Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Погребков, М. К. Прати, Система Абловица–Ладика с дискретным потенциалом. I. Расширенная резольвента, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 20–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:48:35

© 1999 г.

А. К. Погребков*, М. К. Прати†

СИСТЕМА АБЛОВИЦА–ЛАДИКА С ДИСКРЕТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. I. РАСШИРЕННАЯ РЕЗОЛВЕНТА

Рассмотрена линейная система Абловица–Ладика, потенциалы которой принимают значения 0 и 1. Построен оператор расширенной резольвенты этой системы, и дано детальное описание его особенностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является построение спектральной теории оператора $L(w)$, заданного бесконечной матрицей

$$L_{m,n}(w) = \delta_{m,n-1} - \begin{pmatrix} w & r_n \\ s_n & 1/w \end{pmatrix} \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad w \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

каждый элемент которой представляет собой матрицу 2×2 , $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера, и мы опустили единичный 2×2 -матричный множитель при $\delta_{m,n-1}$. Мы рассматриваем здесь случай, когда оба потенциала r_n и s_n принимают значения 0 или 1:

$$r_n, s_n \in \{0, 1\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Более того, рассматриваемые здесь потенциалы обладают конечными носителями, иными словами, для каждого заданного потенциала существуют такие конечные k и K , $k \leq K$, что

$$r_n = s_n = 0, \quad n \leq k - 1, \quad n \geq K + 1, \quad k, K \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

так что их можно считать нижней и верхней границами носителя.

Соответствующая линейная задача

$$L(w)\Phi = 0 \quad (1.4)$$

является задачей Абловица–Ладика [1, 2], известной как дискретизация задачи Захарова–Шабата. И подобно последней задача Абловица–Ладика ассоциирована с многочисленными дифференциально-разностными интегрируемыми уравнениями, такими

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: pogreb@mi.ras.ru

† Scuola Normale Superiore di Pisa, INFN, Sezione di Pisa, ITALIA. E-mail: prati@sns.it

как дискретное модифицированное КдФ, разностное КдФ, цепочка Тоды и т.д. [3]. Задача (1.4) описывает также дискретные системы с неаналитическими дисперсионными соотношениями [4].

Известно также [5, 6], что система Абловица–Ладика ассоциирована с разностно-разностными уравнениями, которые описывают некоторый класс клеточных автоматов, т.е. динамических систем в дискретном пространстве-времени со значениями, принадлежащими некоторому конечному полю, скажем $\mathbb{F}_2$. Клеточные автоматы привлекают большое внимание ввиду широкого спектра их приложений в различных областях знания: от физики до биологии, от химии до общественных наук. Детальные ссылки на эти приложения можно найти в [7–11]. Клеточные автоматы также являются предметом интенсивного математического исследования, см., например, [12–22]. Именно такого рода приложения задачи (1.4) мотивировали конкретный выбор условий (1.2) на потенциал.

Исследование задачи (1.4), подобное проделанному в работе [3] в рамках метода обратной задачи рассеяния, сталкивается со специфической трудностью, которая становится более очевидной, если выписать это уравнение явно:

$$\Phi_{n+1} = \begin{pmatrix} w & r_n \\ s_n & 1/w \end{pmatrix} \Phi_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5)$$

В стандартном подходе к исследованию спектральных задач решения Йоста – основной объект теории – задаются своими асимптотиками при $n \rightarrow +\infty$ и $n \rightarrow -\infty$. Решение, заданное асимптотикой при $n \rightarrow -\infty$, последовательно строится слева направо по (1.5). Однако для того чтобы построить решение Йоста, заданное асимптотикой при $n \rightarrow +\infty$, следует обратить матрицу в правой части уравнения (1.5). Детерминант этой матрицы равен $1 - r_n s_n$, поэтому в стандартном подходе должно выполняться условие $r_n s_n \neq 1$. В случае, когда потенциал удовлетворяет (1.2), это означает, что для любого n или r_n , или s_n должно равняться нулю [6]. Такое условие резко сокращает класс потенциалов типа (1.2), поэтому нашей целью в этой и последующей публикациях является построение обобщения метода обратной задачи на случай, когда как r_n , так и s_n могут равняться 1. Подчеркнем также, что, накладывая условие (1.2) на потенциалы, мы не требуем здесь, чтобы $r_n, s_n \in \mathbb{Z}_2$. Как было предложено в [23], проблема интегрируемости клеточных автоматов или, более точно, проблема существования лаксова представления для них должна решаться в терминах равенств над $\mathbb{Z}$, а не в терминах равенств над тем или иным конечным полем.

Аналогия матрично-матричных и дифференциальных операторов L отражается в условии, что матричные элементы $L_{m,n}$ отличны от нуля лишь для равномерно ограниченных значений $|m-n|$. В случае оператора (1.1) мы имеем $1 \geq m-n \geq 0$. Это свойство позволяет применить к исследованию системы Абловица–Ладика резольвентный подход, предложенный в [24, 25]. Предварительные результаты нашего исследования были опубликованы в [26].

