Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Мырзакулов, А. К. Данлыбаева, Г. Н. Нугманова, Геометрия и многомерные солитонные уравнения, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 441–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:14:12

© 1999 г. Р. Мырзакулов*, А. К. Данлыбаева*, Г. Н. Нугманова*

ГЕОМЕТРИЯ И МНОГОМЕРНЫЕ СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Установлена связь между дифференциальной геометрией кривых и $(2+1)$ -мерными интегрируемыми спинowymi системами. Найдены лакшманановы эквиваленты некоторых $(2+1)$ -мерных спинowych систем. Этими эквивалентами являются уравнение Захарова, модифицированное уравнение Веселова–Новикова, модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза и т.д.

1. ВВЕДЕНИЕ

Связь геометрии и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) является предметом исследования математиков и физиков более века. Так, классическое уравнение Лиувилля описывает минимальные поверхности в пространстве E^3 , а уравнение синус-Гордон тесно связано с геометрией псевдосферической поверхности, т.е. поверхности с отрицательной гауссовой кривизной [1]. Новый этап в изучении связи геометрии и ДУЧП начинается с открытием метода обратной задачи рассеяния [2], который позволяет в принципе решать задачи Коши для таких нелинейных ДУЧП, как уравнение Кортевега–де Вриза, модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Ландау–Лифшица и др. [3, 4].

Хасимото показал [5], что уравнение движения трехмерной изолированной вихревой нити эквивалентно нелинейному уравнению Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2E|\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

где $E = +1$. Развивая результаты Хасимото, Лэмб [6] нашел связи геометрии кривых и других солитонных уравнений. В дальнейшем Лакшманан установил [7], что уравнение Ландау–Лифшица

$$\vec{S}_t = \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx} \quad (2)$$

при $\vec{S}^2 = E = +1$ эквивалентно нелинейному уравнению Шредингера (1) в геометрическом смысле. В случае $E = -1$ такая эквивалентность была установлена в работе [8].

*Физико-технический институт МН-АН РК, Алма-Ата-82, Казахстан.
E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

Эту эквивалентность мы называем лакшманановой эквивалентностью или L-эквивалентностью в отличие от калибровочной эквивалентности (которую мы называем G-эквивалентностью), имеющей место между уравнениями (1) и (2) [9]. Сразу подчеркнем отличие этих эквивалентностей друг от друга. G-эквивалентность наблюдается только для интегрируемых ДУЧП, имеющих лаксовы представления (ЛП), т.к. в этом случае непосредственно устанавливается эквивалентность ЛП двух нелинейных уравнений. В то же время L-эквивалентность возникает не только для интегрируемых, но и для неинтегрируемых ДУЧП, и ее область применимости по определению ограничена установлением эквивалентности спиновой системы и некоторого ДУЧП, например шредингеровского типа. При этом даже для интегрируемых ДУЧП L-эквивалентность не предполагает знания ЛП.

Вообще говоря, связь геометрии кривых и солитонных уравнений обусловлена следующим фактом. Основное уравнение кривых – уравнение Серре–Френье

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

– эквивалентно спектральной задаче Захарова–Шабата или/и Абловица–Каупа–Сегура–Ньюэлла

$$\psi_x = \begin{pmatrix} i\lambda & q \\ r & -i\lambda \end{pmatrix} \psi \quad (4)$$

при $\lambda = 0$. Как известно, большинство солитонных уравнений интегрируется с помощью спектральной задачи Захарова–Шабата и Абловица–Каупа–Сегура–Ньюэлла. Различные аспекты геометрии и ДУЧП рассмотрены в работах [10–13].

В последнее время объектом интенсивных исследований становятся многомерные, в частности $(2+1)$ -мерные, солитонные ДУЧП [4, 14]. При этом возникает необходимость изучения связи дифференциальной геометрии кривых и поверхностей и $(2+1)$ -мерных солитонных уравнений [8, 15–21].

В данной работе, используя предложенный в [8] геометрический формализм, мы устанавливаем связь дифференциальной геометрии кривых с некоторыми $(2+1)$ -мерными интегрируемыми спиновыми системами. Используя эту связь, мы находим лакшманановы эквивалентные уравнения этих спиновых систем. Кроме того, наш подход позволяет построить лаксовы представления и получить важные интегралы движения рассматриваемых $(2+1)$ -мерных ДУЧП.

