Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Фернандес, Ч. М. Наон, Процессы рассеяния назад и UMKLAPP-рассеяния для одномерных бесспиновых фермионов в формулировке интеграла по путям, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 3, 488–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:29:36

© 1999 г.

В. И. Фернандес*, Ч. М. Наон†

ПРОЦЕССЫ РАССЕЯНИЯ НАЗАД И UМKЛАРР-РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ БЕССПИНОВЫХ ФЕРМИОНОВ В ФОРМУЛИРОВКЕ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ

Рассмотрена $(1+1)$ -мерная фермионная квантовая теория поля с нелокальным взаимодействием между токами. Эта модель описывает ансамбль бесспиновых фермионов, взаимодействующих посредством процессов рассеяния назад и вперед и процесса рассеяния UМKЛАРР. Функционал перехода вакуум–вакуум удастся выразить через нетривиальный фермионный детерминант. Используя методы функционального интегрирования, мы нашли бозонное представление для этого детерминанта и соответствующее эффективное действие, зависящее от трех скалярных полей, два из которых отвечают физическим коллективным возбуждениям, а третье – вспомогательное поле, по которому можно проинтегрировать с помощью техники приближений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интерес к маломерным полевым теориям переживает очередной всплеск, связанный, в частности, с исследованием одномерного фермионного газа, которое имеет прямое отношение к промышленному производству так называемых квантовых проводов [1]. Одно из наиболее интересных свойств таких систем – это возможность поведения, отличного от поведения типа жидкости Ферми. Это явление было систематически исследовано Халдейном в работе [2], который предложил термин “жидкость Люттингера”, чтобы выделить это новое физическое состояние, в котором поверхность Ферми исчезает и спектр содержит только коллективные возбуждения. Вероятно, наиболее простая модель, проявляющая такие свойства, – это модель Томонаги–Люттингера [3], являющаяся многочастичной системой право- и леводвигающихся частиц, взаимодействующих через их плотности зарядов. В работе [4] был предложен альтернативный теоретико-полевой подход к этой проблеме. В этом подходе вводятся нелокальное нековариантное обобщение модели Тирринга [5, 6], в которой фермионные плотности и токи спариваются с помощью билакальных потенциалов, зависящих от

---

*Depto. de Física. Universidad Nacional de La Plata. CC 67, 1900 La Plata, Argentina.

†Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.

E-mail: naon@venus.fisica.unlp.edu.ar

расстояния. Эта нелокальная модель Тирринга (НМТ) содержит как частный случай модель Томонаги–Люттингера. Хотя НМТ и является мощным методом изучения одномерных многочастичных задач, ее применение к описанию квантовых проводов ограничено, поскольку в теории возмущений составляющие НМТ суть процессы рассеяния вперед (fs), которые дают главный вклад только при малом переданном импульсе. Следовательно, в своем настоящем виде НМТ дает лишь весьма грубое описание процессов установления равновесия и свойств переноса в жидкости Люттингера. В настоящей работе мы рассматриваем улучшенную версию НМТ, в которой учитываются процессы с большим переданным импульсом. Заметим, что наиболее интересные проявления этих процессов типа появления массовых щелей в спектрах нормальных мод характерны для случая теорий с частицами спина $1/2$, в данной работе для наглядности мы ограничиваемся бесспиновым случаем. В разделе 2 мы покажем, что преобразования, позволяющие выписать вакуумный функционал проблемы рассеяния вперед через фермионный детерминант, справедливы и в рамках НМТ даже с учетом процессов рассеяния назад (bs) [7] и процессов UMKLAPP (us) [8]. Мы находим фермионный детерминант специального вида, который напоминает детерминант, получаемый при исследовании методом функционального интеграла [9] массивных фермионов в размерности $1 + 1$ [10]. В разделе 3 мы опишем бозонное представление для этого фермионного детерминанта. Это, в свою очередь, позволяет получать полностью бозонизованное эффективное действие для рассматриваемой модели. Наконец, в разделе 4 кратко обсуждаются основные результаты нашего исследования.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Начнем исследование расширенной версии НМТ, включающей вклады от процессов рассеяния вперед, назад от процессов UMKLAPP. Следуя формулировке задачи, приведенной в работе [4], мы опишем эти взаимодействия через фермионную квантовую теорию поля (КТП) с евклидовым действием

