Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Вербус, А. П. Протогенов, Уравнения движения и сохраняющиеся величины в неабелевых дискретных интегрируемых моделях, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 34–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:31:46

© 1999 г. В. А. Вербус*, А. П. Протогенов†

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В НЕАБЕЛЕВЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ

Изучаются сохраняющиеся величины для билинейного разностного уравнения Хироты, которому удовлетворяют собственные значения трансфер-матрицы. Найдены комбинации собственных значений трансфер-матрицы, являющиеся интегралами движения для интегрируемых дискретных моделей с нулевыми и квазипериодическими граничными условиями для A_k-1 -алгебры. Получены также дискретные уравнения движения для неабелева обобщения модели Лиувилля и дискретный аналог уравнения Цицейко.

1. ВВЕДЕНИЕ

Термодинамический бете-анзац (БА) [1] является одним из основных методов изучения статистических свойств интегрируемых низкоразмерных систем. Его формулировка приводит к функциональным уравнениям [2–4], имеющим вид многомерных рекуррентных соотношений. Такие же по форме уравнения (но с отличающимися аналитическими свойствами решений) известны в теории нелинейных волн под названием уравнений Хироты. Из дискретных уравнений Хироты со спецификацией граничных условий при переходе к непрерывному пределу можно получить многие известные точно интегрируемые $(1+1)$ -уравнения. Проблема интегрируемости дискретных уравнений обсуждалась в недавних работах [5–11]. В работах [5–8, 12, 13] был достигнут существенный прогресс в применении метода БА для интегрируемых дискретных $(1+1)$ -систем с внутренними степенями свободы (см. также [14]). Оказалось, что дискретная временная переменная и переменная, отвечающая внутренним степеням свободы, равно как и дискретные быстроты, входят в уравнение Хироты в качестве аргументов искомой функции на равных правах. При этом переход к непрерывному пределу по времени сопровождается переходом к большим значениям спина [15].

Универсальность поведения рассматриваемой системы обусловлена несколькими причинами. Формулировка модели на решетке приводит к решениям [7], которые выражаются через эллиптические функции. Комплексификация параметров включает

* Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород, Россия

† Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

возможность рассмотрения квантово-групповой ситуации с параметром деформации, являющимся корнем из единицы [16, 17]. Различные значения сдвигов быстрот вдоль мнимой оси в искомым функциях дискретных уравнений приводят к различным функциональным уравнениям, возникающим в термодинамическом БА-подходе. В частном случае, когда значения быстрот гораздо больше значений этих сдвигов, мы приходим к рекуррентным соотношениям [18–20], возникающим в теории, которая включает в рассмотрение обобщенный принцип исключения состояний Халдейна [21].

В настоящей работе мы рассмотрим случай действительных сдвигов вдоль оси быстрот. Основная цель работы состоит в поиске сохраняющихся величин, следующих из анализа классического уравнения Хироты для нулевых и квазипериодических условий в случае A_{k-1} -алгебры. Интегралы движения полезны при нахождении решений уравнений БА. В качестве примера уравнений, для которых использование сохраняющихся величин является актуальной задачей, будут рассмотрены уравнения в дискретном и непрерывном пределах для $k = 3$. Общий подход при изучении интегралов движения для дискретной модели синус-Гордон использовался в работе [22]. Представление нулевой кривизны [23, 24] для классической дискретной модели синус-Гордон через R -матрицу изучалось в [25].

Настоящая работа организована следующим образом. Во втором разделе для полноты и последовательности изложения мы приводим основные выражения работ [13, 26]. Базируясь на этих уравнениях, мы выпишем дискретные уравнения движения для неабелева случая $k = 3$ при нулевых и квазипериодических граничных условиях. Здесь же приводится их вид в непрерывном пределе. Третий раздел посвящен анализу сохраняющихся величин в случае квазипериодических и нулевых граничных условий. В обсуждении мы анализируем вид решений для A_1 -алгебры и квазипериодических граничных условий.