Резольвентный подход основан на следующем расширении ядра оператора $L(w)$:

$$L_{m,n}(w, h) = h^{n-m} L_{m,n}(w), \quad (1.6)$$

где h – вещественный неотрицательный параметр. В частности, для оператора (1.1) имеем

$$L_{m,n}(w, h) = h \delta_{m,n-1} - u_n(w) \delta_{m,n}, \quad (1.7)$$

где мы положили

$$u_n(w) = \begin{pmatrix} w & r_n \\ s_n & 1/w \end{pmatrix} \equiv w^\sigma + \begin{pmatrix} 0 & r_n \\ s_n & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

и σ – матрица Паули

$$\sigma = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если задан некоторый бесконечный матрично-матричный оператор $A_{m,n}(h)$, зависящий от параметра h , ему можно поставить в соответствие ряд Лорана

$$A(\zeta, \zeta', h) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \zeta^{-m} \zeta'^n A_{m,n}(h), \quad \zeta, \zeta' \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| = |\zeta'| = 1. \quad (1.9)$$

В дальнейшем мы рассматриваем такие матрицы $A_{m,n}(h)$, что ряд (1.9) сходится в смысле шварцевых обобщенных функций от ζ, ζ' ($|\zeta| = |\zeta'| = 1$) и h ($h \geq 0$). Элементы $A_{m,n}(h)$ восстанавливаются посредством формул

$$A_{m,n}(h) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta \zeta^{m-1}}{2\pi i} \oint_{|\zeta'|=1} \frac{d\zeta' \zeta'^{-n-1}}{2\pi i} A(\zeta, \zeta', h). \quad (1.10)$$

Чтобы пояснить смысл расширения (1.6), введем (обобщенную) функцию

$$A(\zeta, z) = A(\zeta e^{i \arg z}, e^{i \arg z}, |z|), \quad (1.11)$$

где $\zeta, z \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, так что из (1.6) и (1.9) мы получаем

$$A(\zeta, z) = \sum_{m,n} z^{n-m} \zeta^{-m} A_{m,n}. \quad (1.12)$$

Тогда отмеченная выше аналогия между матричными и дифференциальными операторами означает, что $A(\zeta, z)$ полиномиально зависит от z и z^{-1} . Отметим, что если имеются два объекта такого типа, A и B , то их произведение (композиция) определяется следующим образом:

$$(AB)_{m,n}(h) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_{m,l}(h) B_{l,n}(h), \quad (1.13)$$

$$(AB)(\zeta, \zeta'', h) = \oint_{|\zeta'|=1} \frac{d\zeta' \zeta'^{-n-1}}{2\pi i} A(\zeta, \zeta', h) B(\zeta', \zeta'', h), \quad (1.14)$$

$$(AB)(\zeta, z) = \oint_{|\zeta'|=1} \frac{d\zeta'}{2\pi i \zeta'} A(\zeta \overline{\zeta'}, z \zeta') B(\zeta', z), \quad (1.15)$$

где левые части этих равенств связаны посредством (1.9)–(1.12). Основным объектом нашего исследования – оператор $M(w)$, обратный к расширенному по (1.6) оператору $L(w)$,

$$L(w)M(w) = I, \quad M(w)L(w) = I, \quad (1.16)$$

где I – единичный оператор, матрица которого равна δ -символу. В матричных обозначениях первое равенство в силу (1.7) имеет вид

$$hM_{m+1,n}(w, h) = \delta_{m,n} + u_m(w)M_{m,n}(w, h). \quad (1.17)$$

Чтобы обеспечить единственность обратного оператора, мы введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение $M(w)$ уравнений (1.16) называется расширенной резольвентой оператора $L(w)$, если $M(w, \zeta, \zeta', h)$ – шварцева обобщенная функция по переменным ζ и ζ' и кусочно-непрерывная функция от h , $h \geq 0$.

Рассмотрим сначала случай нулевого потенциала, т.е. $r_n \equiv s_n \equiv 0$. Тогда резольвента, которую в этом случае мы обозначим $M_0(w)$, удовлетворяет следующему уравнению:

$$hM_{0,m+1,n}(w, h) = \delta_{m,n} + w^\sigma M_{0,m,n}(w, h). \quad (1.18)$$

Удобно переписать это уравнение, используя представление (1.12):

$$(\zeta z - w^\sigma) M_0(w, \zeta, z) = \delta_c(\zeta - 1), \quad (1.19)$$

где была введена δ -функция в точке $\zeta = 1$,

$$\delta_c(\zeta - 1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta^n, \quad (1.20)$$

так что для произвольной тест-функции $f(\zeta)$ на контуре выполняется

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{2\pi i} \delta_c(\zeta - 1) f(\zeta) = f(1). \quad (1.21)$$

Из (1.19) имеем $M_0(w, \zeta, z) = (\zeta z - w^\sigma)^{-1} \delta_c(\zeta - 1)$, откуда, используя (1.11), получаем

$$M_0(w, \zeta, \zeta', h) = (\zeta h - w^\sigma)^{-1} \delta_c(\zeta/\zeta' - 1), \quad (1.22)$$