$$S = S_0 + S_{fs} + S_{bs} + S_{us}, \quad (2.1)$$

где

$$S_0 = \int d^2x \bar{\Psi} i \partial \Psi \quad (2.2)$$

— невозмущенное действие, порождающее линейаризованное свободное соотношение дисперсии. Вклады от различных процессов рассеяния имеют вид

$$S_{fs} = -\frac{g^2}{2} \int d^2x d^2y (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)(x) V_{(\mu)}(x, y) (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)(y) \quad (2.3)$$

и

$$S_{bs} + S_{us} = -\frac{g'^2}{2} \int d^2x d^2y (\bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi)(x) U_{(\mu)}(x, y) (\bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi)(y), \quad (2.4)$$

где γ_μ – обычные двумерные матрицы Дирака, $\Gamma_0 = 1$ и $\Gamma_1 = \gamma_5$. По повторяющемуся индексу μ суммирования не проводится. Потенциалы спариваний $V_{(\mu)}$ и $U_{(\mu)}$ предполагаются зависящими лишь от расстояния $|x - y|$ и могут быть выражены в терминах сольемовской “g-ологии” [11] в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_{(0)}(x, y) &= \frac{1}{g^2}(g_2 + g_4)(x, y), \\ V_{(1)}(x, y) &= \frac{1}{g^2}(g_2 - g_4)(x, y); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} U_{(0)}(x, y) &= \frac{1}{g'^2}(g_3 + g_1)(x, y), \\ U_{(1)}(x, y) &= \frac{1}{g'^2}(g_3 - g_1)(x, y), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где g и g' – числовые константы, которые можно положить равными единице. Мы удерживаем их в ответах, для того чтобы было легче сравнивать наши результаты с результатами, полученными в обычной модели Тирринга, которая получается, если положить $g' = 0$ и $V_{(0)}(x, y) = V_{(1)}(x, y) = \delta^2(x - y)$. С другой стороны, в нековариантном пределе $g' = 0$, $V_{(1)}(x, y) = 0$ появится модель Томонаги–Люттингера [3].

Члены в действии, содержащие g_2 и g_4 , соответствуют событиям рассеяния вперед, при которых соответствующий переданный импульс мал. В процессах g_2 взаимодействуют левые и правые частицы, в то время как в процессах g_4 все четыре взаимодействующих электрона относятся к одной ветви. Процессы g_1 и g_3 , напротив, отвечают процессам рассеяния с большими переданными импульсами порядка $2k_F$ (bs) и $4k_F$ (us), соответственно. (Последний вклад значителен только, если зона наполовину заполнена.) Перейдем теперь к рассмотрению статистической суммы. В работе [4] член в действии, отвечающий вкладу рассеяния вперед, был записан в локальном виде:

$$S_{\text{fs}} = -\frac{g^2}{2} \int d^2x J_\mu K_\mu, \quad (2.7)$$

где J_μ – обычный фермионный ток, а K_μ – новый ток, задаваемый формулой

$$K_\mu(x) = \int d^2y V_{(\mu)}(x, y) J_\mu(y). \quad (2.8)$$

После введения функциональной дельта-функции и соответствующих вспомогательных бозонных полей мы запишем функциональное представление для статистической суммы Z в виде (детали см. в [4])

$$\begin{aligned} Z &= N \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\tilde{A}_\mu \mathcal{D}\tilde{B}_\mu \times \\ &\times \exp \left\{ - \int d^2x \left[\bar{\Psi} i \partial \Psi + \tilde{A}_\mu \tilde{B}_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} (\tilde{A}_\mu J_\mu + \tilde{B}_\mu K_\mu) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Задавая

$$\overline{B}_\mu(x) = \int d^2y V_{(\mu)}(y, x) \tilde{B}_\mu(y), \quad (2.10)$$

$$\tilde{B}_\mu(x) = \int d^2y b_{(\mu)}(y, x) \overline{B}_\mu(y), \quad (2.11)$$