2. УРАВНЕНИЕ ХИРОТЫ

Билинейное разностное уравнение Хироты может быть записано в различной форме. Одно из представлений этого уравнения для функции $\tau(n, l, m)$, зависящей от дискретных переменных n, l и m , имеет вид

$$\begin{aligned} &\alpha\tau(n, l+1, m)\tau(n, l, m+1) + \beta\tau(n, l, m)\tau(n, l+1, m+1) + \\ &+ \gamma\tau(n+1, l+1, m)\tau(n-1, l, m+1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На константы α, β, γ в этом уравнении наложена связь $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Вследствие большого набора симметрий уравнение (1) имеет бесконечное число интегралов движения, что является отражением его интегрируемости. Дальнейшая спецификация (1) осуществляется с помощью граничных условий, которые определяют соответствие с искомой моделью в непрерывном пределе. Различные способы реализации предельного перехода, сохраняя свойство интегрируемости, позволяют получить весь спектр солитонных

уравнений в непрерывном случае. Преобразование к функции $\tau_n(l, m)$:

$$\tau(n, l, m) = \frac{\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{n^2/2}}{\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{lm}} \tau_n(l, m), \quad (2)$$

устраняет произвольные константы α, β, γ в уравнении (1):

$$\begin{aligned} &\tau_n(l+1, m)\tau_n(l, m+1) - \tau_n(l, m)\tau_n(l+1, m+1) + \\ &+ \tau_{n+1}(l+1, m)\tau_{n-1}(l, m-1) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Замена переменных

$$\begin{aligned} a &= n, \quad s = l + m, \quad u = l - m - n, \\ \tau_n(l, m) &= T_{l+m}^n(l - m - n) = T_s^a(u) \end{aligned} \quad (4)$$

приводит к следующим билинейным функциональным соотношениям (выражающим правила слияния) для собственных значений $T_s^a(u)$ трансфер-матрицы интегрируемых решеточных моделей в случае A_{k-1} -алгебры:

$$T_s^a(u+1)T_s^a(u-1) - T_{s+1}^a(u)T_{s-1}^a(u) = T_s^{a+1}(u)T_s^{a-1}(u). \quad (5)$$

Дискретный индекс $a = 0, 1, \dots, k$ для A_{k-1} -алгебры и дискретное время s в этом уравнении являются соответственно длиной и высотой прямоугольной таблицы Юнга, которой соответствует собственное значение $T_s^a(u)$ трансфер-матрицы; в уравнении (5) u — дискретный спектральный параметр. Уравнение (5) сохраняет свой вид, если функцию $T_s^a(u)$ умножить на произведение четырех произвольных функций χ_i , зависящих от одного аргумента:

$$T_s^a(u) \rightarrow \chi_1(a+u+s)\chi_2(a-u+s)\chi_3(a+u-s)\chi_4(a-u-s)T_s^a(u). \quad (6)$$

Для функции

$$Y_s^a(u) = \frac{T_{s+1}^a(u)T_{s-1}^a(u)}{T_s^{a+1}(u)T_s^{a-1}(u)}, \quad (7)$$

инвариантной относительно преобразования (6), уравнение Хироты (5) имеет вид

$$Y_s^a(u+1)Y_s^a(u-1) = \frac{(1+Y_{s+1}^a(u))(1+Y_{s-1}^a(u))}{(1+(Y_s^{a+1}(u))^{-1})(1+(Y_s^{a-1}(u))^{-1})}. \quad (8)$$

Собственные значения $T_s^a(u)$ трансфер-матрицы, удовлетворяя уравнению (5) с определенными граничными условиями, характеризуются аналитическими свойствами решений, специфичными для рассматриваемой проблемы. Так, например, функциональные рекуррентные соотношения термодинамического БА [4], имея внешне аналогичный вид,

удовлетворяются функциями с иными аналитическими свойствами. Отличие в аналитических свойствах состоит в том, что для рекуррентных уравнений термодинамического БА сдвиг по быстрой оси u осуществляется по мнимой оси.

