущении ($F_1 \neq 0$) приводит к множителю $\exp(\varepsilon F_1 t)$ в поправках и через них проявляется в главных членах, так же как в статье [8].

Благодарности. Автор выражает признательность Л. А. Калякину, под руководством которого выполнена эта работа.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 97-01-00459, 96-15-96241).

Список литературы

- [1] *R. J. LeVeque.* SIAM J. Math. Anal. 1987. V. 47. № 2. P. 254.
- [2] *А. М. Ильин, Л. А. Калякин.* Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 5. С. 595.
- [3] *Л. А. Калякин.* ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 62.
- [4] *R. L. Sachs.* SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. № 4. P. 674.
- [5] *Л. А. Калякин.* Мат. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 204.
- [6] *Л. А. Калякин.* Дифф. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 1010.
- [7] *Д. Н. Иваннычев, Г. М. Фрайман.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 2. С. 254.
- [8] *Л. А. Калякин, В. А. Лазарев.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 1. С. 92.