Так как в данной работе рассматривается несколько спиновых систем, то мы будем использовать для них условные обозначения, например уравнение M-IV и т.д. (см. [8, 17–21]).

2. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ И $(2+1)$ -МЕРНЫЕ СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с рассмотрения случая плоских кривых. Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ являются касательным и нормальным векторами к кривой, κ – ее кривизна. Тогда кривая описывается

следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}_x = D_1 \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}_y = F_1 \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}_t = G_1 \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -E\kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -Em & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -E\omega & 0 \end{pmatrix},$$

$m = \partial_x^{-1} \kappa_y$, $E = \pm 1$, ω – некоторая действительная функция. Отсюда получаем

$$\kappa_t = \omega_x. \quad (6)$$

При этом радиус-вектор точек кривой удовлетворяет уравнению

$$\vec{r}_t = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2, \quad (7)$$

где A, B – некоторые функции. Поскольку координата x ассоциируется с длиной кривой, т.е. с натуральным параметром, то $\vec{e}_1 = \vec{r}_x$. Таким образом, отсюда и из уравнений (5)–(7) получаем

$$\omega = B_x + \kappa A, \quad A_x = E\kappa B. \quad (8)$$

Из уравнений (6) и (8) имеем

$$\kappa_t = \Omega B, \quad (9)$$

где

$$\Omega = \partial_x^2 + 4E\kappa^2 + 4E\kappa_x \partial_x^{-1} \kappa \quad (10)$$

есть рекурсионный оператор. Отметим, что уравнение (9) при определенном выборе функции B дает эволюционное уравнение для действительной функции κ . При этом высшие иерархии задаются уравнением

$$\kappa_t = \Omega^n B. \quad (11)$$

Применим приведенные формулы для нахождения L-эквивалентных уравнений некоторых $(2+1)$ -мерных интегрируемых спиновых систем.

1. Уравнение M-IV имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= -\frac{m}{4k^2} (\vec{S}_{xy} + V_3 \vec{S})_x, \\ V_{1x} &= -\frac{1}{2} (\vec{S}_x^2)_y, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь $\vec{S} = (S_1, S_2)$ – спиновый вектор, $\vec{S}^2 = E$, $V_3 = \vec{S}_x \vec{S}_y - V_1$. Это уравнение интегрируемо, и соответствующее ЛП существует [8]. Найдем уравнение, L-эквивалентное (12). С этой целью отождествим $\vec{S}$ и $\vec{e}_1$, $\vec{S} \equiv \vec{e}_1$. Тогда из уравнений (5), (8) и (12) получаем

$$\begin{aligned} V_1 &= -E\partial_x^{-1} (\kappa^2)_y, \quad B = -\frac{m}{4k^2} \kappa_y, \\ A &= \frac{m}{4k^2} V_1, \quad \omega = -\frac{m}{4k^2} (\kappa_{xy} - V_1 \kappa). \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда и из уравнения (9) следует, что

$$\begin{aligned}\kappa_t &= -\frac{m}{4k^2}(\kappa_{xy} - V_1\kappa)_x, \\ V_{1x} &= -\frac{E}{2}(\kappa^2)_y,\end{aligned}\tag{14}$$

т.е. кривизна кривой κ удовлетворяет $(2+1)$ -мерному модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза. Это означает, что уравнения (12) и (14) эквивалентны друг другу в геометрическом смысле.

2. Уравнение M-XVII

$$\begin{aligned}\vec{S}_t &= \frac{1}{4}\vec{S}_{xx} - \frac{3}{4}\vec{S}_{xyy} + C_1\vec{S}_x + C_2\vec{S}_y + C_3\vec{S}, \\ V_x + iV_y &= \frac{1}{8}\left[(\vec{S}_x^2 + \vec{S}_y^2)_x - i(\vec{S}_x^2 + \vec{S}_y^2)_y\right]\end{aligned}\tag{15}$$

было введено в статье [8] и является условием совместности линейной задачи

$$\Phi_y = S\Phi_x, \quad \Phi_t = \Phi_{xxx} + B_2\Phi_{xx} + B_1\Phi,\tag{16}$$