или в силу (1.10)

$$M_{0,m,n}(w, h) = h^{n-m} w^{\sigma(m-n-1)} \left\{ \theta(h - |w^\sigma|) \theta(m \geq n+1) - \theta(|w^\sigma| - h) \theta(n \geq m) \right\}, \quad (1.23)$$

где мы ввели матрицы

$$\theta(h - |w^\sigma|) = \begin{pmatrix} \theta(h - |w|) & 0 \\ 0 & \theta(h - 1/|w|) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\theta(|w^\sigma| - h) = \begin{pmatrix} \theta(|w| - h) & 0 \\ 0 & \theta(1/|w| - h) \end{pmatrix}.$$

Здесь необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, очевидно, что $M_0(w, \zeta, \zeta', h)$ есть обобщенная функция по ζ и ζ' , кусочно-непрерывно зависящая от h . Таким образом, M_0 – действительно резольвента L_0 в смысле определения 1. Во-вторых, по (1.6) все выражения $h^{m-n} L_{m,n}(w, h)$ не зависят от h и равны $L_{m,n}(w)$, см. (1.1). Напротив, $h^{m-n} M_{0,m,n}(w, h)$ существенно зависят от h . В-третьих, каждое решение однородного уравнения $L_0(w)M_0(w) = 0$ пропорционально $\delta(h - |w^\sigma|)$, где матричная δ -функция определена по аналогии с (1.24). Итак, условие кусочной непрерывности по h , наложенное на $M_0(w, \zeta, \zeta', h)$ в определении 1, позволяет определить резольвенту $M_0(w)$ однозначно. Перейдем теперь к рассмотрению случая нетривиального потенциала, удовлетворяющего условиям (1.2) и (1.3).

2. РАСШИРЕННАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА

Как отмечалось при обсуждении уравнения (1.4), матрица $u_n(w)$ в (1.17) необратима при $r_n = s_n = 1$, что порождает специфические проблемы при исследовании этого уравнения. Поэтому необходимо ввести некоторую регуляризацию $u_n(w)$, скажем,

$$\begin{aligned} u_n(w) \rightarrow u_n(w, \lambda) &= \begin{pmatrix} (\lambda r_n s_n + 1)w & r_n \\ s_n & 1/w \end{pmatrix} = \\ &= \lambda(1 - \det u_n(w)) \frac{1 + \sigma}{2} + u_n(w). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Эта подстановка регуляризует сингулярные матрицы u_n (т.е. такие, что $\det u_n = 0$), оставляя регулярные нетронутыми. Действительно, по условию (1.2) $\det u_n$ равен либо 0, либо 1. Тогда

$$\det u_n(w, \lambda) = \begin{cases} 1, & \det u_n(w) = 1, \\ \lambda, & \det u_n(w) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Итак, мы начинаем с регуляризованного оператора

$$L_{m,n}(w, \lambda, h) = h\delta_{m,n-1} - u_m(w, \lambda)\delta_{m,n},$$

так что, используя (1.7) и (2.1), получаем

$$L(w, \lambda) = L(w) - \lambda D, \quad (2.3)$$

где введена диагональная матрица

$$D_{m,n} = \frac{1 + \sigma}{2} (1 - \det u_n) \delta_{m,n}. \quad (2.4)$$

Соответственно обозначим расширенную резольвенту регуляризованного оператора через $M(w, \lambda)$. Она удовлетворяет уравнениям (ср. (1.16))

$$L(w, \lambda)M(w, \lambda) = I, \quad M(w, \lambda)L(w, \lambda) = I, \quad (2.5)$$

которые посредством (2.3) могут быть записаны в виде

$$[L(w) - \lambda D]M(w, \lambda) = I, \quad (2.6)$$

$$M(w, \lambda)[L(w) - \lambda D] = I. \quad (2.7)$$

В следующем разделе мы рассмотрим предел $\lambda \rightarrow 0$ регуляризованной резольвенты $M(w, \lambda)$.

Пусть для простоты обозначений

$$\widetilde{M}_{m,n} = h^{m-n} M_{m,n}(w, \lambda, h), \quad (2.8)$$

т.е. мы временно опускаем зависимость от w , λ и h . Тогда (2.6) принимает вид

$$\widetilde{M}_{m+1,n} = \delta_{m,n} + u_m \widetilde{M}_{m,n}, \quad (2.9)$$

где зависимость u_m от w и λ также опущена. Легко проверить, что для всех $m \geq m'$ из (2.9) следует

$$\widetilde{M}_{m,n} = \theta(m \geq n+1)\theta(n \geq m') \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l + \left(\prod_{l=m'}^{\overleftarrow{m-1}} u_l \right) \widetilde{M}_{m',n}, \quad (2.10)$$

где мы ввели обозначение

$$\theta(m \geq n) = \begin{cases} 1, & m \geq n, \\ 0, & n \geq m+1, \end{cases} \quad (2.11)$$

и упорядоченное произведение матриц

$$\prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l = \begin{cases} u_{m-1}u_{m-2} \cdots u_{n+1}, & m \geq n+2, \\ 1, & m = n+1. \end{cases} \quad (2.12)$$

