Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Пронько, Ю. Г. Строганов, Уравнения Бете “за экватором”, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 452–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:49:52

© 1999 г.

Г. П. Пронько*, Ю. Г. Строганов†

УРАВНЕНИЯ БЕТЕ “ЗА ЭКВАТОРОМ”

Рассмотрены T - Q -уравнения Бакстера для XXZ - (или XXZ -) спиновой цепочки. Показано, что для каждого полиномиального (тригонометрического) решения, имеющего степень не выше $N/2$ и ведущего к “хорошим” решениям уравнений Бете, второе линейно независимое решение также полиномиально и его степень, наоборот, выше чем $N/2$. Это второе решение играет важную роль. С его помощью, в частности, выводятся все “fusion”-соотношения для этих моделей.

1. АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЕТЕ ДЛЯ XXZ -СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Уравнения Бете для случая XXZ -цепочки спина $1/2$ [1] могут быть представлены в следующем виде [2]:

$$\left(\frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{k \neq j}^n \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i} = - \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где N — длина цепочки (общее число спинов), а n — число параметров λ_j , которые описывают вектор состояния.

Полный спин такого состояния равен $N/2 - n$, и, следовательно, только состояния с $n \leq N/2$ имеют физический смысл. Было показано [3], что стандартно конструируемый в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния (КМОЗР) вектор Бете равен нулю, если $n > N/2$.

Тем не менее решения уравнения (1) с n “за экватором” $N/2$ определенно существуют, и более того их рассмотрение является очень полезным.

В данном разделе мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 (об ассоциированных решениях уравнений Бете для XXZ -спиновой цепочки). *Для каждого решения уравнения (1) с $n \leq N/2$ существует однопараметрическое семейство решений с $n^* = N - n + 1 \geq N/2 + 1$.*

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия; Международный Сольвеевский институт, Брюссель, Бельгия

† Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\{\lambda_j\}$, являющееся решением уравнения (1) с $n \leq N/2$. Это множество определяет многочлен $Q(\lambda)$ ¹⁾ с корнями $\{\lambda_j\}$,

$$Q(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j). \quad (2)$$

Уравнения Бете (1) могут быть записаны в виде

$$\left(\lambda_j - \frac{i}{2}\right)^N Q(\lambda_j + i) + \left(\lambda_j + \frac{i}{2}\right)^N Q(\lambda_j - i) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

откуда следует, что многочлен степени $N + n$

$$\left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N Q(\lambda + i) + \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N Q(\lambda - i) \quad (4)$$

обращается в нуль в корнях многочлена $Q(\lambda)$. В случае простых корней это влечет за собой выполнение T - Q -уравнений Бакстера для XXX -цепочки [5, 6]

$$\left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N Q(\lambda + i) + \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N Q(\lambda - i) = T(\lambda)Q(\lambda), \quad (5)$$

где многочлен $T(\lambda)$ имеет степень N и является одним из собственных значений матрицы перехода (следа матрицы монодромии в КМОЗР) для XXX -модели.

Поделим обе части (5) на произведение $Q(\lambda - i)Q(\lambda)Q(\lambda + i)$:

$$\frac{T(\lambda)}{Q(\lambda + i)Q(\lambda - i)} = R\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) + R\left(\lambda + \frac{i}{2}\right), \quad (6)$$

где

$$R(\lambda) = \frac{\lambda^N}{Q(\lambda - \frac{i}{2})Q(\lambda + \frac{i}{2})}. \quad (7)$$

Рациональная функция $R(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$R(\lambda) = \pi(\lambda) + \frac{q_-(\lambda)}{Q(\lambda - \frac{i}{2})} + \frac{q_+(\lambda)}{Q(\lambda + \frac{i}{2})}, \quad (8)$$

где $\pi(\lambda)$, $q_-(\lambda)$ и $q_+(\lambda)$ — многочлены, чьи степени удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \deg \pi(\lambda) &= N - 2n, \\ \deg q_-(\lambda) &< n, \\ \deg q_+(\lambda) &< n. \end{aligned} \quad (9)$$

¹⁾В более общем случае неоднородной XXZ -спиновой цепочки такие многочлены рассматривались Бакстером [4].