где $b_{(\mu)}(y, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\int d^2y b_{(\mu)}(y, x) V_{(\mu)}(z, y) = \delta^2(x - z), \quad (2.12)$$

и вводя вспомогательные переменные

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{A}_\mu + \overline{B}_\mu), \quad (2.13)$$

$$B_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{A}_\mu - \overline{B}_\mu), \quad (2.14)$$

мы получим

$$Z = N \int \mathcal{D}\overline{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}B_\mu e^{-S(A, B) - S_{\text{bs}} - S_{\text{us}}} \exp \left\{ - \int d^2x \overline{\Psi} (i\partial - g\mathbf{A}) \Psi \right\}, \quad (2.15)$$

где

$$S(A, B) = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y b_{(\mu)}(x, y) [A_\mu(x) A_\mu(y) - B_\mu(x) B_\mu(y)]. \quad (2.16)$$

Якобиан замены $(\tilde{A}, \tilde{B}) \rightarrow (A, B)$ не зависит от полей и потому может быть отнесен к константе нормировки N . Более того, мы видим, что поле B полностью отщепилось как от поля A , так и от фермионного поля. Отсюда интересно восстановить статистическую сумму обычной ковариантной модели Тирринга ($b_{(0)}(y, x) = b_{(1)}(x, y) = \delta^2(x - y)$ и $g' = 0$) начиная с интеграла (2.15). Заметим, что B_μ описывает состояния с отрицательной метрикой, вклады от которых должны быть отфакторизованы и включены в N , если только нас интересует физически значимый ответ для Z . В функциональном подходе эта процедура идет в параллель с операторным подходом Клейбера [6], в котором использовалось гильбертово пространство с индефинитной метрикой. В дальнейшем мы рассматриваем лишь вклады поля A .

Тем самым при выключенных процессах рассеяния назад и UMKLAPP описанная процедура позволяет выразить Z через фермионный детерминант. Покажем теперь, что это возможно также и в случае, если учитываются процессы с большими переданными импульсами. Для этого напомним

$$S_{\text{bs}} + S_{\text{us}} = -\frac{g'^2}{2} \int d^2x L_\mu M_\mu, \quad (2.17)$$

где L_μ и M_μ – фермионные билинейные комбинации:

$$L_\mu(x) = \overline{\Psi}(x) \Gamma_\mu \Psi(x), \quad (2.18)$$

$$M_\mu(x) = \int d^2y U_{(\mu)}(x, y) L_\mu(y). \quad (2.19)$$

Таким образом, мы можем использовать ту же процедуру, что и раньше с L_μ и M_μ , играющими те же роли, что и поля J_μ и K_μ , соответственно. После устранения вновь появившихся состояний с отрицательной метрикой и отнесения их статистической суммы в нормировочный множитель мы получим

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}C_\mu \det(i\partial - g\mathbf{A} - g'\Gamma_\mu C_\mu) \exp\{-S[A] - S[C]\}, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} S[A_\mu] &= \frac{1}{2} \int d^2x d^2y A_\mu(x) b_{(\mu)} A_\mu(y), \\ S[C_\mu] &= \frac{1}{2} \int d^2x d^2y C_\mu(x) d_{(\mu)} C_\mu(y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

и

$$\int d^2y d_{(\mu)}(y, x) U_{(\mu)}(z, y) = \delta^2(x - z). \quad (2.22)$$

Это наш первый интересный результат: мы представили Z в виде фермионного детерминанта. Однако этот детерминант весьма нетривиален. На самом деле, вклад g' — это не только член типа массового (который диагонален в пространстве матриц Дирака), но этот член также зависит от вспомогательного поля $C_\mu(x)$. Мы рассматриваем этот детерминант ниже.