В силу (1.3), (1.8) и (2.1)

$$u_n = u = w^\sigma, \quad n \leq k-1, \quad n \geq K+1, \quad (2.13)$$

т.е. u — диагональная матрица, не зависящая от параметра регуляризации λ . Положим сначала $m \leq k$. Тогда исходя из соотношений (2.13) уравнение (2.10) можно переписать следующим образом:

$$u^{-m} \widetilde{M}_{m,n} - \theta(m \geq n+1)u^{-n-1} = u^{-m'} \widetilde{M}_{m',n} - \theta(m' \geq n+1)u^{-n-1}.$$

Мы видим, что обе части этого равенства не зависят ни от m , ни от m' . Обозначая их через F_n , получаем

$$\widetilde{M}_{m,n} = \theta(m \geq n+1)u^{m-n-1} + u^m F_n, \quad m \leq k. \quad (2.14)$$

Положим теперь в уравнении (2.10) $m' = k$ и заменим $\widetilde{M}_{k,n}$ в правой части (2.10) его значением из (2.14). Получим

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{m,n} &= \theta(m \geq n+1)\theta(n \geq k) \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l + \\ &+ \theta(k \geq n+1) \left(\prod_{l=k}^{\overleftarrow{m-1}} u_l \right) u^{k-n-1} + \left(\prod_{l=k}^{\overleftarrow{m-1}} u_l \right) u^k F_n, \end{aligned}$$

где $m \geq k$. Тогда во втором слагаемом также выполняется условие $m \geq n+1$, так что, принимая во внимание (1.3), имеем

$$\widetilde{M}_{m,n} = \theta(m \geq n+1) \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l + \left(\prod_{l=k}^{\overleftarrow{m-1}} u_l \right) u^k F_n, \quad m \geq k. \quad (2.15)$$

Равенства (2.14) и (2.15) дают общее решение уравнения (1.17) при произвольных F_n и $m \leq k$ или $m \geq k+1$, соответственно. Чтобы фиксировать решение, воспользуемся определением 1. Прежде всего необходимо обеспечить сходимость при любом n ряда

$$\sum_m \zeta^{-m} M_{m,n} = \sum_m (h\zeta)^{-m} \widetilde{M}_{m,n}$$

(см. (2.8)). Рассмотрим сумму от $-\infty$ до k . По (2.14) сумма первых слагаемых конечна благодаря θ -функции. Сумма вторых слагаемых в (2.14) равняется (с точностью до постоянного множителя)

$$\sum_{m=-\infty}^k u^m (h\zeta)^{-m} F_n.$$

В силу (2.13) этот ряд сходится тогда и только тогда, когда первая (вторая) строка матрицы F_n равна нулю при $|w| < h$ (соответственно $1/|w| < h$). Итак, условие сходимости этого ряда можно записать в виде

$$\theta(h - |w|^\sigma) F_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

где матричная θ -функция определена в (1.24). Рассмотрим теперь сходимость ряда $\sum_m \zeta^{-m} M_{m,n}$ на плюс бесконечности. С этой целью запишем равенство (2.15) при $m \geq K+1$ (см. (1.3) и (2.13)):

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{m,n} = u^{m-1} & \left\{ \theta(n \geq K) u^{-n} + \theta(K \geq n+1) u^{-K} \overleftarrow{\prod_{l=n+1}^K} u_l + \right. \\ & \left. + u^{-K} \left(\overleftarrow{\prod_{l=k}^K} u_l \right) u^k F_n \right\} - \theta(n \geq m) u^{m-n-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В соответствии с соотношением (2.8) ряд

$$\sum_{m=K+1}^{\infty} (h\zeta)^{-m} \widetilde{M}_{m,n}$$

должен сходиться. Сумма последних членов конечна благодаря θ -функции, а сумма первых членов сходится тогда и только тогда, когда

$$\theta(|u| - h) \left\{ \theta(n \geq K) u^{-n} + \theta(K \geq n+1) u^{-K} \overleftarrow{\prod_{l=n+1}^K} u_l + u^{-K} \left(\overleftarrow{\prod_{l=k}^K} u_l \right) u^k F_n \right\} = 0. \quad (2.18)$$

Условия (2.16) и (2.18) определяют F_n однозначно. Чтобы получить выражение для F_n в явном виде, нам потребуются следующие обозначения. Пусть

$$x_m(w, \lambda) = \theta(m \geq k+1) \left(\overleftarrow{\prod_{l=k}^{m-1}} u_l(w, \lambda) \right) w^{k\sigma} + \theta(k \geq m) w^{m\sigma} \quad (2.19)$$

и

$$y_n(w, \lambda) = \theta(n \geq K)w^{-n\sigma} + \theta(K \geq n+1)w^{-K\sigma} \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{K}} u_l(w, \lambda) \quad (2.20)$$

означают (бесконечные) матричные столбец и строку. Пусть также

$$X_m(w, \lambda, h) = h^{-m} x_m(w, \lambda), \quad Y_n(w, \lambda, h) = h^n y_n(w, \lambda) \quad (2.21)$$