С помощью представления (8) для $R(\lambda)$ переписываем уравнение (6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{T(\lambda)}{Q(\lambda+i)Q(\lambda-i)} = & \pi\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) + \pi\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) + \frac{q_-(\lambda - \frac{i}{2})}{Q(\lambda-i)} + \\ & + \frac{q_+(\lambda - \frac{i}{2})}{Q(\lambda)} + \frac{q_-(\lambda + \frac{i}{2})}{Q(\lambda)} + \frac{q_+(\lambda + \frac{i}{2})}{Q(\lambda+i)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В правой части уравнения (10) есть два члена со знаменателем $Q(\lambda)$:

$$\frac{q_+(\lambda - \frac{i}{2}) + q_-(\lambda + \frac{i}{2})}{Q(\lambda)},$$

который отсутствует в левой части. Степень числителя этой дроби согласно (9) меньше, чем степень знаменателя, т.е. дробь равна нулю, и можно записать, что

$$q_+(\lambda) = q\left(\lambda + \frac{i}{2}\right), \quad q_- = -q\left(\lambda - \frac{i}{2}\right). \quad (11)$$

С учетом равенств (11) представление для функции $R(\lambda)$ принимает вид

$$R(\lambda) = \pi(\lambda) + \frac{q(\lambda + \frac{i}{2})}{Q(\lambda + \frac{i}{2})} - \frac{q(\lambda - \frac{i}{2})}{Q(\lambda - \frac{i}{2})}. \quad (12)$$

Многочлен $\pi(\lambda)$, как и любой другой многочлен, может быть представлен в виде разности

$$\pi(\lambda) = \rho\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) - \rho\left(\lambda - \frac{i}{2}\right), \quad (13)$$

где $\rho(\lambda)$ — многочлен степени $N - 2n + 1$. Точную форму $\rho(\lambda)$ можно получить, например, используя биномиальные многочлены

$$\binom{\lambda}{m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание соотношение (13), мы получаем следующее представление для рациональной функции $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) \equiv \frac{\lambda^N}{Q(\lambda + \frac{i}{2})Q(\lambda - \frac{i}{2})} = \frac{P(\lambda + \frac{i}{2})}{Q(\lambda + \frac{i}{2})} - \frac{P(\lambda - \frac{i}{2})}{Q(\lambda - \frac{i}{2})}, \quad (14)$$

где $P(\lambda)$ является последним и самым важным многочленом данной теоремы,

$$P(\lambda) = \rho(\lambda)Q(\lambda) + q(\lambda). \quad (15)$$

Подсчитывая степень $P(\lambda)$, получаем $\deg P(\lambda) = n^* = N + 1 - n$.

Теперь мы избавились от знаменателей в (14) и получили фундаментальное уравнение

$$P\left(\lambda + \frac{i}{2}\right)Q\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) - P\left(\lambda - \frac{i}{2}\right)Q\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) = \lambda^N. \quad (16)$$

Оно симметрично (с точностью до знака) при перестановке Q и P , и, следовательно, корни многочлена $P(\lambda)$, которые мы обозначаем $\{\lambda_j^*\}$, являются решением уравнений Бете

$$\left(\frac{\lambda_j^* + \frac{i}{2}}{\lambda_j^* - \frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{k \neq j}^{n^*} \frac{\lambda_j^* - \lambda_k^* + i}{\lambda_j^* - \lambda_k^* - i} \quad (j = 1, 2, \dots, n^*), \quad (17)$$

так же как корни $Q(\lambda)$ являются решениями уравнений (1).

