Общероссийский математический портал

И. О. Рассказов, Возмущение ударной волны, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 462–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:00:34

ВОЗМУЩЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрена начальная задача для возмущенного уравнения Хопфа $u_t + uu_x = \varepsilon f(u)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказано, что решение в области непрерывности разлагается в стандартный асимптотический ряд по целым степеням малого параметра. Указана асимптотика линии, вдоль которой распространяется ударная волна.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается начальная задача для возмущенного уравнения Хопфа

$$u_t + uu_x = \varepsilon f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < o(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad (2)$$

где $f, \phi \in C^\infty(-\infty, \infty)$, $\phi'(x)$ и $f(u)$ не обращаются в нуль. Предполагается, что невозмущенная задача ($\varepsilon = 0$) имеет решение с единственной линией разрыва (ударной волной), которая начинается в точке (x_0, t_0) (см., например, [1–4]).

Необходимость вводить разрывное решение обусловлена возникновением на плоскости (x, t) области, в которой невозможно однозначно определить гладкое решение поставленной задачи. Разрыв определяется при помощи известного условия Гюгонио, накладываемого на скорость распространения ударной волны: $U = (u_1 + u_2)/2$. Здесь $u_{1,2}$ — значения функции u по разные стороны разрыва. Заметим, что это условие вытекает из следующего закона сохранения:

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ u \Phi_t + \frac{1}{2} u^2 \Phi_x \right\} dx dt = 0, \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

после интегрирования его по частям.

В данной работе мы покажем, что если опрокидывается решение вырожденной задачи, то опрокидывается и решение возмущенной задачи, причем имеют место следующие асимптотические формулы:

*Институт математики Уфимского НЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: rasskazov@imat.rb.ru

для решения задачи в области непрерывности

$$u(x, t, \varepsilon) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, t), \quad (3)$$

для линии разрыва

$$x = s(t, \varepsilon) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k(t), \quad (4)$$

для координат точки опрокидывания

$$x^*(\varepsilon) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^*, \quad t^*(\varepsilon) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k t_k^*. \quad (5)$$

Коэффициенты асимптотического разложения определяются из рекуррентной системы уравнений. Главные члены разложений дают соответственно решение, линию разрыва и координаты точки опрокидывания невозмущенной задачи.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Решение задачи (1), (2) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи следующей замены:

$$x = \tilde{x}(\xi, t, \varepsilon), \quad u = \tilde{u}(\xi, t, \varepsilon), \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{dt} = \varepsilon f(\tilde{u}), & \tilde{u}|_{t=0} = \phi(\xi), \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{u}, & \tilde{x}|_{t=0} = \phi^{-1}(\psi(\xi)). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь ψ определяется с помощью функции, обратной к первообразной,

$$\psi^{-1}(z) \equiv \int \frac{1}{f(z)} dz = \varepsilon t + \xi,$$

таким образом, ψ есть обратная функция к написанной выше первообразной, а ξ параметризует семейство таких первообразных. Обычно используемый в таких случаях переход к переменным (ξ, t) с параметром ξ , заданным через начальные условия $\tilde{u}|_{t=0} = \phi(\xi)$, $\tilde{x}|_{t=0} = \xi$, здесь неудобен.

Проинтегрировав систему уравнений (7), мы получаем следующее параметрическое представление для решения задачи (1), (2):

$$\tilde{u}(\xi, t, \varepsilon) = \phi(\xi + \varepsilon t), \quad (8)$$

$$\tilde{x}(\xi, t, \varepsilon) = \phi^{-1}(\psi(\xi)) + \int_0^t \psi(\xi + \varepsilon \eta) d\eta. \quad (9)$$

Ниже мы займемся исследованием полученных для решения нашей задачи алгебраических уравнений (8), (9).

3. ТОЧКА ОПРОКИДЫВАНИЯ

Итак, мы получили решение задачи (1), (2) в виде

$$u = \tilde{u}(\xi, t, \varepsilon), \quad x = \tilde{x}(\xi, t, \varepsilon).$$

Возникает вопрос, как сделать обратную замену переменных $(\xi, t) \rightarrow (x, t)$ и получить решение задачи (1), (2) в виде $u = u(x, t, \varepsilon)$. Обратное преобразование в рассматриваемом случае неоднозначно, что и обуславливает введение разрывного решения.

Естественно постараться применить для наших целей теорему об обратной функции.

Граница области неоднозначности на плоскости (x, t) определяется уравнениями огибающей семейства пересекающихся характеристик

$$x = \tilde{x}(\xi, t, \varepsilon), \quad \tilde{x}_\xi(\xi, t, \varepsilon) = 0. \quad (10)$$

Видно, что эти уравнения задают некоторую линию L на плоскости (x, t) , зависящую еще и от ε . В силу гладкости функций $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ по аргументу ξ линия эта будет гладкой всюду, за исключением, может быть, точки (ξ_0, t_0) , где выполнено следующее равенство:

$$\tilde{x}_{\xi\xi}(\xi, t, \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Три последних уравнения и определяют точку опрокидывания (и возникновения ударной волны) в решении задачи (1), (2). Выясним поведение координат этой точки при $\varepsilon \rightarrow 0$. Уравнения (10), (11) – обычные алгебраические уравнения относительно координат искомой точки (x_0^*, t_0^*) , включающие в себя малый параметр. Следовательно, асимптотика их будет иметь стандартный вид (5). Напишем уравнения для главных членов разложения:

$$\begin{aligned} \phi''(\psi(\xi_0)) &= 0, \\ t_0^* &= -\frac{1}{\phi'(\psi(\xi_0))}, \\ x_0^* &= \phi^{-1}(\psi(\xi_0)) + t_0^* \psi(\xi_0). \end{aligned}$$