здесь

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{3}{4}SS_{xx} + \frac{3}{16}(\vec{S}_x^2 + \vec{S}_y^2 + 8V + 8\bar{V})I + \frac{3}{2}(\bar{V} - V)S + \\ &\quad + \frac{3i}{8}S\{S_x, S_y\} + \frac{3i}{4}S_{xy}, \\ B_2 &= \frac{3}{2}SS_x, \\ C_1 &= \frac{3}{16}(\vec{S}_x^2 + \vec{S}_y^2 + 8V + 8\bar{V}), \quad C_2 = \frac{3}{2}(2i\bar{V} - 2iV - \vec{S}_x\vec{S}_y), \\ C_3 &= \frac{1}{4}\vec{S}(3\vec{S}_{xyy} - \vec{S}_{xxx}), \quad S = \sum_{k=1}^3 S_k\sigma_k,\end{aligned}$$

σ_k – матрицы Паули. Иногда удобна следующая форма уравнения (15):

$$\begin{aligned}\vec{S}_t &= \vec{S}_{zzz} + \vec{S}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + C^-\vec{S}_z + C^+\vec{S}_{\bar{z}} + C_3\vec{S}, \\ V_z &= \frac{1}{2}(\vec{S}_z\vec{S}_{\bar{z}})_z,\end{aligned}\tag{17}$$

где $z = x + iy$. Найдем уравнение, эквивалентное уравнению (15). Как и в предыдущем случае, положим $\vec{S} \equiv \vec{e}_1$, тогда

$$\omega = \frac{1}{4}(\kappa_{xx} - 3\kappa_{yy}) - \frac{1}{4}(\kappa^3 - \kappa m^2) + c_1\kappa + c_2m,\tag{18}$$

где

$$c_1 = \frac{3}{16}(\kappa^2 + m^2 + 8\bar{V} + 8V), \quad c_2 = \frac{3}{4}(2i\bar{V} - 2iV - \kappa m).$$

Введем новую вещественную функцию

$$q = \left[\frac{k^2}{4} + (\partial_x^{-1} \kappa_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что q удовлетворяет модифицированному уравнению Веселова–Новикова

$$q_t = \left(q_{zzz} + 3Vq_z + \frac{3}{2}V_zq \right) + \left(q_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3\bar{V}q_{\bar{z}} + \frac{3}{2}\bar{V}_{\bar{z}}q \right), \quad (20)$$

$$V_{\bar{z}} = (q^2)_z.$$

Это уравнение было введено в работе [22] и ассоциируется с линейной задачей

$$L\Psi = \begin{pmatrix} \partial & -q \\ q & \bar{\partial} \end{pmatrix} \Psi = 0, \quad (21)$$

$$\Psi_t = (A^+ + A^-)\Psi,$$

где

$$A^+ = \partial^3 + 3 \begin{pmatrix} 0 & -q_z \\ 0 & V \end{pmatrix} \partial + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2qV \\ 0 & V_z \end{pmatrix},$$

$$A^- = \bar{\partial}^3 + 3 \begin{pmatrix} \bar{V}\bar{\partial} & 0 \\ q_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \bar{V}_{\bar{z}} & 0 \\ -2q\bar{V} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы показали, что уравнения (15) и (20) являются L-эквивалентными. Ранее было показано, что между этими уравнениями имеет место G-эквивалентность [23].

3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ И (2 + 1)-МЕРНЫЕ СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перейдем к рассмотрению пространственных кривых. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ являются касательным вектором, нормалью и бинормалью к кривой $\vec{e}_1^2 = E \pm 1, \vec{e}_2^2 = 1$. В нашем случае эти векторы удовлетворяют следующей системе уравнений [8]:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_x = D_2 \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_y = F_2 \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_t = G_2 \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -E\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & m_3 & -m_2 \\ -Em_3 & 0 & m_1 \\ Em_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -E\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ E\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

κ и τ – кривизна и кручение кривой. Отсюда находим

$$D_{2y} - F_{2x} + [D_2, F_2] = 0, \quad D_{2t} - G_{2x} + [D_2, G_2] = 0, \quad F_{2t} - G_{2y} + [F_2, G_2] = 0 \quad (23)$$

или для элементов матриц D_2, F_2, G_2 –

$$\begin{aligned} \kappa_y &= m_{3x} + \tau m_2, & \tau_y &= m_{1x} - E\kappa m_2, & m_{2x} &= \tau m_3 - \kappa m_1, \\ \kappa_t &= \omega_{3x} + \tau \omega_2, & \tau_t &= \omega_{1x} - E\kappa \omega_2, & \omega_{2x} &= \tau \omega_3 - \kappa \omega_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, в этом случае временная эволюция радиус-вектора $\vec{r}$, определяющего положение точек кривой, задается формулой

$$\vec{r}_t = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3, \quad (25)$$