Многочлен $\rho(\lambda)$ в формуле (13) определен с точностью до произвольной постоянной α . Следовательно, многочлены $P(\lambda)$, соответствующие данному $Q(\lambda)$, образуют однопараметрическое семейство, т.е.

$$P(\lambda, \alpha) = P(\lambda) + \alpha Q(\lambda), \quad (18)$$

что, очевидно, согласуется с (16). Теорема доказана.

Проиллюстрируем только что доказанную теорему, приведя полную систему многочленов Q и P для случая $N = 4$ (табл. 1).

Таблица 1

Номер	S	$Q(\lambda)$	$(2S + 1)iP(\lambda)$	$T(\lambda)$
1	0	$\lambda^2 + \frac{1}{4}$	$\lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda + \alpha(\lambda^2 + \frac{1}{4})$	$2\lambda^4 + 3\lambda^2 - \frac{3}{8}$
2	0	$\lambda^2 - \frac{1}{12}$	$\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda + \alpha(\lambda^2 - \frac{1}{12})$	$2\lambda^4 + 3\lambda^2 + \frac{13}{8}$
3	1	$\lambda - \frac{1}{2}$	$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \frac{5}{8}\lambda + \alpha(\lambda - \frac{1}{2})$	$2\lambda^4 + \lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{8}$
4	1	$\lambda + \frac{1}{2}$	$\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \frac{5}{8}\lambda + \alpha(\lambda + \frac{1}{2})$	$2\lambda^4 + \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{8}$
5	1	λ	$\lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{3}{16} + \alpha\lambda$	$2\lambda^4 + \lambda^2 - \frac{7}{8}$
6	2	1	$\lambda^5 + \frac{5}{6}\lambda^3 + \frac{7}{48}\lambda + \alpha$	$2\lambda^4 - 3\lambda^2 + \frac{1}{8}$

Сделаем несколько замечаний по поводу полученного результата.

1. Многочлены $Q(\lambda)$ нормированы так, что коэффициент при старшей степени равен 1. Сравнивая члены старших степеней в (16), мы получаем, что коэффициент при старшей степени $P(\lambda)$ равен $1/i(N - 2n + 1) = 1/i(2S + 1)$, где S – спин соответствующего состояния.

2. Существование однопараметрического семейства решений уравнений Бете для $n \geq N/2 + 1$ означает, что “за экватором” эти уравнения являются зависимыми.

3. Используя представление (14) для $R(\lambda)$ в уравнении (6), мы получаем следующее выражение для собственных значений матрицы перехода:

$$T(\lambda) = P(\lambda + i)Q(\lambda - i) - P(\lambda - i)Q(\lambda + i). \quad (19)$$

4. Комбинируя выражения (16) и (19), можно получить соотношение

$$\left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N P(\lambda + i) + \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N P(\lambda - i) = T(\lambda)P(\lambda), \quad (20)$$

означающее, что многочлен $P(\lambda)$ можно рассматривать как второе независимое решение уравнения (5) с тем же самым значением $T(\lambda)$.

5. Многочлены $Q(\lambda)$, $P(\lambda)$, удовлетворяющие уравнению (16), напоминают собственные значения операторов $Q\pm$, которые были построены и использованы в серии статей [7]. Авторы рассмотрели теоретико-полевые аналоги некоторых полезных конструкций, используемых в интегрируемых моделях на решетке. Построение операторов $Q\pm$ для 6-вершинной модели²⁾ требует внешнего магнитного поля или, что в рассматриваемом случае эквивалентно, специальных граничных условий. К сожалению, в настоящее время мы не знаем, насколько связаны упомянутые операторы с нашими P - Q -многочленами. Общая эллиптическая конструкция [9] также использует специальный параметр ν , который играет ту же роль, что и магнитное поле в тригонометрическом случае.

2. “FUSION”-СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦ ПЕРЕХОДА

Как подчеркивалось в работах [7, 9], фундаментальное соотношение

$$P\left(\lambda + \frac{i}{2}\right)Q\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) - P\left(\lambda - \frac{i}{2}\right)Q\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) = \lambda^N, \quad (21)$$

а точнее, его обобщения приводят к существованию класса функциональных соотношений, известных как “fusion”-соотношения для матриц перехода [10].

