Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Сайто, Обобщение билинейного разностного уравнения Хироты, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 467–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:41:21

ОБОБЩЕНИЕ БИЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ¹⁾

Обсуждается обобщение билинейного разностного уравнения Хироты на многомерную решетку, которое допускает линеаризованные преобразования Бэклунда. Для случая трilinearных уравнений представлены предварительные результаты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Полностью интегрируемые системы в дискретном пространстве-времени интересны с точки зрения как физики, так и математики. Среди других таких систем билинейное разностное уравнение Хироты (БРУХ) [1, 2] выделяется тем, что именно оно играло определяющую роль в развитии математической физики в последние годы. Все уравнения иерархии Кадомцева–Петвиашвили возникают из этого единственного уравнения в результате взятия различных непрерывных пределов.

С математической точки зрения БРУХ является тождеством, называемым формулой тройной секущей Фейя [3], которое характеризует алгебраические кривые. Недавно было показано [4], что БРУХ возникает в качестве инварианта при преобразованиях Лапласа на дискретных сопряженных решетках, задающих дискретные поверхности.

Помимо того очевидного обстоятельства, что БРУХ описывает значительную часть солитонной физики, оно возникает и в других самых различных областях теоретической физики. Ему удовлетворяют струнные статистические суммы в физике частиц [5], а в статистической механике БРУХ возникает как уравнение, которому удовлетворяют трансфер-матрицы некоторых классов точно решаемых решеточных моделей [6].

Для каждой точно решаемой системы существует ее дискретный аналог, который зачастую более фундаментален, нежели непрерывная система, поскольку, с одной стороны, можно получить целое семейство непрерывных систем из одной и той же дискретной путем взятия различных пределов по независимым переменным без нарушения свойств интегрируемости [1], а с другой стороны, если начинать с интегрируемого дифференциального уравнения, то задача построения соответствующего дискретного уравнения,

¹⁾Статья частично основана на совместной работе с Нобухико Шинзавой.

*Department of Physics Tokyo Metropolitan University 1-1 Minamioshima, Hachioji, Tokyo, Japan 192-0397. E-mail: saito@phys.metro-u.ac.jp

сохраняющего свойства интегрируемости, весьма нетривиальна. Дискретная интегрируемая система обладает обширной группой симметрий, часть которых обязательно теряется при взятии непрерывного предела. Для того чтобы найти правильную дискретную систему, соответствующую интегрируемому дифференциальному уравнению, необходимо восстановить эту симметрию. И в этом смысле дискретные и непрерывные интегрируемые системы совсем не равнозначны.

Выделение полностью интегрируемых систем из класса всех нелинейных систем является фундаментальной проблемой. Полностью детерминированная система должна описываться полностью интегрируемыми уравнениями. Тогда можно точно предсказать поведение системы в любой момент в будущем. В неинтегрируемой системе обязательно имеет место хаотическое поведение, которое делает невозможным точное предсказание будущего поведения системы. При дискретизации интегрируемого дифференциального уравнения хаос возникает почти всегда и система перестает быть интегрируемой [7]. В этой связи следует отметить работы Кашаева, Корепанова и Сергеева [8], в которых были глубоко исследованы расширения уравнения Янга–Бакстера в решеточных пространствах старших размерностей. Там же была отмечена связь этих расширений с обобщениями БРУХ.

В недавней работе [9] Шинзава и автор настоящей статьи предложили обобщение БРУХ на случай полилинейных соотношений в решеточных пространствах старших размерностей. Решения этих уравнений могут быть получены путем решения соответствующих линеаризованных уравнений. Эти новые обобщения возникли из исследования симметрий линейных задач, отвечающих БРУХ. Симметрия задачи в случае, если потенциал и волновая функция меняются ролями, которая неявно присутствовала в БРУХ, может быть прямо обобщена на случай многомерного решеточного пространства. К сожалению, в настоящее время мы еще далеки от понимания природы этой симметрии как с физической, так и с математической точек зрения. Поэтому было бы интересно найти хоть какую-нибудь связь нашей системы с другими известными системами.