и пусть a – постоянная (т.е. не зависящая от m и n) 2×2 -матрица,

$$a(w, \lambda) = w^{-K\sigma} \prod_{l=k}^{\overleftarrow{K}} u_l(w, \lambda) w^{k\sigma}. \quad (2.22)$$

Тогда, комбинируя (2.14) и (2.15), получаем

$$\widetilde{M}_{m,n} = \theta(m \geq n+1) \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l + x_m F_n, \quad (2.23)$$

а вместо (2.18) можно записать

$$\theta(|w^\sigma| - h) a F_n = -\theta(|w^\sigma| - h) y_n. \quad (2.24)$$

Рассмотрим по отдельности четыре области непрерывности матриц (1.24):

$$h > |w|, \quad h > 1/|w|, \quad (2.25)$$

$$|w| > h > 1/|w|, \quad (2.26)$$

$$1/|w| > h > |w|, \quad (2.27)$$

$$|w| > h, \quad 1/|w| > h. \quad (2.28)$$

В области (2.25) $\theta(h - |w^\sigma|) = 1$ и по (2.16) $F_n = 0$, так что (2.24) выполняется автоматически. Это означает, что в данной области

$$\widetilde{M}_{m,n} = \theta(m \geq n+1) \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l. \quad (2.29)$$

В области (2.26)

$$\theta(h - |w^\sigma|) = \frac{1-\sigma}{2}, \quad \frac{1-\sigma}{2} F_n = 0,$$

где было использовано (2.16), и по (2.24)

$$F_n = -\frac{1+\sigma}{2a_{1,1}} y_n. \quad (2.30)$$

Аналогично в области (2.27) имеем

$$F_n = -\frac{1-\sigma}{2a_{2,2}}y_n. \quad (2.31)$$

Наконец, в области (2.28) $\theta(h-|w^\sigma|) = 0$, так что (2.16) удовлетворяется тождественно, а (2.18) принимает вид

$$F_n = -a^{-1}y_n. \quad (2.32)$$

Таким образом, мы получаем

$$\widetilde{M}_{m,n} = \theta(m \geq n+1) \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l - x_m \Gamma y_n, \quad (2.33)$$

где введена не зависящая от m и n матрица

$$\Gamma = \begin{cases} 0, & h > |w| \text{ и } h > 1/|w|, \\ \frac{1+\sigma}{2a_{1,1}}, & |w| > h \text{ и } h > 1/|w|, \\ \frac{1-\sigma}{2a_{2,2}}, & h > |w| \text{ и } 1/|w| > h, \\ a^{-1}, & |w| > h \text{ и } 1/|w| > h. \end{cases} \quad (2.34)$$

Отметим, что вследствие (2.13) из равенств (2.20) и (2.32) вытекает

$$F_n = -\theta(n \geq k)w^{-k\sigma} \left(\prod_{l=k}^{\overleftarrow{n}} u_l \right)^{-1} - \theta(k \geq n+1)w^{-(n+1)\sigma}, \quad (2.35)$$

и тогда после ряда простых выкладок вместо (2.33) мы получаем, что в области (2.28)

$$\widetilde{M}_{m,n} = -\theta(n \geq m) \left(\prod_{l=m}^{\overleftarrow{n}} u_l \right)^{-1}. \quad (2.36)$$

Результаты предыдущих построений суммирует следующая

ТЕОРЕМА 1. *Расширенная резольвента $M(w, \lambda)$ регуляризованного по (2.1) оператора (1.7) существует, единственна и равна*

$$\begin{aligned} M_{m,n}(w, \lambda, h) = & h^{n-m} \theta(m \geq n+1) \prod_{l=n+1}^{\overleftarrow{m-1}} u_l(w, \lambda) - \\ & - X_m(w, \lambda) \Gamma(w, \lambda, h) Y_n(w, \lambda), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где X_m , Y_n и Γ даны в (2.19)–(2.21) и (2.34).

Для доказательства этой теоремы необходимо проверить, что в силу (2.8) двойной ряд

$$M(w, \lambda, \zeta, \zeta', h) = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \zeta^{-m} \zeta'^n M_{m, n}(w, \lambda, h) \quad (2.38)$$

сходится в смысле определения 1. Затем необходимо доказать, что (2.37) удовлетворяет обоим (регуляризованным) уравнениям (2.5).

Решение (2.37) по построению – единственное решение первого уравнения в (2.5), для которого сходится ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \zeta^{-m} M_{m, n}(w, \lambda, h).$$

Сходимость ряда по n , равно как и второе уравнение, доказываются аналогично. Оба эти уравнения легко получаются из (2.37), если заметить, что из (2.19) и (2.20) следует

$$x_{m+1}(w, \lambda) = u_m(w, \lambda) x_m(w, \lambda), \quad (2.39)$$

$$y_{m-1}(w, \lambda) = y_m(w, \lambda) u_m(w, \lambda). \quad (2.40)$$

Иными словами, x_m и y_n являются решениями регуляризованного по (2.1) уравнения (1.5) и его дуального. Посредством (2.21) эти уравнения можно записать как

$$L(w, \lambda) X(w, \lambda) = 0, \quad Y(w, \lambda) L(w, \lambda) = 0. \quad (2.41)$$