Определим прежде всего функции $T_s(\lambda)$:

$$\begin{aligned} T_s(\lambda) = & P\left(\lambda + i\left(s + \frac{1}{2}\right)\right)Q\left(\lambda - i\left(s + \frac{1}{2}\right)\right) - \\ & - P\left(\lambda - i\left(s + \frac{1}{2}\right)\right)Q\left(\lambda + i\left(s + \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Параметр s является спином во вспомогательном пространстве и, следовательно, принимает целые или полуцелые значения, но, вообще говоря, правая часть соотношения (22) определена для произвольных комплексных значений s .

Из определения (22) следует, что

$$T_{-s-1}(\lambda) = -T_s(\lambda), \quad (23)$$

а для частных значений s имеем

$$T_{\frac{1}{2}}(\lambda) = T(\lambda), \quad T_{-\frac{1}{2}}(\lambda) = 0, \quad T_{-1}(\lambda) = -T_0(\lambda) = -\lambda^N. \quad (24)$$

²⁾См. также [8].

Введем обозначение

$$\Delta(a, b) \equiv P(a)Q(b) - P(b)Q(a). \quad (25)$$

Функция $\Delta(a, b)$ меняет знак при $a \rightarrow b$, что ведет к тождеству

$$\Delta(a, b)Q(c) + \Delta(b, c)Q(a) + \Delta(c, a)Q(b) = 0. \quad (26)$$

Используя определения (22) и (25), мы можем переписать последнее уравнение в виде

$$\begin{aligned} & T_{s_1} \left(\lambda + i \frac{s_2 - s_3}{3} \right) Q \left(\lambda + 2i \frac{s_3 - s_2}{3} \right) + \\ & + T_{s_2} \left(\lambda + i \frac{s_3 - s_1}{3} \right) Q \left(\lambda + 2i \frac{s_1 - s_3}{3} \right) + \\ & + T_{s_3} \left(\lambda + i \frac{s_1 - s_2}{3} \right) Q \left(\lambda + 2i \frac{s_2 - s_1}{3} \right) = 0, \\ & s_1 + s_2 + s_3 + \frac{3}{2} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Его можно рассматривать как обобщение T - Q -уравнения (5).

Другое простое тождество

$$\Delta(a, b)\Delta(c, d) - \Delta(a, c)\Delta(b, d) + \Delta(a, d)\Delta(b, c) = 0 \quad (28)$$

приводит к следующим квадратичным соотношениям:

$$\begin{aligned} & T_{s_1} \left(\lambda - i \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \right) T_{s_3 - s_2 - \frac{1}{2}} (\lambda - i(s_2 + s_3 + 1)) - \\ & - T_{s_2} \left(\lambda - i \left(s_2 + \frac{1}{2} \right) \right) T_{s_3 - s_1 - \frac{1}{2}} (\lambda - i(s_1 + s_3 + 1)) + \\ & + T_{s_3} \left(\lambda - i \left(s_3 + \frac{1}{2} \right) \right) T_{s_2 - s_1 - \frac{1}{2}} (\lambda - i(s_1 + s_2 + 1)) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для частных значений $s_2 = -1$, $s_3 = 0$ последнее уравнение с учетом формул (23) и (24) принимает вид хорошо известных “fusion”-соотношений

$$T_s \left(\lambda - i \left(s + \frac{1}{2} \right) \right) T(\lambda) = \left(\lambda + \frac{i}{2} \right)^N T_{s - \frac{1}{2}} (\lambda - i(s + 1)) + \left(\lambda - \frac{i}{2} \right)^N T_{s + \frac{1}{2}} (\lambda - is), \quad (30)$$

где $T_s(\lambda)$ является собственным значением матрицы перехода с квантовым спином $1/2$ и спином во вспомогательном пространстве s .