Из первого уравнения определяем $\mu = \psi(\xi_0)$, а также ξ_0 и затем t_0^* и x_0^* . Следующие поправки находятся из линеаризованных уравнений. Например, уравнения для первой поправки выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1 \frac{\psi'' \phi'(\mu) - \phi''(\mu) \psi'^2}{-[\phi'(\mu)]^2} &= \xi_1 \psi'' t_0 + t_1 \psi' + \frac{1}{2} t_0^2 \psi'', \\ \xi_1 \left\{ \phi''(\mu) \frac{\psi' \psi''}{[\phi'(\mu)]^2} + \phi'''(\mu) \psi' \left[\frac{\psi'}{\phi'(\mu)} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \phi''(\mu) \frac{\psi'(\psi'' \phi'(\mu) - \phi''(\mu) \psi')}{[\phi'(\mu)]^3} \right\} = \psi'' t_1 + \frac{1}{2} t_0^2 \psi''', \end{aligned}$$

где все производные функции $\psi(\xi)$ считаются в точке $\xi = \xi_0$.

4. УДАРНАЯ ВОЛНА

Уравнения для линии, вдоль которой распространяется ударная волна, будем искать, используя упомянутое выше условие Гюгоню. Заметим, что хотя при получении условия Гюгоню рассматривалась однородная задача, тем не менее для возмущенной задачи (1), (2) это условие не меняется и может быть найдено аналогичным путем.

Получаем следующую систему уравнений для определения линии распространения ударной волны:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}s(t, \varepsilon) &= \frac{1}{2}(\psi(\varepsilon t + \xi_1) + \psi(\varepsilon t + \xi_2)), \\ s_1(t, \varepsilon) &= \phi^{-1}(\psi(\xi_1)) + \int_0^t \psi(\varepsilon \eta + \xi_1) d\eta, \\ s_2(t, \varepsilon) &= \phi^{-1}(\psi(\xi_2)) + \int_0^t \psi(\varepsilon \eta + \xi_2) d\eta,\end{aligned}$$

где неизвестными величинами являются функции времени $s_1(t, \varepsilon)$, $s_2(t, \varepsilon)$, $\xi_1(t, \varepsilon)$, $\xi_2(t, \varepsilon)$, здесь координаты s_1 , ξ_1 и s_2 , ξ_2 отвечают началу и концу линии разрыва, соответственно. Из общей теории известна асимптотика решений системы уравнений такого вида. Таким образом, для линии, вдоль которой распространяется ударная волна, справедлива асимптотическая формула (4).

5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ В ОБЛАСТИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Из формул (8), (9) легко видеть, что $\tilde{u}$ и $\tilde{x}$ — гладкие и однозначные функции своих переменных. Теперь, для того чтобы получить асимптотические формулы для решения нашей задачи в области непрерывности, необходимо сделать обратную замену $(\xi, t, \varepsilon) \rightarrow (x, t, \varepsilon)$ в выражении для функции $\tilde{u}$. Вследствие гладкости функции $\tilde{u}$ по всем переменным для функции u будет справедливо асимптотическое представление (3). Проблема заключается в следующем: как правильно сделать эту обратную замену? Из рассмотрений предыдущего раздела видно, что теорему об обратной функции можно применять везде, кроме области, ограниченной некоторой линией, заданной уравнением (10). Для того чтобы снять это ограничение, обозначим через $\xi_{1,2}(t, \varepsilon)$ соответственно минимальный и максимальный корни уравнения $\tilde{x}(\xi, t, \varepsilon) = s(t, \varepsilon)$ и введем следующую функцию:

$$\tilde{x}_p(\xi, t, \varepsilon) = \begin{cases} \tilde{x}(\xi, t, \varepsilon), & \xi < \xi_1, \\ s(t, \varepsilon), & \xi \in [\xi_1, \xi_2], \\ \tilde{x}(\xi, t, \varepsilon), & \xi > \xi_2. \end{cases}$$

Легко проверить следующие свойства введенной функции:

- 1) $\tilde{x}_p(\xi, t, \varepsilon)$ определена и однозначна для всех ξ ;
- 2) $\tilde{x}_{p\xi}$ нигде не обращается в нуль, следовательно, $\tilde{x}_p$ — неубывающая или невозрастающая функция для всех ξ ;

3) $\tilde{x}_p$ — гладкая функция по ξ , кроме, может быть, точек $\xi = \xi_{1,2}$;

4) область значений функции $\tilde{x}_p$ покрывает всю ось ox .

Следовательно, к введенной функции можно применить теорему об обратной функции и найти $\xi(x, t, \varepsilon)$. Подставляя $\xi(x, t, \varepsilon)$ в выражение для функции $\tilde{u}(\xi, t, \varepsilon)$, получаем алгебраическое уравнение, для которого уже легко выписать асимптотику решения.

Окончательное асимптотическое разложение для функции $u(x, t, \varepsilon) = u(\tilde{x}_p, t, \varepsilon)$ вне полосы шириной $O(\varepsilon^N)$ будет иметь вид (3) стандартного разложения по целым степеням малого параметра.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-01-00459, 96-15-96241).

Список литературы

- [1] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М: Мир, 1977.
- [2] J. Yu, J. Kevorkian. Stud. Appl. Math. 1994. V. 91. P. 247–273.
- [3] S. Junca. Asymp. Anal. 1998. V. 17. № 3. P. 221–238.
- [4] Yuanping He, Bryant Moodie. Appl. Anal. 1995. V. 57. P. 145–176.