В наиболее антисимметричном представлении функция $T_s^a(u)$ – скаляр. Нулевые граничные условия для нее:

$$\begin{aligned} T_s^a(u) &= 0 \quad \text{для } a < 0 \text{ и } a > k, \\ T_s^k(u) &= \phi(u - s - k), \quad T_s^0(u) = \phi(u + s), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\phi(u) = \prod_{k=1}^N \sigma(\eta(u - y_k)),$$

σ – функция Вейерштрасса, y_k – ее корни, N – размер системы и η – параметр, приводят для A_1 -алгебры к дискретному уравнению Лиувилля [27]. В калибровочно-инвариантных переменных оно имеет вид

$$Y_s^a(u - 1)Y_s^a(u + 1) = (1 + Y_{s+1}^a(u))(1 + Y_{s-1}^a(u)) \quad (10)$$

с граничным условием $Y_0(u) = 0$. В непрерывном пределе при замене $Y_s^a(u) = \delta^{-2} \times \exp(-\phi(x, t))$, $n = x/\delta$, $s = t/\delta$ с $\delta \rightarrow 0$ уравнение (10) переходит в уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2e^\phi. \quad (11)$$

Квазипериодические граничные условия для функции $T_s^k(u)$

$$T_s^a(u) = e^\alpha \lambda^{-2a} T_{s+2}^a(u) \quad (12)$$

приводят [13] для калибровочно-инвариантной функции $X_s^a(u) = -\lambda(1 + Y_s^a(u))$ к дискретному уравнению синус-Гордон [28–30]

$$X_{s+1}^a(u)X_{s-1}^a(u) = \frac{(\lambda + X_s^a(u+1))(\lambda + X_s^a(u-1))}{(1 + \lambda X_s^a(u+1))(1 + \lambda X_s^a(u-1))}. \quad (13)$$

Вследствие граничного условия (12) между функциями $X_{s+1}^a(u)$ с различными значениями переменной a существует соотношение

$$X_s^a(u)X_s^{a+1}(u+1) = 1. \quad (14)$$

Рассмотрим дискретные уравнения движения для A_2 -алгебры при нулевых и квазипериодических граничных условиях, а также их непрерывный предел. Применение общего подхода работы [13] ведет в случае нулевых граничных условий для калибровочно-инвариантных функций $Y_s^a(u)$ с $a = 1, 2$ к следующей системе дискретных уравнений:

$$(1 + Y_s^2(u))Y_s^1(u+1)Y_s^1(u+1) = (1 + Y_{s+1}^1(u))(1 + Y_{s-1}^1(u))Y_s^2(u), \quad (15)$$

$$(1 + Y_s^1(u))Y_s^2(u+1)Y_s^2(u+1) = (1 + Y_{s+1}^2(u))(1 + Y_{s-1}^2(u))Y_s^1(u). \quad (16)$$

Так же как и при переходе от выражения (10) к (11), введем функции $\phi_l(x, t)$ с $l = 1, 2$, так что $Y_s^1(u) = \delta^{-2} \exp(-\phi_l(x, t))$. Пусть $u = x/\delta$, $s = t/\delta$. Тогда предельный переход $\delta \rightarrow 0$ дает неабелев аналог [31] уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 2e^{\phi_1} - e^{\phi_2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = 2e^{\phi_2} - e^{\phi_1}, \quad (18)$$

соответствующий $SU(3)$ -симметричному уравнению Тоды.

В случае неабелевой дискретной модели синус-Гордон квазипериодическое граничное условие (12) можно обобщить для A_{k-1} -алгебры следующим образом:

$$T_s^a(u) = e^\alpha \lambda^{-ka} T_s^{a+k}(u+k). \quad (19)$$

При этом функции $X_s^a(u)$ удовлетворяют соотношению

$$X_s^a(u) X_s^{a+1}(u+1) \dots X_s^{a+k-1}(u+k-1) = (-1)^k, \quad (20)$$

которое обобщает выражение (14).