3. XX_{s_q} -МОДЕЛЬ

Рассмотрим ситуацию, когда, наоборот, квантовый спин имеет произвольное значение s_q , а спин во вспомогательном пространстве равен $1/2$. Это соответствует XX_{s_q} -спиновой модели. Предыдущее рассмотрение обобщается и на этот случай.

В самом деле, уравнения Бете для XX_{s_q} -цепочки имеют вид [2]

$$\left(\frac{\lambda_j + is_q}{\lambda_j - is_q} \right)^N = \prod_{k \neq j}^n \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i} = - \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (31)$$

где обозначения те же, что и в (1).

Бетевским векторам соответствуют решения $\{\lambda_j\}$, удовлетворяющие неравенству $n \leq s_q N$. Собственные значения матрицы перехода даются формулой

$$T_{\frac{1}{2}, s_q}(\lambda) = (\lambda + is_q)^N \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j - i}{\lambda - \lambda_j} + (\lambda - is_q)^N \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j + i}{\lambda - \lambda_j}, \quad (32)$$

а T - Q -уравнения Бакстера имеют вид

$$(\lambda - is_q)^N Q_{s_q}(\lambda + i) + (\lambda + is_q)^N Q_{s_q}(\lambda - i) = T_{\frac{1}{2}, s_q}(\lambda; s_q) Q_{s_q}(\lambda). \quad (33)$$

Рассмотрим для примера случай $s_q = 3/2$.

Как и для $s_q = 1/2$, поделим обе части уравнений (33) на произведение $Q(\lambda - i)Q(\lambda) \times Q(\lambda + i)$. Однако теперь не удастся представить правую часть как конечную разность из-за различного сдвига в спектральных параметрах числителя и знаменателя. Чтобы преодолеть эту трудность, умножим обе части уравнения на пару вспомогательных множителей $(\lambda + i/2)^N (\lambda - i/2)^N$ (в общем случае число таких множителей равно $2s_q - 1$):

$$\frac{T(\lambda)(\lambda + \frac{i}{2})^N (\lambda - \frac{i}{2})^N}{Q(\lambda + i)Q(\lambda - i)} = R\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) + R\left(\lambda + \frac{i}{2}\right), \quad (34)$$

где

$$R(\lambda) = \frac{(\lambda - i)^N \lambda^N (\lambda + i)^N}{Q(\lambda - \frac{i}{2})Q(\lambda + \frac{i}{2})}. \quad (35)$$

Дальнейшие шаги буквально те же самые, что и для квантового спина $1/2$, и мы получаем фундаментальное соотношение

$$P_{\frac{3}{2}}\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) Q_{\frac{3}{2}}\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) - P_{\frac{3}{2}}\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) Q_{\frac{3}{2}}\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) = (\lambda - i)^N \lambda^N (\lambda + i)^N, \quad (36)$$

а также выражение для собственных значений матрицы перехода $T_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(\lambda)$:

$$T_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(\lambda) \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N = P_{\frac{3}{2}}(\lambda + i) Q_{\frac{3}{2}}(\lambda - i) - P_{\frac{3}{2}}(\lambda - i) Q_{\frac{3}{2}}(\lambda + i). \quad (37)$$

Для $s_q = 3/2$ и $N = 2$ получаем результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Номер	S	$Q(\lambda)$	$(2S + 1)iP(\lambda)$	$T(\lambda)$
1	0	$\lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda$	$\lambda^4 + \frac{5}{2}\lambda^2 + \frac{9}{16} + \alpha(\lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda)$	$2\lambda^2 + \frac{15}{2}$
2	1	$\lambda^2 + \frac{9}{20}$	$\lambda^5 + \frac{5}{2}\lambda^3 + \frac{9}{16}\lambda + \alpha(\lambda^2 + \frac{9}{20})$	$2\lambda^2 + \frac{11}{2}$
3	2	λ	$\lambda^6 + \frac{15}{4}\lambda^4 + \frac{59}{16}\lambda^2 + \frac{45}{64} + \alpha\lambda$	$2\lambda^2 + \frac{3}{2}$
4	3	1	$\lambda^7 + \frac{91}{20}\lambda^5 + \frac{91}{16}\lambda^3 + \frac{369}{320}\lambda + \alpha$	$2\lambda^2 - \frac{9}{2}$

В заключение этого раздела сформулируем вторую теорему, обобщающую первую.