Настоящая работа является продолжением работы [9]. Здесь мы дадим необходимые пояснения, которые отсутствуют в указанной статье. Приводятся также некоторые примеры решений для трилинейного уравнения на шестимерном решеточном пространстве. Однако проверка соответствия полученных результатов другим работам по трилинейным уравнениям [10] не проводится; эта проблема оставляется для будущих исследований.

2. ОБОБЩЕНИЕ БРУХ

Пусть f и g – комплекснозначные функции от N целых чисел $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$. Рассмотрим следующую пару линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (T_i T_j f) (T_j^{-1} g) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (T_i^{-1} T_j^{-1} g) (T_j f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь T_j обозначает оператор, переводящий k_j в $k_j + 1$, а α_{ij} — комплексные параметры, характеризующие систему.

Заметим, что уравнение (2) получается из (1) простой заменой k_i на $k_i - 1$. Таким образом, если одно из этих уравнений выполняется, то выполняется и второе:

$$(1) \longleftrightarrow (2) \Leftrightarrow k_i \longleftrightarrow k_i - 1. \quad (3)$$

Это и есть симметрия при перемене ролей потенциала f и волновой функции g , которую мы называем дуальной симметрией [11].

Чтобы продемонстрировать, как преобразование Бэклунда может быть включено в обсуждаемую схему, введем обозначения

$$f_j := T_j f, \quad g_j := T_j^{-1} g, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

$$G_{ij}(f) := \alpha_{ij} T_i f_j = \alpha_{ij} T_i T_j f, \quad \tilde{G}_{ij}(g) := \alpha_{ij} T_i^{-1} g_j = \alpha_{ij} T_i^{-1} T_j^{-1} g. \quad (5)$$

Прежде чем решать (1) и (2) относительно f и g , рассмотрим линейные уравнения

$$\sum_{j=1}^N G_{ij}(f) g_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij}(g) f_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

которые должны быть решены относительно g_j и f_j .

Уравнение (6) разрешимо относительно g_j тогда и только тогда, когда $\det[G(f)]$ равен нулю. Таким образом, если существует решение $f_j^{(1)}$ уравнения $\det[G(f^{(1)})] = 0$, то имеются и решения уравнения (6), которые обозначим $g_j^{(1)}$. Так как пара линейных уравнений совпадает, то $g_j^{(1)}$ приводит к нулевому детерминанту $\det[\tilde{G}(g^{(1)})] = 0$. Тогда имеет место следующая диаграмма преобразований Бэклунда:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^N G_{ij}(f) g_j = 0 & \longleftrightarrow & \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij}(g) f_j = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det[G(f)] = 0 & & \det[\tilde{G}(g)] = 0, \end{array}$$

из которой можно получить цепочку решений

$$f_j^{(1)} \longrightarrow g_j^{(1)} \longrightarrow f_j^{(2)} \longrightarrow g_j^{(2)} \longrightarrow f_j^{(3)} \longrightarrow \dots \quad (8)$$

уравнений

$$\det[G(f^{(n)})] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$\det[\tilde{G}(g^{(n)})] = 0, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

Заметим, что цепочка решений (8) всегда может быть построена, если только найдено решение нелинейного уравнения $\det[G(f^{(1)})] = 0$.

Предположим теперь, что мы можем найти $g^{(n)}$ из $g_j^{(n)}$, решив уравнение $T_j^{-1}g^{(n)} = g_j^{(n)}$, где $g^{(n)}$ удовлетворяет уравнению (10). Иными словами, уравнение (10) оказывается N -мерным полилинейным уравнением, решением которого является функция $g^{(n)}$. Аналогично можно найти $f^{(n)}$ из $f_j^{(n)}$, решая уравнение $T_j f^{(n)} = f_j^{(n)}$; при этом такая функция $f^{(n)}$ удовлетворяет другому N -мерному полилинейному уравнению (9).