где A, B, C – некоторые пока неизвестные функции. Отсюда и из системы (22) получаем

$$\omega_3 = B_x + \kappa A - \tau C, \quad \omega_2 = -C_x - \tau B, \quad A = E\partial_x^{-1}(\kappa B). \quad (26)$$

С учетом (26) перепишем уравнения (24) в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} k \\ \tau \end{pmatrix}_t = N \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $N = (N_{ij})$ и элементы N_{ij} задаются выражениями

$$\begin{aligned} N_{11} &= \partial_{xx} + E\kappa^2 - \tau^2 + E\kappa_x \partial_x^{-1} \cdot \kappa, & N_{12} &= -2\tau \partial_x - \tau_x, \\ N_{21} &= \left(\frac{2\tau \partial_x^{-1} - E\kappa \tau \partial_x^{-1} \cdot \kappa + \tau \partial_x + \tau_x}{\kappa} \right)_x - E\kappa \tau, \\ N_{22} &= \left(\frac{\partial_{xx}^2 - \tau^2}{\kappa} \right)_x + E\kappa \partial_x. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$\psi = \frac{\kappa}{2} e^{-i\partial_x^{-1}\tau}.$$

Из уравнения (27) получим

$$\begin{aligned} \psi_t &= \frac{1}{2} [\partial_x^2 + 4E|\psi|^2 + 4E\psi_x \partial_x^{-1} \bar{\psi} - 4iE\psi \partial_x^{-1} \tau \bar{\psi}] BE - \\ &\quad - \frac{i}{2} [-i\partial_x^2 - 4iE|\psi|^2 + 4iE\psi \partial_x^{-1} \bar{\Psi}_x + 4E\psi \partial_x^{-1} \tau \bar{\psi}] CE. \end{aligned} \quad (28)$$

Это уравнение перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = R \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где R – рекурсивный оператор, элементы которого имеют вид

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}E [\partial_x^2 + 4E|\psi|^2 + 4E\psi_x\partial_x^{-1}\bar{\psi} - 4iE\psi\partial_x^{-1}\tau\bar{\psi}], \\ R_{12} &= \frac{1}{2}E [-i\partial_x^2 - 4iE|\psi|^2 + 4iE\psi\partial_x^{-1}\bar{\Psi}_x + 4E\psi\partial_x^{-1}\tau\bar{\psi}], \\ R_{21} &= \frac{1}{2}E [\partial_x^2 + 4E|\psi|^2 - 4E\bar{\psi}_x\partial_x^{-1}\psi + 4iE\bar{\psi}\partial_x^{-1}\tau\psi], \\ R_{22} &= \frac{1}{2}E [-i\partial_x^2 - 4iE|\psi|^2 - 4iE\bar{\psi}\partial_x^{-1}\Psi_x - 4E\bar{\psi}\partial_x^{-1}\tau\psi]. \end{aligned}$$

Выбирая B и C , получаем различные эволюционные уравнения для ψ .

Применим теперь полученные результаты для установления эквивалентности между $(2+1)$ -мерными солитонными уравнениями.

3. Уравнение M-I имеет вид [8]

$$\vec{S}_t = (\vec{S} \wedge \vec{S}_y + u\vec{S})_x, \quad u_x = -\vec{S}(\vec{S}_x \wedge \vec{S}_y), \quad (30)$$

где $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $\vec{S}^2 = E = \pm 1$. Как и в предыдущем разделе, положим $\vec{S} = \vec{e}_1$. Тогда из соотношений (22), (25) и (30) получаем

$$A = u, \quad B = m_2 = \frac{u_x}{E\kappa}, \quad C = m_3 = \partial_x^{-1} \left(\kappa_y - \frac{\tau}{E\kappa} U_x \right). \quad (31)$$

Подставляя (31) в (28), убеждаемся, что функция ψ удовлетворяет уравнению Захарова [24]

$$i\psi_t = \psi_{xy} - V_1\psi, \quad V_{1x} = -2E(\bar{\psi}\psi)_y. \quad (32)$$

Таким образом, уравнения (30) и (32) эквивалентны.