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого решения уравнений (31) с $n \leq sN$ существует однопараметрическое семейство решений этих же уравнений с $n^* = 2sN - n + 1 \geq sN + 1$.*

Заметим, что, используя соотношения типа (36) для произвольного s_q , мы можем получить рациональные аналоги всех “fusion”-соотношений, рассматриваемых в работе [10].

4. XXZ-СПИНОВАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим уравнения Бете “за экватором” для XXZ-спиновой модели. Общие идеи те же, что и в первом разделе.

В обозначениях Бакстера [6] T - Q -уравнения имеют вид

$$T(\phi)Q(\phi) = \sin^N(\phi + \eta)Q(\phi - 2\eta) + \sin^N(\phi - \eta)Q(\phi + 2\eta), \quad (38)$$

где ϕ – спектральный, а η – кроссинг-параметры. Обычно используемый для XXZ-модели q -параметр есть $q = e^{2i\eta}$.

Напомним, что функция

$$Q(\phi) = \prod_{j=1}^n \sin(\phi - \phi_j) \quad (39)$$

является в данном случае тригонометрическим многочленом степени $n \leq N/2$, а множество $\{\phi_j\}$ замещает множество $\{\lambda_j\}$, используемое нами в рациональном случае.

Собственные значения матрицы перехода $T(\phi)$ суть тригонометрические многочлены степени N . Вместо рациональной функции $R(\lambda)$, мы имеем дело теперь с мероморфной функцией

$$R(\phi) = \frac{\sin^N \phi}{Q(\phi - \eta)Q(\phi + \eta)}. \quad (40)$$

Аналогом разложения на простые дроби в тригонометрическом случае является разложение функции (40) в сумму функций вида $1/\sin(\phi - \phi_j \pm \eta)$ для нечетных N и $\operatorname{ctg}(\phi - \phi_j \pm \eta)$ для четных N .

Используя это разложение и принимая во внимание уравнения Бете, мы получаем тригонометрический аналог представления (12)

$$R(\phi) = \pi(\phi) + \frac{q(\phi + \eta)}{Q(\phi + \eta)} - \frac{q(\phi - \eta)}{Q(\phi - \eta)}, \quad (41)$$

где $\pi(\phi)$ является тригонометрическим многочленом степени $N - 2n$, в то время как $\deg q(\phi) < n$.

Теперь построение многочлена $P(\phi)$ сводится к построению тригонометрического полинома $\rho(\phi)$, удовлетворяющего равенству

$$\rho(\phi + \eta) - \rho(\phi - \eta) \equiv \pi(\phi). \quad (42)$$

В данной работе рассматривается случай, когда q не является корнем целой степени из 1, т.е. когда кроссинг-параметр η не равен рациональной части π .

В этом случае $\sin(k\eta) \neq 0$, $k \in Z$, и мы можем использовать простые формулы

$$\begin{aligned} \sin(k\phi) &= \frac{\cos(k(\phi - \eta)) - \cos(k(\phi + \eta))}{2 \sin(k\eta)}, \\ \cos(k\phi) &= \frac{\sin(k(\phi + \eta)) - \sin(k(\phi - \eta))}{2 \sin(k\eta)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для нечетных чисел N степень многочлена $\pi(\phi)$ также нечетна, и мы можем разложить его на гармоники $\cos(k\phi)$, $\sin(k\phi)$, где $k \neq 0$.