Покажем, как БРУХ может быть получено в рамках указанной схемы. Рассмотрим случай $N = 4$. Мы предполагаем, что матрица коэффициентов α_{ij} антисимметрична, а потому и матрица $G_{ij}(f)$ будет антисимметричной по построению. В этом частном случае детерминант оказывается квадратом пфаффиана, т.е. мы получим

$$[G_{12}G_{34} + G_{23}G_{14} - G_{13}G_{24}]^2 = 0. \quad (11)$$

Выразим это соотношение явно в терминах функции f :

$$\begin{aligned} & \alpha f(k_1 + 1, k_2 + 1, k_3, k_4) f(k_1, k_2, k_3 + 1, k_4 + 1) + \\ & + \beta f(k_1, k_2 + 1, k_3 + 1, k_4) f(k_1 + 1, k_2, k_3, k_4 + 1) + \\ & + \gamma f(k_1 + 1, k_2, k_3 + 1, k_4) f(k_1, k_2 + 1, k_3, k_4 + 1) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha = \alpha_{12}\alpha_{34}$, $\beta = \alpha_{23}\alpha_{14}$ и $\gamma = -\alpha_{13}\alpha_{24}$. Это в точности БРУХ [1, 2], если функция f не зависит от k_4 .

3. РАЗРЕШЕНИЕ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАНИЯ

Как обсуждалось в предыдущем разделе, мы всегда можем найти g_j и f_j путем решения соответствующих линейных задач (6) и (7). Осталось только разрешить условия согласования $T_j^{-1}g = g_j$ и $T_j f = f_j$ для функций g и f . Эти условия, выписанные явно, будут эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{k} + \mathbf{e}_1) &= g_2(\mathbf{k} + \mathbf{e}_2) = \dots = g_N(\mathbf{k} + \mathbf{e}_N) = g(\mathbf{k}), \\ f_1(\mathbf{k} - \mathbf{e}_1) &= f_2(\mathbf{k} - \mathbf{e}_2) = \dots = f_N(\mathbf{k} - \mathbf{e}_N) = f(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{e}_j$ — единичный вектор, направленный по j -й оси. Рассмотрим два метода, частично позволяющих разрешить эти условия.

Уменьшение числа связей. Пусть r – ранг матрицы $G_{ij}(f)$; тогда существует матрица $A := \{a_{\mu\nu}\}$, получаемая при перенумерации рядов и столбцов матрицы $G_{ij}(f)$ такая, что

$$A_r := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (14)$$

Общее решение системы

$$\sum_{\nu=1}^N a_{\mu\nu} w_\nu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, r, \quad (15)$$

имеет вид

$$w_\nu = \sum_{s=1}^{N-r} c_s A_\nu^{(s)}, \quad \text{если } \nu = 1, 2, \dots, r, \quad (16)$$

$$w_\nu = -c_{\nu-r} A_r, \quad \text{если } \nu = r+1, \dots, N, \quad (17)$$

где c_s – произвольные функции, а $A_\nu^{(s)}$, $\nu = 1, 2, \dots, r$, – определители матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r+s} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r+s} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr+s} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

в которых ν -й столбец заменяется соответствующим $(r+s)$ -м столбцом.

Наложим теперь условия (13) на w_ν , $\nu = r+1, \dots, N$. Поскольку $c_s(\mathbf{k})$ произвольны, достаточно их выбрать таким образом, чтобы все $w_{r+s}(\mathbf{k} + \mathbf{e}_{r+s})$, $s = 1, 2, \dots, N-r$, имели одно и то же значение. Обозначим это число через $c(\mathbf{k})$. Функция $c(\mathbf{k})$ может быть выбрана произвольно. Тогда функции $c_s(\mathbf{k})$ могут быть построены по функции $c(\mathbf{k})$ следующим образом:

$$c_s(\mathbf{k}) = -\frac{c(\mathbf{k} - \mathbf{e}_{r+s})}{A_r(\mathbf{k})}, \quad s = 1, 2, \dots, N-r. \quad (19)$$

Пока что мы разрешили $N-r$ из числа $N-1$ условий (13). С использованием этого результата оставшиеся условия с индексами $\nu = 1, 2, \dots, r$ могут быть представлены в виде

$$-\sum_{s=1}^{N-r} \frac{A_\nu^{(s)}(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\nu)}{A_r(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\nu)} c(\mathbf{k} + \mathbf{e}_\nu - \mathbf{e}_{r+s}) = c(\mathbf{k}) \quad (20)$$