3. БОЗОНИЗАЦИЯ ДЕТЕРМИНАНТА

В настоящем разделе мы делаем киральное преобразование в фермионной мере функционального интегрирования и используем формальное разложение по g' , для того чтобы найти бозонизованное представление для фермионного детерминанта, найденного в предыдущем разделе. Сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\{g[\gamma_5 \Phi(x) - i\eta(x)]\} \chi(x), \\ \bar{\Psi}(x) &= \bar{\chi}(x) \exp\{g[\gamma_5 \Phi(x) + i\eta(x)]\}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi = J_F[\Phi, \eta] \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi, \quad (3.2)$$

где Φ и η — скалярные поля и $J_F[\Phi, \eta]$ — якобиан Фуджикавы [12], который отличен от единицы, поскольку (квантовая) мера интегрирования в функциональном интеграле неинвариантна при киральных преобразованиях. Как хорошо известно, после этого преобразования поле A_μ отщепляется от фермионных полей, если представить его в виде

$$A_\mu(x) = \partial_\mu \eta(x) + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi(x), \quad (3.3)$$

который также может интерпретироваться как бозонная замена переменных с постоянным, не зависящим от полей якобианом. В результате получим

$$\det(i\partial - g\mathbf{A} - g'\Gamma_\mu C_\mu) = J_F[\Phi, \eta] \det(i\partial - g'e^{2g\gamma_5\Phi}\Gamma_\mu C_\mu). \quad (3.4)$$

Чтобы вычислить фермионный якобиан, необходимо фиксировать процедуру регуляризации, что, в свою очередь, привносит дополнительную неопределенность (см., например, [13]). В настоящей работе, мы следуем предписанию работы [13], в которой физический ответ был получен для случая, когда присутствует только рассеяние вперед [4]. В нашем случае находим

$$J_F[\Phi, \eta] = \exp \left\{ \frac{g^2}{2\pi} \int d^2 x \Phi \partial_\mu \partial_\mu \Phi \right\}. \quad (3.5)$$

Статистическая сумма имеет при этом вид

$$Z = N' \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}C_\mu e^{-(S[\Phi, \eta] + S[C_\mu])} J_F[\Phi, \eta] \det(i\partial - g'e^{2g\gamma_5\Phi} \Gamma_\mu C_\mu), \quad (3.6)$$

где $S[\Phi, \eta]$ возникает при подстановке (3.3) в функционал $S[A_\mu]$ (см. уравнение (2.21)).

В полученных формулах фермионный детерминант может быть проанализирован по теории возмущений. В самом деле, рассматривая g' как параметр возмущения и используя фермионные поля χ и $\bar{\chi}$, определенные в (3.1), мы можем записать

$$Z_F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g'^n}{n!} \left\langle \prod_{j=1}^n \int d^2 x_j \bar{\chi}(x_j) \hat{C}(x_j) \chi(x_j) \right\rangle_0, \quad (3.7)$$

где мы ввели определения

$$Z_F = \det(i\partial - g'e^{2g\gamma_5\Phi} \Gamma_\mu C_\mu) \quad (3.8)$$

и

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_+ & 0 \\ 0 & C_- \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

с

$$\begin{aligned} C_+ &= (C_0 + C_1) e^{2g\Phi(x)}, \\ C_- &= (C_0 - C_1) e^{-2g\Phi(x)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рассматривая по отдельности каждый член разложения, мы можем сформулировать правило отбора, сходное с правилами отбора, получающимися при функциональном рассмотрении $(1+1)$ -мерной теории массивных фермионов с локальным [9] и нелокальным [14] взаимодействиями. В самом деле, т.к. $\langle \rangle_0$ — это вакуумное среднее по отношению к вакууму свободных безмассовых фермионов, то средние, отвечающие в формуле (3.7) членам с $n = 2k + 1$, обращаются в нуль. Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned} Z_F &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g'c\rho)^{2k}}{(k!)^2 (2\pi)^{2k}} \int \prod_{i=1}^k d^2 x_i d^2 y_i \prod_{i=1}^k (C_0(x_i) + C_1(x_i)) (C_0(y_i) - C_1(y_i)) \times \\ &\times \exp \left\{ 2g \sum_{i=1}^k (\Phi(x_i) - \Phi(y_i)) \right\} \frac{\prod_{i>j}^k ((c\rho)^2 |x_i - x_j| |y_i - y_j|)^2}{\prod_{i,j}^k (c\rho |x_i - y_j|)^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $c\rho$ – параметр нормального упорядочения.