В этом случае формулы (43) решают задачу (42) и функция $\rho(\phi)$ является тригонометрическим многочленом степени $N - 2n$. Полином

$$P(\phi) \equiv \rho(\phi)Q(\phi) + q(\phi) \quad (44)$$

при этом есть второе решение уравнений (38), его степень равна $N - n$ и его разложение на множители имеет вид

$$P(\phi) = \text{const} \prod_{j=1}^{n^*} \sin(\phi - \phi_j^*), \quad (45)$$

где $n^* = N - n$ дает решение тригонометрического варианта уравнений Бете

$$\left(\frac{\sin(\phi_j + \eta)}{\sin(\phi_j - \eta)} \right)^N = \prod_{k \neq j}^{n^*} \frac{\sin(\phi_j - \phi_k + 2\eta)}{\sin(\phi_j - \phi_k - 2\eta)} \quad (j = 1, 2, \dots, n^*) \quad (46)$$

“за экватором”.

Для четных N многочлен $\pi(\phi)$ обладает нулевой гармоникой и, следовательно, решение задачи (42) требует члена с линейной (непериодической) зависимостью от ϕ .

В качестве результата имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3 (об ассоциированных решениях уравнения Бакстера для XXZ -спиновой модели). *Для нечетной длины цепочки N уравнение (38) имеет пару решений, которые являются тригонометрическими многочленами степеней $n \leq N/2$ и $n^* = N - n > N/2$. Для четной длины N одно из решений уравнения (38) есть тригонометрический многочлен степени n , а второе имеет вид (44), где $\rho(\phi)$ содержит линейную (непериодическую) зависимость от ϕ .*

Для построения “fusion”-соотношений в случае XXZ -модели достаточно иметь два основных соотношения, аналогичных соотношениям (21) и (22). Из представления для $R(\phi)$ следует, что

$$P(\phi + \eta)Q(\phi - \eta) - P(\phi - \eta)Q(\phi + \eta) = \sin^N \phi. \quad (47)$$

Второе основное соотношение можно выбрать в виде

$$T_s(\phi) = P(\phi + (2s + 1)\eta)Q(\phi - (2s + 1)\eta) - P(\phi - (2s + 1)\eta)Q(\phi + (2s + 1)\eta). \quad (48)$$

Следовательно, все результаты разделов 2 и 3 справедливы для общей XXZ -спиновой модели.

Благодарности. Мы благодарны Л. Д. Фаддееву, А. В. Разумову, М. В. Савельеву, С. М. Сергееву и А. Ю. Волкову за полезные обсуждения.

Особая благодарность — В. В. Бажанову, который привлек наше внимание к факту существования двух операторов $Q \pm$ для XXZ -спиновой модели с магнитным полем и тем самым инициировал данную работу.

Исследование было поддержано грантом РФФИ-98-01-00070, а также грантом INTAS-96-690.

Список литературы

- [1] *H. Bethe.* Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205–226.
- [2] *L. D. Faddeev.* How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model. In: Les Houches Lectures. Amsterdam: North Holland, 1995. P. 1–59; hep-th/9605187.
- [3] *Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тхатадзеян.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 109. С. 134–178.
- [4] *R. J. Baxter.* Stud. Appl. Math. L. 1971. P. 51–69.
- [5] *R. J. Baxter.* Ann. Phys. (N. Y.). 1972. V. 70. P. 193–228.
- [6] *R. J. Baxter.* Ann. Phys. (N. Y.). 1973. V. 76. P. 1–24; P. 25–47; P. 48–71.
- [7] *V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 381–398; 1997. V. 190. P. 247–278; Integrable Structure of Conformal Field Theory III. The Yang–Baxter Relation. hep-th/9805008.
- [8] *A. Antonov, B. Feigin.* Quantum Group Representations and Baxter Equation. hep-th/9603105.
- [9] *I. Krichiver, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 267–304.
- [10] *A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 1565–1585.