Мы видим, что формально X и Y суть правый и левый аннуляторы оператора L . Существование этих аннуляторов не противоречит (2.5), т.е. существованию оператора, обратного к L , поскольку оба ряда $\sum_m \zeta^{-m} X_m(w, \lambda, h)$ и $\sum_n \zeta^n Y_n(w, \lambda, h)$ расходятся, так что X и Y не принадлежат тому пространству, которому принадлежит резольвента в соответствии с определением 1. Использование таких величин можно избежать, если, скажем, в области $|w| > h$, $1/|w| > h$ вместо (2.37) воспользоваться равенством

$$M_{m, n} = -h^{n-m} \theta(n \geq m) \left(\prod_{l=m}^{\overleftarrow{n}} u_l(w, \lambda) \right)^{-1}, \quad (2.42)$$

которое следует из (2.8) и (2.36).

3. РАСШИРЕННАЯ РЕЗОЛВЕНТА ИСХОДНОГО ОПЕРАТОРА

Для того чтобы получить резольвенту расширенного исходного оператора (1.7), необходимо рассмотреть поведение регуляризованной резольвенты (2.37) в пределе $\lambda \rightarrow 0$. Существование этого предела зависит от областей (2.25)–(2.28). Действительно, единственным источником сингулярности в (2.37) является, как следует из (2.19) и (2.20), матрица Γ . В силу (2.22) ее пределы существуют в первых трех областях в (2.34). Пусть

$$a(w) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} a(w, \lambda) = w^{-K\sigma} \left(\prod_{l=k}^{\overleftarrow{K}} u_l(w) \right) w^{k\sigma}. \quad (3.1)$$

Эта величина конечна и для w в общем положении отлична от нуля. Нули $a_{1,1}(w)$ и $a_{2,2}(w)$, если они существуют в соответствующих областях, дают собственные значения оператора $L(w)$ и будут рассмотрены в последующей публикации.

В области (2.28) $a^{-1}(w, \lambda)$ имеет полюс при $\lambda = 0$, как следует из последней строки в (2.34). Чтобы описать кратность этого полюса, введем $q(m, n)$, $m \leq n$, — число вырожденных матриц $u_l(w)$ на интервале $[m, n]$, т.е.

$$q(m, n) = \sum_{l=m}^n (1 - \det u_l(w)), \quad (3.2)$$

что не зависит от w , поскольку $\det u_l(w)$ равен либо 0, либо 1. Пусть также

$$Q = q(k, K). \quad (3.3)$$

Тогда из соотношений (2.1) и (2.22) вытекает

$$a^{-1}(w, \lambda) = \frac{w^{-k\sigma}}{\lambda^Q} \left(\overrightarrow{\prod_{l=k}^K} \left[\lambda w (1 - \det u_l) \frac{1-\sigma}{2} + \tilde{u}_l(w) \right] \right) w^{K\sigma}. \quad (3.4)$$

Здесь мы ввели матрицы

$$\tilde{u}_l(w) = \begin{pmatrix} 1/w & -r_n \\ -s_n & w \end{pmatrix} \equiv w^{-\sigma} - \begin{pmatrix} 0 & r_n \\ s_n & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

являющиеся обратными к $u_n(w)$ в случае, когда $\det u_n = 1$ (ср. (1.8)). Из (3.4) следует, что a^{-1} имеет полюс в $\lambda = 0$ порядка Q , так что

$$a^{-1}(w, \lambda) = \sum_{j=0}^Q \frac{t^{(j)}(w)}{\lambda^j} + O(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Для вычетов $t^{(j)}(w)$ получаем

$$t^{(j)}(w) = w^{Q-k\sigma} \left(\overrightarrow{\prod_{l=k}^K} \tilde{u}_l(w) \right)^{(Q-j)} w^{K\sigma}, \quad (3.7)$$

где по определению

$$\left(\overrightarrow{\prod_{l=m}^n} \tilde{u}_l(w) \right)^{(j)} = \sum_{m \leq l_1 < \dots < l_j \leq n} \left(\prod_{i=1}^j (1 - \det u_{l_i}(w)) \right) \left[\overrightarrow{\prod_{l=m}^n} \tilde{u}_l(w) \right]_{\tilde{u}_{l_i} = \frac{1-\sigma}{2}, i=1, \dots, j} \quad (3.8)$$

для любых $m \leq n$.