Чтобы перейти к бозонному описанию проблемы, мы рассмотрим следующую бозонную лагранжеву плотность:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{\alpha_0}{2\beta^2}(m_+ e^{i\beta\varphi} + m_- e^{-i\beta\varphi}), \quad (3.12)$$

где β , $m_+(x)$ и $m_-(x)$ следует определить. Величина α_0 – константа, которую мы вводим для упрощения сравнения нашей процедуры с предыдущими работами по локальной бозонизации [9, 10]. При $m_+ = m_- = 1$ эта модель совпадает с известной моделью синус-Гордон, описывающей нейтральный кулоновский газ. Тогда α_0/β^2 – это не что иное, как соответствующий коэффициент затухания [15]. Рассмотрим теперь статистическую сумму

$$Z_B = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^2x \mathcal{L}_B \right\} \quad (3.13)$$

и разложим ее в формальный ряд по коэффициенту затухания. Анализ, справедливый в случае $m_+ = m_- = 1$ для каждого члена ряда, может быть непосредственно продолжен на случай, когда эти параметры не равны друг другу и не обязательно постоянны. В результате мы получим

$$\begin{aligned} Z_B = & \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l!)^2} \left(\frac{\alpha}{2\beta^2} \right)^{2l} \int \left(\prod_{i=1}^l d^2x_i d^2y_i \right) \left(\prod_{i=1}^l m_+(x_i) m_-(y_i) \right) \times \\ & \times \frac{\prod_{i>j}^l ((c\rho)^2 |x_i - x_j| |y_i - y_j|)^{\frac{1}{2\pi}\beta^2}}{\prod_{i,j}^l (c\rho |x_i - y_j|)^{\frac{1}{2\pi}\beta^2}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где мы ввели перенормированную величину α (напомним, что в корреляционных функциях в каждом порядке теории возмущений присутствуют инфракрасные и ультрафиолетовые сингулярности).

Сравнивая этот результат с уравнением (3.11), мы видим, что оба ряда совпадают, если выполнены следующие тождества:

$$\beta = \pm 2\sqrt{\pi}, \quad \alpha = g', \quad (3.15)$$

и

$$\begin{aligned} m_+(x_i) &= (C_0(x_i) + C_1(x_i)) e^{2g\Phi(x_i)}, \\ m_-(y_i) &= (C_0(y_i) - C_1(y_i)) e^{-2g\Phi(y_i)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Это наш второй результат. Мы нашли бозонное представление фермионного детерминанта (3.11), задаваемое формулой (3.13) вместе с тождествами (3.15) и (3.16). Подчеркнем, что уравнения (3.15) полностью аналогичны формулам бозонизации, полученным впервые Коулменом [10], в то время как уравнения (3.16) представляют собой новый результат, относящийся к конкретной решаемой проблеме.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В данной работе мы обобщили ранее предложенную НМТ, описывающую систему одномерных сильно коррелированных частиц, на случай, когда учитываются не только процесс рассеяния вперед, но и рассеяние назад вместе с UМKЛАРР-рассеянием. Мы выписали функционал перехода вакуум–вакуум в этой модели через нетривиальный фермионный детерминант (см. уравнение (3.11)). Основной результат – это бозонное представление для этого детерминанта (уравнения (3.13), (3.15) и (3.16)). Используя эти уравнения в (3.6), мы выразили статистическую сумму системы через пять скалярных полей: Φ , η , C_0 , C_1 и φ . Предыдущий опыт с моделью рассеяния вперед [4] показывает, что физические поля (описывающие коллективные возбуждения системы) суть Φ и η . Остальные поля – это вспомогательные переменные, которые следует отынтегрировать, для того чтобы провести последующий анализ физики нормальных мод. Гауссовы интегралы по C_0 и C_1 могут быть легко вычислены:

$$Z = N \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\varphi e^{-S_{\text{eff}}[\Phi, \eta, \varphi]}, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\Phi, \eta, \varphi] = & \frac{1}{2} \int d^2x d^2y (\partial_\mu \eta + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi)(x) b_{(\mu)}(x, y) (\partial_\mu \eta + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi)(y) + \\ & + \int d^2x \left[\frac{g^2}{2\pi} (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{g'}{2\pi} \right)^2 \int d^2x d^2y [f_\mu(x) U_{(\mu)}(x, y) f_\mu(y)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

и

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \text{ch}(2g\Phi + i\sqrt{4\pi}\varphi)(x), \\ f_1(x) &= \text{sh}(2g\Phi + i\sqrt{4\pi}\varphi)(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Анализ действия $S_{\text{eff}}[\Phi, \eta, \varphi]$ выходит за рамки настоящей статьи. Эта проблема исследуется в настоящее время методом седловой точки. Мы надеемся представить наши результаты в ближайшем будущем.

Благодарности. Эта работа была частично поддержана Национальным университетом Ла-Платы и Национальным советом научных и технических исследований CONICET (Аргентина). Ч. Наон благодарен Игорю Корепанову за приглашение принять участие во Второй международной конференции по точно решаемым моделям, состоявшейся в Челябинске, Россия, в августе 1998 г.

Список литературы

- [1] *J. Voit.* Rep. Progr. Phys. 1995. V. 58. P. 977.
- [2] *F. Haldane.* J. Phys. C. 1981. V. 14. P. 2585.
- [3] *S. Tomonaga.* Progr. Theor. Phys. 1950. V. 5. P. 544; *J. Luttinger.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1154; *E. Lieb, D. Mattis.* J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 304.
- [4] *C. M. Naón, M. C. von Reichenbach, M. L. Trobo.* Nucl. Phys. [FS] B. 1995. V. 435. P. 567; *D. G. Barci, C. M. Naón.* Int. J. Mod. Phys. A. 1998. V. 13. P. 1169; *M. V. Manías, C. M. Naón, M. L. Trobo.* Nucl. Phys. [FS] B. 1998. V. 525. P. 721.
- [5] *W. Thirring.* Ann. Phys. 1958. V. 3. P. 91; *B. E. Копенун.* ТМФ. 1979. Т. 41. С. 169.
- [6] *B. Klaiber.* The Tirring model. In: Lectures in Theoretical Physics. Proc. of Int. Conf. Held in Boulder, Colorado, USA, 1966. V. 10A. Eds A. Barut, W. Brittin. New York: Gordon and Breach, 1967. P. 141.
- [7] *A. Luther, V. J. Emery.* Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 589; *R. Heidenreich, B. Schroer, R. Seiler, D. A. Uhlenbrock.* Phys. Lett. A. 1975. V. 54. P. 119.
- [8] *V. J. Emery, A. Luther, I. Peschel.* Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 1272.
- [9] *C. Naón.* Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 2035.
- [10] *S. Coleman.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2088; *S. Coleman, R. Jackiw, L. Susskind.* Ann. Phys. (N. Y.). 1975. V. 93. P. 267.
- [11] *J. Sólyom.* Adv. in Phys. 1979. V. 28. P. 201.
- [12] *K. Fujikawa.* Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1195; Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2848.
- [13] *R. Jackiw, R. Rajaraman.* Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1219; V. 55. P. 224; *D. Cabra, F. Schaposnik.* J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 816.
- [14] *Kang Li, Carlos Naón.* J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 7929.
- [15] *S. Samuel.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 1916.