4. Уравнение M-XXIX

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= -\frac{m}{4k^2}(\vec{S}_{xy} + V_3\vec{S} - u\vec{S} \wedge \vec{S}_x)_x, \\ u_x &= -\vec{S}(\vec{S}_x \wedge \vec{S}_y), \\ V_{1x} &= -\frac{1}{2}(\vec{S}_x^2)_y. \end{aligned} \quad (33)$$

также интегрируемо и допускает ЛП [8]. Пусть $\vec{S} \equiv \vec{e}_1$. В этом случае из (22), (25) и (33) имеем

$$A = -\frac{Em}{k^2}\partial_x^{-1}(\kappa\kappa_y), \quad B = -\frac{m}{4k^2}\kappa_y, \quad C = -\frac{m}{4k^2}\kappa(m_1 - m_2). \quad (34)$$

Подстановка (34) в (28) дает следующий L-эквивалент уравнения (33):

$$\begin{aligned} \psi_t &= -\frac{m}{4k^2}[\psi_{xxy} - (V_1\psi)_x + 2V_2\psi], \\ V_{1x} &= 2E(\bar{\psi}\psi)_y, \quad V_{2x} = E(\bar{\psi}_{xy}\psi - \bar{\psi}\psi_{xy}), \end{aligned} \quad (35)$$

т.е. $(2+1)$ -мерные комплексные модифицированные уравнения Кортевега–де Вриза [25].

5. Уравнение M-XVI

$$\begin{aligned}
\vec{S}_t &= \frac{n}{2k}(\vec{S} \wedge \vec{S}_y + u\vec{S}) - \frac{m}{4k^2} \left[\vec{S}_{xy} + (\vec{S}_x \vec{S}_y - V_1)\vec{S} - u\vec{S} \wedge \vec{S}_x \right]_x, \\
u_x &= -\vec{S}(\vec{S}_x \wedge \vec{S}_y), \\
V_{1x} &= -\frac{1}{2}(\vec{S}_x^2)_y
\end{aligned} \tag{36}$$

интегрируемо и имеет следующее ЛП [8]:

$$\begin{aligned}
\Psi_x &= ik\lambda S\psi, \\
\Psi_t &= (m\lambda^2 + n\lambda)\Psi_y + (m\lambda^2 + n\lambda)z + \lambda C_1 \Psi,
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$C_1 = -\frac{m}{4ik}V_1S + \frac{m}{4ik}(S_{xy} - [S_x, z] - V_1S), \quad z = \frac{1}{4}([S, S_y] + 2iuS).$$

Кроме того, уравнение (36) допускает следующие редукции: 1) к уравнению M-I (30) при $m = 0$; 2) к уравнению M-XXIX при $n = 0$.

Найдем L-эквивалент уравнения (36). Из (22), (25) и (36) получаем

$$A = \frac{n}{2k}u - \frac{m}{4k^2}E\partial_x^{-1}(\kappa\kappa_y), \quad B = \frac{n}{2k}m_2 - \frac{m}{4k^2}\kappa_y, \quad C = \frac{n}{2k}m_3 - \frac{m}{4k^2}\kappa(m_1 - u). \tag{38}$$

Подставляя эти значения B и C в (28), находим уравнение

$$\begin{aligned}
\psi_t &= \frac{n}{2ik}(\psi_{xy} - V_1\psi) - \frac{m}{2k^2}[\psi_{xxy} - (V_1\psi)_x + 2V_2\psi], \\
V_{1x} &= -2E(\bar{\psi}\psi)_y, \\
V_{2x} &= \bar{\psi}\psi_{xy} - \psi_{xy}\bar{\psi},
\end{aligned} \tag{39}$$

геометрически эквивалентное уравнению (36). Как и (36), уравнение (39) допускает две интегрируемые редукции: 1) при $m = 0$ получаем уравнение Захарова (32); 2) при $n = 0$ получаем $(2+1)$ -мерное комплексное модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза (35). В общем случае уравнение (39) также интегрируемо и имеет ЛП следующего вида:

$$\begin{aligned}
f_x &= (ik\lambda + Q)f, \\
f_t &= (m\lambda^2 + n\lambda)f_y + (\lambda B_1 + B_0)f,
\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -E\psi & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = -\frac{m}{4ik}V_1\sigma_3 + \frac{m}{2ik}\sigma_3Q_y, \\
B_0 &= -\left(\frac{n}{4ik}V_1 + \frac{m}{4k^2}V_2\right)\sigma_3 + \frac{n}{2ik}\sigma_3Q_y - \frac{m}{4k^2}(Q_{xy} - V_1Q).
\end{aligned}$$

Отсюда при $m = 0$ получаем ЛП для уравнения Захарова (32), а при $n = 0$ – для комплексного модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза (35).