или эквивалентно

$$\sum_{s=1}^{N-r} A_\nu^{(s)}(\mathbf{k}) c(\mathbf{k} - \mathbf{e}_{r+s}) + A_r(\mathbf{k}) c(\mathbf{k} - \mathbf{e}_\nu) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, r. \quad (21)$$

Уравнения (21) суть r уравнений, которые должны удовлетворяться одной и той же функцией $c(\mathbf{k})$. Если нам удастся решить эту систему, то ее решение $c(\mathbf{k})$ будет не чем иным, как искомой функцией $g(\mathbf{k})$. Поскольку она зависит от конкретного вида $A_\nu^{(s)}(\mathbf{k})$, а потому и от потенциала f , дальнейшее продвижение на этом пути оказывается невозможным.

Калибровочный потенциал. Рассмотрим (6) снова. Обозначим $N - r$ независимых решений через $(w_{s,1}, w_{s,2}, w_{s,3}, \dots, w_{s,N})$, $s = 1, 2, \dots, N - r$. Общее решение имеет вид

$$w_j = \sum_{s=1}^{N-r} c_s w_{s,j}. \quad (22)$$

Заметим, что коэффициенты c_s могут быть произвольными функциями от $\mathbf{k}$. Таким образом, если w_j – решение уравнения (6), то новая функция $w_j(\mathbf{k})g(\mathbf{k})$ также является решением. Отождествляя эту величину с $g_j = T_j^{-1}g$, получим

$$g^{-1}(\mathbf{k})T_j^{-1}g(\mathbf{k}) = w_j(\mathbf{k}), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

Таким образом, условия (13) автоматически удовлетворяются, если векторное поле $w_j(\mathbf{k})$ – решение линейаризованной задачи – является чистой калибровкой, т.е. если $w_j(\mathbf{k})$ имеет вид (23). Простейший пример такого рода соответствует постоянным w_j . Тогда мы получим

$$g(\mathbf{k}) = c \prod_{l=1}^N w_l^{-k_l}, \quad (24)$$

где c – константа.

4. ЦЕПОЧКА РЕШЕНИЙ, НАЧИНАЮЩАЯСЯ С $f = 1$

В этом разделе ищется цепочка решений в случае, если

$$f^{(1)} = 1 \quad (25)$$

является решением уравнения

$$\det G(f^{(1)}) = 0. \quad (26)$$

Подставляя функцию $f^{(1)} = 1$ в эту формулу, получим

$$\det(\alpha_{ij}) = 0. \quad (27)$$

Обратно, если α_{ij} удовлетворяют уравнению (27), то $f^{(1)} = 1$ является решением уравнения $\det G(f^{(1)}) = 0$.

Если r – ранг матрицы $\{\alpha_{ij}\}$, то система

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} g_j^{(1)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (28)$$

имеет $N - r$ независимых решений, которые будут обозначаться $\text{Let}(w_{s,1}^{(1)}, w_{s,2}^{(1)}, w_{s,3}^{(1)}, \dots, w_{s,N}^{(1)})$, $s = 1, 2, \dots, N - r$. Тогда общее решение записывается следующим образом:

$$w_j^{(1)} = \sum_{s=1}^{N-r} c_s w_{s,j}^{(1)}. \quad (29)$$

Поскольку коэффициенты α_{ij} постоянны, $w_{s,j}$ также не зависят от $\mathbf{k}$. В этом случае в соответствии с формулой (24) условия (13) могут быть легко разрешены и функция $g^{(1)}$ примет вид

$$g^{(1)} = c \prod_{l=1}^N (w_l^{(1)})^{-k_l}. \quad (30)$$

С помощью явного вида $w_{s,j}^{(1)}$ решение может быть также записано в виде

$$g^{(1)} = \sum_{s=1}^{N-r} c_s \prod_{j=l}^N (w_{l,s}^{(1)})^{-k_l}. \quad (31)$$

Перейдем ко второму шагу преобразований Бэклунда. Используя представление (30), можно получить функцию $f_j^{(2)}$ как решение системы линейных уравнений

$$c \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} w_i^{(1)} w_j^{(1)} \prod_{l=1}^N (w_l^{(1)})^{-k_l} f_j^{(2)} = 0, \quad (32)$$