Из обозначений (2.19)–(2.21) видно, что $X_m(w, \lambda)$ и $Y_n(w, \lambda)$ суть полиномы по λ , так что мы имеем ряд Лорана

$$M(w, \lambda, h) = \widehat{M}(w, \lambda, h) + \sum_{j=1}^Q \frac{M^{(j)}(w)}{\lambda^j}, \quad |w| > h \text{ и } 1/|w| > h, \quad (3.9)$$

где $\widehat{M}$ – регулярная часть ряда. Вычеты могут быть найдены явно из равенств (2.37) и (3.6), но для того чтобы работать с объектами, принадлежащими тому же пространству, что и резольвента (см. определение 1), естественно воспользоваться представлением (2.42). Тогда, пользуясь определениями (3.2) и (3.8), получаем

$$M_{m,n}^{(j)}(w, h) = -h^{n-m} \theta(n \geq m) \theta(q(m, n) \geq j) w^{q(m,n)-j} \left(\prod_{l=m}^{\overrightarrow{n}} \tilde{u}_l(w) \right)^{(q(m,n)-j)}. \quad (3.10)$$

Теперь резольвенту $M(w, h)$ исходного (расширенного) L -оператора (1.7) можно определить как

$$M(w, h) = \begin{cases} M(w, \lambda, h) |_{\lambda=0}, & h > |w| \text{ или } h > 1/|w|, \\ \widehat{M}(w, \lambda, h) |_{\lambda=0}, & |w| > h \text{ и } 1/|w| > h. \end{cases} \quad (3.11)$$

Рассмотрим область $|w| > h$, $1/|w| > h$ подробнее. Подставляя выражение (3.9) в равенства (2.6) и (2.7) и используя (3.11), получаем, что

$$L(w)M(w) = I + DM^{(1)}(w), \quad M(w)L(w) = I + M^{(1)}(w)D, \quad (3.12)$$

$$L(w)M^{(j)}(w) = I + DM^{(j+1)}(w), \quad (3.13)$$

$$M^{(j)}(w)L(w) = I + M^{(j+1)}(w)D, \quad j = 1, \dots, Q-1, \quad (3.14)$$

$$L(w)M^{(Q)}(w) = 0, \quad M^{(Q)}(w)L(w) = 0. \quad (3.15)$$

Итак, в этой области уравнения, определяющие резольвенту, модифицируются по сравнению со стандартными уравнениями (1.16). Это согласуется с результатами [26]: в данной области не существует решения уравнений (1.16).

Для того чтобы исследовать свойства вычетов $M^{(j)}$, можно воспользоваться тождеством Гильберта

$$M(w, \lambda')[L(w, \lambda') - L(w, \lambda)]M(w, \lambda) = M(w, \lambda) - M(w, \lambda'),$$

которое следует из (2.5). Принимая во внимание (2.6) и (2.7), его можно представить в виде

$$M(w, \lambda) - M(w, \lambda') = (\lambda' - \lambda)M(w, \lambda')DM(w, \lambda). \quad (3.16)$$

Подставляя $M(w, \lambda')$ в соответствии с (3.9), мы в пределе $\lambda' \rightarrow 0$ получаем, что

$$M(w, \lambda) - M(w) = [\lambda M(w) - M^{(1)}(w)]DM(w, \lambda), \quad (3.17)$$

$$M^{(j)}(w) = [M^{(j+1)}(w) - \lambda M^{(j)}(w)]DM(w, \lambda), \quad (3.18)$$

где $j = 1, \dots, Q$ и мы полагаем, что

$$M^{(Q+1)}(w) \equiv 0. \quad (3.19)$$

Подставим теперь разложение (3.11) в равенства (3.17) и (3.18). Тогда по формуле (3.17) в пределе $\lambda \rightarrow 0$ мы получаем, что

$$M^{(1)}(w)DM(w) = M(w)DM^{(1)}(w), \quad (3.20)$$

$$M^{(j)}(w) = M(w)DM^{(j+1)}(w) - M^{(1)}(w)DM^{(j)}(w), \quad (3.21)$$

$$j = 1, \dots, Q.$$

Далее, из (3.18) следует выражение

$$M^{(j)}(w) = M^{(j+1)}(w)DM(w) - M^{(j)}(w)DM^{(1)}(w), \quad (3.22)$$

симметричное по отношению к (3.21) и

$$M^{(j+1)}(w)DM^{(l)}(w) = M^{(j)}(w)DM^{(l+1)}(w), \quad (3.23)$$

$$M^{(j)}(w)D\widehat{M}(w, \lambda) = \frac{1}{\lambda}M^{(j+1)}(w)D[\widehat{M}(w, \lambda) - M(w)], \quad (3.24)$$

$$j, l = 1, \dots, Q,$$

где были использованы определения (3.11) и (3.19). Из (3.22) следует, что $M^{(Q)}(w) = -M^{(Q)}(w)DM^{(1)}(w)$, а из (3.24) — что $M^{(Q)}(w)D\widehat{M}(w, \lambda) = 0$, а значит, в силу (3.11) также и $M^{(Q)}(w)DM(w) = 0$. Отсюда при $j = Q - 1$ в (3.22) мы получаем, что $M^{(Q-1)}(w) = -M^{(Q-1)}(w)DM^{(1)}(w)$, а из (3.24) следует, что $M^{(Q-1)}(w)D\widehat{M}(w, \lambda) = 0$, так что снова $M^{(Q-1)}(w)DM(w) = 0$. Продолжая действовать таким образом, мы доказываем, что

$$M^{(j)}(w) = -M^{(j)}(w)DM^{(1)}(w), \quad (3.25)$$

$$M^{(j)}(w) = -M^{(1)}(w)DM^{(j)}(w), \quad (3.26)$$

и

$$M^{(j)}(w)DM(w) = 0, \quad M(w)DM^{(j)}(w) = 0, \quad j = 1, \dots, Q, \quad (3.27)$$

где (3.26) и второй набор равенств в (3.27) выводятся из (3.16) по аналогии с предыдущим, если поменять λ и λ' местами.