4. О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ

Все рассмотренные выше уравнения являются интегрируемыми и вследствие этого имеют бесконечное число интегралов движения. Интересно отметить, что ряд важных интегралов движения можно построить, используя приведенный выше геометрический формализм. Например, из формул (24) получаем следующие интегралы:

$$K_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa m_2 dx dy, \quad K_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau m_2 dx dy. \quad (41)$$

В терминах спиновых переменных эти интегралы принимают вид

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S} \cdot (\vec{S}_x \wedge \vec{S}_y) dx dy, \\ K_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\vec{S} \cdot (\vec{S}_x \wedge \vec{S}_y)] [\vec{S} \cdot (\vec{S}_x \wedge \vec{S}_{xx})]}{|\vec{S}_x|^{\frac{5}{2}}} dx dy. \end{aligned} \quad (42)$$

Заметим, что величина

$$G = \frac{1}{4\pi} K_1$$

является так называемым топологическим зарядом. Как известно, решения $(2+1)$ -мерных спиновых систем классифицируются по целым значениям $G = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [14].

5. О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛАКСА

Все перечисленные выше уравнения имеют известные ЛП. Как было упомянуто во введении, наш геометрический формализм позволяет построить ЛП. Покажем это.

Введем комплексную переменную, соответствующую ортогональному вращению,

$$\phi_l = \frac{e_{2l} + ie_{3l}}{1 - e_{1l}}, \quad e_{1l}^2 + e_{2l}^2 + e_{3l}^2 = 1, \quad l = 1, 2, 3. \quad (43)$$

Из соотношений (22) и (43) получаем, что переменная ϕ удовлетворяет трем уравнениям Риккати:

$$\begin{aligned} \phi_{lx} &= -i\tau\phi_l + \frac{1}{2}\kappa\phi_l^2 + \frac{1}{2}\kappa, \\ \phi_{ly} &= -im_1\phi_l + \frac{1}{2}[m_3 + im_2]\phi_l^2 + \frac{1}{2}[m_3 - im_2], \\ \phi_{lt} &= -i\omega_1\phi_l + \frac{1}{2}[\omega_3 + i\omega_2]\phi_l^2 + \frac{1}{2}[\omega_3 - i\omega_2]. \end{aligned} \quad (44)$$

Введя преобразование

$$\phi_l = \frac{v_2}{v_1}, \quad (45)$$

перепишем уравнения (44) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\tau & -\kappa \\ \kappa & -i\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} im_1 & -(m_3 + im_2) \\ m_3 - im_2 & -im_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_t &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\omega_1 & -(\omega_3 + i\omega_2) \\ \omega_3 - i\omega_2 & -i\omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

Итак, мы имеем новое ЛП для $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых уравнений. Подставляя в систему (46) выражения для m_j и w_j , получим ЛП для конкретных $(2 + 1)$ -мерных солитонных уравнений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, с помощью предложенного ранее геометрического формализма нами даны геометрические интерпретации некоторых интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных спиновых систем. Эти спиновые системы после отождествления $\vec{S} \equiv \vec{e}_1 = \vec{r}_x$ можно рассматривать как новые интегрируемые кривые, динамика которых определяется соответствующими спиновыми уравнениями. Кроме того, данный подход позволяет найти геометрические эквиваленты, так называемые L-эквиваленты, этих спиновых уравнений. Для всех рассмотренных спиновых систем найдены их L-эквиваленты, включающие в себя уравнение Захарова, модифицированное уравнение Веселова–Новикова, модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза и его комплексный аналог и т.д. Приведена процедура построения ЛП для $(2 + 1)$ -мерных солитонных уравнений. Полученная новая форма ЛП отличается от стандартного вида ЛП. Интересным моментом рассматриваемого формализма является то, что он естественным образом содержит важные интегралы сохранения, например топологический заряд. Точные решения $(2 + 1)$ -мерных солитонных уравнений могут быть классифицированы по целым значениям топологического заряда. Наконец, отметим следующий интересный факт: ЛП большинства $(2 + 1)$ -мерных солитонных уравнений содержат спектральный параметр λ , который является функцией t и y . Например, для уравнений (30) и (32) λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda_t = \lambda \lambda_y. \quad (47)$$