в то время как применяя (31), получим

$$\sum_{j=1}^N \left(\alpha_{ij} \sum_{s=1}^{N-r} c_s w_{s,i}^{(1)} w_{s,j}^{(1)} \prod_{l=1}^N (w_{s,l}^{(1)})^{-k_l} \right) f_j^{(2)} = 0. \quad (33)$$

Заметим, что $f_j^{(2)} = 1$, а потому $f^{(2)} = 1$ – решение системы (32). Это следует из того, что при $f^{(2)} = 1$ системы (32) и (33) эквивалентны системе уравнений

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} w_{s,j}^{(1)} = 0, \quad (34)$$

которая выполняется при любом i и s . Отсюда также следует, что $g^{(1)}$ удовлетворяет полилинейному уравнению

$$\det \tilde{G}(g^{(1)}) = 0, \quad (35)$$

поскольку (32) имеет по крайней мере одно решение.

В то же время условие $\det \tilde{G}(g^{(1)}) = 0$ предполагает существование других решений системы (32), которые могут быть получены с помощью общих методов линейной алгебры. Уравнение (32) эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} w_{s,j}^{(1)} f_j^{(2)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (36)$$

Заметим, что ранг матрицы $\{\alpha_{ij}w_j^{(1)}\}$ совпадает с рангом $\{\alpha_{ij}\}$. Решения могут быть легко получены из предыдущих решений $w_{s,j}^{(1)}$ простой подстановкой $\alpha_{ij}w_j^{(1)}$ вместо α_{ij} . Обозначим эти решения через $v_{s,j}^{(2)}$. Тогда общее решение примет вид

$$v_j^{(2)} = \sum_{s=1}^{N-r} c_s^{(2)} v_{s,j}^{(2)}, \quad (37)$$

где $c_s^{(2)}$ — произвольные константы, отличные от c_s .

Скалярная функция $f^{(2)}(\mathbf{k})$ тогда дается формулой

$$f^{(2)}(\mathbf{k}) = c \prod_{l=1}^N (v_l^{(2)})^{k_l}. \quad (38)$$

Ясно, что этот тип решений может быть последовательно получен повторением указанной процедуры на каждом шаге преобразований Бэклунда.

Если учесть то обстоятельство, что $f^{(2)} = 1$ есть решение системы (32), мы можем записать решение в виде

$$f^{(2)}(\mathbf{k}) = 1 + c \prod_{l=1}^N (v_l^{(2)})^{k_l}. \quad (39)$$

В качестве потенциала вместо (30) выбираем функцию (31). Тогда система (33) опять решается по отношению к вектор-функции $f_j^{(2)}$. Однако в этом случае остается неясным, можно ли разрешить условия связей (13).

5. ПРИМЕРЫ В СЛУЧАЕ $N = 6$

Рассмотрим частный случай $N = 6$. Коэффициенты α_{ij} в (1) и (2) предполагаются антисимметричными. В этом частном случае определители матриц G_{ij} и $\tilde{G}_{ij}$ становятся квадратами пфаффианов, а нелинейные уравнения на f и g — трилинейными уравнениями.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда

$$\alpha_{ij} = z_i - z_j. \quad (40)$$

Тогда $f^{(1)} = 1$ будет решением (9), поскольку $\det\{\alpha_{ij}\} = 0$. Ранг матрицы $\{\alpha_{ij}\}$ равен двум.

Общее решение системы

$$\sum_{j=1}^6 (\alpha_{ij} T_i f_j^{(1)}) g_j^{(1)} = 0 \quad (41)$$

— линейная комбинация следующих векторов:

$$\begin{pmatrix} 4z_3 - z_2 - z_4 - z_5 - z_6 \\ z_1 - z_3 \\ -4z_1 + z_2 + z_4 + z_5 + z_6 \\ z_1 - z_3 \\ z_1 - z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 - z_4 \\ 4z_4 - z_1 - z_3 - z_5 - z_6 \\ z_2 - z_4 \\ -4z_2 + z_1 + z_3 + z_5 + z_6 \\ z_2 - z_4 \\ z_2 - z_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_3 - z_5 \\ z_3 - z_5 \\ 4z_5 - z_1 - z_2 - z_4 - z_6 \\ z_3 - z_5 \\ -4z_3 + z_1 + z_2 + z_4 + z_6 \\ z_3 - z_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_4 - z_6 \\ z_4 - z_6 \\ z_4 - z_6 \\ 4z_6 - z_1 - z_2 - z_3 - z_5 \\ z_4 - z_6 \\ -4z_4 + z_1 + z_2 + z_3 + z_5 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Можно разрешить условия (13) и получить решение