Далее, из соотношения (3.23) мы получаем, что

$$M^{(j)}(w)DM^{(l)}(w) = M^{(j-k)}(w)DM^{(l+k)}(w), \quad (3.28)$$

где $j, l = 1, \dots, Q$, $k \geq 0$, $j - k \geq 1$, $l + k \leq Q + 1$. Если j и l таковы, что $j - k \geq 1$ и $l + k = Q + 1$, т.е. $l + j \geq Q + 2$, то правая часть (3.28) обращается в ноль в силу (3.19). С другой стороны, если $l + j \leq Q + 1$, то можно в (3.28) выбрать $k = j - 1$, а тогда из (3.25) или (3.26) окончательно получаем соотношение

$$M^{(j)}(w)DM^{(l)}(w) = -\theta(Q + 1 \geq l + j)M^{(l+j-1)}(w), \quad j, l = 1, \dots, Q, \quad (3.29)$$

обобщающее (3.23), (3.25) и (3.26).

Это завершает построение резольвенты $M_{m,n}(w, h)$ расширенного L -оператора (1.7). Как мы видели, резольвента разрывна при $|w| = h$ и $|w| = 1/h$. В последующей работе мы покажем, что исследование этих разрывов приводит к модификации решений Йоста и спектральных данных, отвечающей случаю дискретного потенциала (1.2).

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 96-01-00344.

Список литературы

- [1] *M. J. Ablowitz, J. Ladik.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 598.
- [2] *M. J. Ablowitz, J. Ladik.* J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 1011.
- [3] *М. Абловиц, Х. Сугур.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [4] *M. Boiti, J. Leon, F. Pempinelli.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 2824.
- [5] *M. J. Ablowitz, J. M. Kaiser, L. A. Takhtajan.* Phys. Rev. A. 1990. V. 44. P. 6909.
- [6] *L. Takhtajan.* Integrable cellular automata and AKNS hierarchy. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations (CRM Proc. Lecture Notes. V. 9). Eds. D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz. Providence, RI: AMS, 1996.
- [7] Cellular Automata. Eds. D. Farmer, T. Toffoli and S. Wolfram. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [8] Theory and Application of the Cellular Automata. Ed. S. Wolfram. Singapore: World Scientific, 1986.
- [9] Cellular Automata and Modelling of the Complex Systems. Eds. P. Manneville, N. Boccara, G. Vichniac, R. Bidaux. Heidelberg: Springer, 1989.
- [10] Cellular Automata and Cooperative Phenomena. Eds. N. Boccara, E. Goles, S. Martínez, P. Palmerini. Dordrecht: Kluwer, 1993.
- [11] *S. Wolfram.* Cellular automata in condensed matter physics. In: Scaling Phenomena in Disordered Systems. Eds. R. Pynn, A. Skjeltorp. New York: Plenum, 1985.
- [12] *J. K. Park, K. Steiglitz, W. P. Thurston.* Physica D. 1986. V. 19. P. 423.
- [13] *T. S. Papatheodorou, M. J. Ablowitz, Y. G. Saridakis.* Stud. Appl. Math. 1988. V. 79. P. 173.
- [14] *T. S. Papatheodorou, A. S. Fokas.* Stud. Appl. Math. 1989. V. 80. P. 165.
- [15] *A. S. Fokas, E. P. Papadopoulou, Y. G. Saridakis, M. J. Ablowitz.* Stud. Appl. Math. 1989. V. 81. P. 153.
- [16] *A. S. Fokas, E. P. Papadopoulou, Y. G. Saridakis.* Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 369.
- [17] *D. Takahashi, J. Satsuma.* J. Phys. Soc. Japan. 1990. V. 59. P. 3514.
- [18] *M. Bruschi, P. M. Santini, O. Ragnisco.* Phys. Lett. A. 1992. V. 169. P. 151.
- [19] *A. Bobenko, M. Bordemann, C. Gunn, U. Pinkall.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 158. P. 127.
- [20] *D. Takahashi, J. Matsukidaira.* Phys. Lett. A. 1995. V. 209. P. 184.
- [21] *T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, J. Satsuma.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3247.
- [22] *J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, T. Torii.* Phys. Lett. A. 1997. V. 225. P. 287.
- [23] *A. Pogrebkov.* Discrete Schrödinger equation on finite field and associated cellular automaton; math-ph/981107.
- [24] *М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, М. К. Поливанов.* ТМФ. 1992. Т. 93. С. 181.
- [25] *М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков.* ТМФ. 1994. Т. 99. С. 185.
- [26] *A. K. Pogrebkov, M. C. Prati.* Nuovo Cimento B. 1996. V. 111. P. 1495.

Поступила в редакцию 23.XI.1998 г.