Для уравнений (33) и (35) соответствующее уравнение для спектрального параметра имеет вид

$$\lambda_t = \lambda^2 \lambda_y. \quad (48)$$

В уравнениях (47) и (48) опущен несущественный постоянный множитель. Конечно, как и в $(1 + 1)$ -мерном случае, значение $\lambda = \text{const}$ удовлетворяет этим уравнениям. В общем случае λ – некоторая функция от t и y . В качестве примера приведем решение более общего уравнения

$$\lambda_t = k \lambda^n \lambda_y,$$

где $k = \text{const}$. Имеем

$$\lambda = \left(\frac{y + c}{a - \kappa t} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где $a(c)$ – некоторая вещественная (комплексная) константа.

Наконец, отметим еще один факт. В $(1 + 1)$ -мерном случае известно, что $\lambda_t = 0$. В нашем $(2 + 1)$ -мерном случае сохраняется следующий интеграл для спектрального параметра:

$$K = \int \lambda dy, \quad K_t = 0.$$

Таким образом, в $(2 + 1)$ -мерном случае для решения солитонных уравнений должна использоваться “неизоспектральная” версия метода обратной задачи рассеяния. При этом соответствующие решения называются опрокидывающимися солитонами [26, 27].

Список литературы

- [1] *A. Doliwa, P. M. Santini.* Phys. Lett. A. 1994. V. 185. P. 373.
- [2] *C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [3] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [4] *M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson.* Solitons, Nonlinear evolution equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [5] *H. Hasimoto.* J. Fluid Mech. 1972. V. 51. P. 477.
- [6] *G. L. Lamb.* J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 1654.
- [7] *M. Lakshmanan.* Phys. Lett. A. 1977. V. 61. P. 53; J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 1667.
- [8] *R. Myrzakulov.* On some integrable and nonintegrable soliton equations of magnets. Alma-Ata: NEPI, 1987.
- [9] *В. Е. Захаров, Л. А. Тажтаджян.* ТМФ. 1979. Т. 38. С. 26.
- [10] *K. Nakayama, H. Segur, M. Wadati.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2603.
- [11] *A. Sym.* Soliton surfaces and their applications. In: Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems. Lect. Notes in Phys. V. 239. Ed. R. Martini. New York: Springer, 1985. P. 154.
- [12] *A. I. Bobenko.* Math. Ann. 1990. V. 290. P. 207.
- [13] *R. Balakrishnan, A. R. Bishop, R. Dandoloff.* Phys. Rev. B. 1993. V. 47. P. 3108.
- [14] *B. G. Konopelchenko.* Solitons in multidimensions. Singapore: World Scientific, 1993.
- [15] *B. G. Konopelchenko.* Multidimensional integrable systems and dynamics of surfaces in space. Preprint. Taipei: Acad.Sinica, 1993.
- [16] *I. A. Taimanov.* Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 133.
- [17] *R. Myrzakulov.* Soliton equations in $2 + 1$ dimensions and Differential geometry of curves/surfaces. Preprint CNLP-1994-02. Alma-Ata: CNLP, 1994.
- [18] *R. Myrzakulov.* Integrable geometry and soliton equations in $2 + 1$ dimensions. Preprint CNLP-1994-06. Alma-Ata: CNLP, 1994.
- [19] *R. Myrzakulov, S. Vijayalarshmi, G. N. Nugmanova, M. Lakshmanan.* Phys. Lett. A. 1997. V. 233. P. 391.
- [20] *R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, R. N. Syzdykova, M. Lakshmanan.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2122.
- [21] *M. Lakshmanan, R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, A. K. Danlybaeva.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 3765.
- [22] *Л. В. Богданов.* ТМФ. 1987. Т. 70. С. 309.
- [23] *G. N. Nugmanova.* The Myrzakulov equations: the gauge equivalent counterparts and soliton solutions. Alma-Ata: KSU, 1992.
- [24] *V. E. Zakharov.* Method inverse scattering problem. In: Solitons. Eds R. K. Bullough, P. J. Caudrey. Berlin: Springer, 1980. P. 270.
- [25] *I. A. B. Strachan.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 243.
- [26] *О. И. Боголюбский.* Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.
- [27] *R. Myrzakulov, G. N. Nugmanova, R. N. Syzdykova.* J. Phys. A. 1998. V. 31. № 47. P. 9535.