$$g^{(1)} = \sum_{s=2,3,4,5} c_s \left(\sum_{l \neq s \pm 1} (z_{s+1} - z_l) \right)^{-k_{s-1}} \times$$

$$\times \left(\sum_{l \neq s \pm 1} (z_l - z_{s-1}) \right)^{-k_{s+1}} \prod_{j \neq s \pm 1} (z_{s-1} - z_{s+1})^{-k_j}, \quad (43)$$

в котором c_s — постоянные величины.

Чтобы найти решения для второго поколения преобразований Бэклунда, предположим, например, что $c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Другими словами, мы берем только первый вектор из (42). Тогда линейное уравнение

$$\sum_{j=1}^6 (\alpha_{ij} T_i^{-1} T_j^{-1} g^{(1)}) f_j^{(2)} = 0 \quad (44)$$

имеет решения

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (z_3 - z_4)(4z_1 - z_2 - z_4 - z_5 - z_6) \\ (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \\ (z_2 - z_3)(4z_1 - z_2 - z_4 - z_5 - z_6) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \\ (z_4 - z_1)(4z_3 - z_2 - z_4 - z_5 - z_6) \\ 0 \\ (z_1 - z_2)(4z_3 - z_2 - z_4 - z_5 - z_6) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (z_1 - z_3)(z_4 - z_6) \\ 0 \\ (z_1 - z_3)(z_6 - z_2) \\ 0 \\ (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (z_1 - z_3)(z_4 - z_5) \\ 0 \\ (z_1 - z_3)(z_5 - z_2) \\ (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Функция $f^{(2)}(\mathbf{k})$, в которой условие связи (13) уже разрешено, имеет вид

$$f^{(2)}(\mathbf{k}) = 1 + \prod_{l=1}^6 \left(\sum_{s=1}^4 c_s (v_{l,s}^{(2)}) \right)^{k_l}, \quad (46)$$

где $v_{l,s}^{(2)}$ – компоненты векторов из формулы (45).

Пример 2. Пусть

$$\alpha_{ij} = (-1)^{j-i} \prod_{k < l \neq i,j} (z_k - z_l), \quad \alpha_{ji} = -\alpha_{ij}, \quad j > i. \quad (47)$$

Поскольку выполнено равенство $\det\{\alpha_{ij}\} = 0$, то $f^{(1)} = 1$ является решением (9). Решения

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_{ij} g_j^{(1)} = 0 \quad (48)$$

– это линейные комбинации векторов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \\ z_4^2 \\ z_5^2 \\ z_6^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1^3 \\ z_2^3 \\ z_3^3 \\ z_4^3 \\ z_5^3 \\ z_6^3 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

следовательно,

$$g^{(1)} = 1 + c_1 \prod_{j=1}^6 z_j^{-k_j} + c_2 \prod_{j=1}^6 z_j^{-2k_j} + c_3 \prod_{j=1}^6 z_j^{-3k_j} \quad (50)$$

является решением²⁾ шестимерного трилинейного уравнения (10). Подставляя в (50) величины $c_1 = c_2 = 0$, получим

$$g^{(1)}(\mathbf{k}) = 1 + c_3 \prod_{l=1}^6 z_l^{-3k_l}, \quad (51)$$

$$T_i^{-1} T_j^{-1} g^{(1)}(\mathbf{k}) = 1 + c_3 (z_i z_j)^3 \prod_{l=1}^6 z_l^{-3k_l}. \quad (52)$$

Если α_{ij} дается формулой (47), то решения системы

$$\sum_j \tilde{G}_{ij} (g^{(1)}) f_j^{(2)} = 0$$

²⁾ Это решение найдено Шинзавой [12].

имеют вид

$$\begin{pmatrix} s_{14}(z_1 - z_4) \\ s_{24}(z_2 - z_4) \\ s_{34}(z_3 - z_4) \\ 0 \\ s_{45}(z_5 - z_4) \\ s_{46}(z_6 - z_4) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_{13}(z_1 - z_3) \\ s_{23}(z_2 - z_3) \\ 0 \\ s_{43}(z_4 - z_3) \\ s_{53}(z_5 - z_3) \\ s_{63}(z_6 - z_3) \end{pmatrix}, \quad s_{ij} := \sum_{l < m \neq i, j} z_l z_m. \quad (53)$$

Решение $f^{(2)}(\mathbf{k})$, которое удовлетворяет условиям связей (13), дается следующей формулой:

$$f^{(2)}(\mathbf{k}) = 1 + \prod_{l=1}^6 v_l^{k_l}, \quad (54)$$

где v_l — l -я компонента вектора, построенного как произвольная линейная комбинация векторов (53). Единица добавлена, поскольку она является явным решением уравнения

$$\sum_j \tilde{G}_{ij}(g^{(1)}) f_j^{(2)} = 0.$$

Полагая $c_2 = c_3 = 0$ в (50), получаем

$$\begin{pmatrix} c_{23}\alpha_{23} \\ c_{31}\alpha_{31} \\ c_{12}\alpha_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{24}\alpha_{24} \\ c_{41}\alpha_{41} \\ 0 \\ c_{12}\alpha_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{25}\alpha_{25} \\ c_{51}\alpha_{51} \\ 0 \\ 0 \\ c_{12}\alpha_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{26}\alpha_{26} \\ c_{61}\alpha_{61} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{12}\alpha_{12} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

где

$$c_{ij}(\mathbf{k}) := 1 + c_1 z_i z_j \prod_{l=1}^6 z_l^{-k_l}. \quad (56)$$

Благодарности. Я признателен профессору И. Корепанову за приглашение на конференцию и за очень теплый прием, оказанный в течение всего моего визита в Россию. Я также благодарен Н. Шинзаве за обсуждения. Работа частично поддержана Grant-in-Aid for General Scientific Research Министерства образования, науки, спорта и культуры Японии (грант № 10640278).

Список литературы

- [1] *R. Hirota*. J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3785.
- [2] *T. Miwa*. Proc. Jap. Acad. A. 1982. V. 58. P. 9.
- [3] *J. D. Fay*. Theta Functions on Riemann Surfaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1973.
- [4] *A. Doliwa*. Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 187; P. 192; *A. Doliwa, P. M. Santini, M. Manas*. Transformations of quadrilateral lattices, solv-int/9712017; *A. Doliwa, M. Manas, L. M. Alonso, E. Medina, P. M. Santini*. Charged free fermions, vertex operators and classical theory of conjugate nets, solv-int/9803015.
- [5] *S. Saito*. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1798; *K. Sogo*. J. Phys. Soc. Japan. 1987. V. 56. P. 2291.
- [6] *I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 188. P. 267.
- [7] *S. Saito, N. Saitoh, H. Konuma, K. Yoshida*. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 6951.
- [8] *R. M. Kashaev, I. G. Korepanov, S. M. Sergeev*. Functional Tetrahedron Equation, solv-int/9801015.
- [9] *N. Shinzawa, S. Saito*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 4533.
- [10] *J. Matsukidaira, J. Satsuma, W. Strampp*. Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 467; *B. Grammaticos, A. Ramani, J. Hietarinta*. Phys. Lett. A. 1994. V. 190. P. 65; *J. Hietarinta, B. Grammaticos, A. Ramani*. Integrable Trilinear PDE's. In: NEEDS '94'. Ed. V.G. Makhankov et al. Singapore: World Scientific, 1995. P. 54; *Y. Billig, G. Misiolek*. Exact Solutions of Trilinear Hirota Equations. Nortre Dame Univ. preprint.
- [11] *S. Saito, N. Saitoh*. J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1052.
- [12] *N. Shinzawa*. An extension of discrete integrable systems to higher dimensions. Master thesis (in Japanese). Tokyo: Tokyo Metropolitan Univ., 1998.