Рассмотрим случай $k = 3$. Уравнение Хироты для калибровочно-инвариантных функций $X_s^1(u)$ A_2 -алгебры с граничными условиями (19) можно записать следующим образом:

$$(\lambda + X_s^2(u)) X_{s+1}^1(u) X_{s-1}^1(u) = \frac{(\lambda + X_s^1(u-1))(\lambda + X_s^1(u+1))}{(1 - \lambda X_s^1(u+1)) X_s^2(u+2)} X_s^2(u), \quad (21)$$

$$(\lambda + X_s^1(u)) X_{s+1}^2(u) X_{s-1}^2(u) = \frac{(\lambda + X_s^2(u-1))(\lambda + X_s^2(u+1))}{(1 - \lambda X_s^1(u-2)) X_s^2(u-1)} X_s^1(u). \quad (22)$$

Предельный переход к переменным непрерывного предела в этих уравнениях осуществим следующим образом. Будем считать, что $\lambda \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$, так что $s = t/\sqrt{\lambda}$ при фиксированном t . Аналогично пусть $\lambda \rightarrow 0$ и $u \rightarrow \infty$ с $u = x/\sqrt{\lambda}$ при постоянном x . После параметризации с помощью функции $X^l(x, t) = -\exp(-\phi_l(x, t))$ уравнения (21) и (22) переходят в непрерывном пределе в уравнения движения

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 2e^{\phi_1} - e^{\phi_2} - e^{-(\phi_1 + \phi_2)}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = 2e^{\phi_2} - e^{\phi_1} - e^{-(\phi_1 + \phi_2)}, \quad (24)$$

которые соответствуют $SU(3)$ -симметричному аффинному уравнению Тоды.

В непрерывном пределе уравнение (8) в случае произвольного значения k и для нулевых граничных условий переходит в уравнения движения цепочки Тоды:

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x^2} = \sum_{\beta=1}^{k-1} K_{\alpha\beta} e^{\phi_\beta}. \quad (25)$$

Для квазипериодических граничных условий непрерывный предел соответствует уравнениям движения аффинной цепочки Тоды:

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x^2} = \sum_{\beta=1}^{k-1} K_{\alpha\beta} e^{\phi_\beta} - \left(\sum_{\beta=1}^{k-1} K_{\alpha\beta} \right) \prod_{\beta=1}^{k-1} e^{-\phi_\beta}. \quad (26)$$

В выражениях (25) и (26) $K_{\alpha\beta}$ есть $(k-1) \times (k-1)$ -матрица Картана:

$$K_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathbf{0} & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Если в уравнениях (23), (24) положить $\phi = \phi_1 = \phi_2$, то мы получим уравнение Цицейко

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^\phi - e^{-2\phi}. \quad (28)$$

Дискретный аналог этого уравнения может быть получен из (21) или (22), если в этих уравнениях мы будем считать, что $X_s(u) = X_s^1(s) = X_s^2(u)$:

$$\frac{X_{s+1}(u)X_{s-1}(u)}{X_s(u)} = \frac{(\lambda + X_s(u-1))(\lambda + X_s(u+1))}{(1 - \lambda X_s(u-2)X_s(u-1))(\lambda + X_s(u))}, \quad (29)$$

$$\frac{X_{s+1}(u)X_{s-1}(u)}{X_s(u)} = \frac{(\lambda + X_s(u-1))(\lambda + X_s(u+1))}{(1 - \lambda X_s(u+2)X_s(u+1))(\lambda + X_s(u))}. \quad (30)$$

Таким образом, мы имеем два различных варианта дискретного уравнения Цицейко. Эти уравнения переходят друг в друга после замены $u \rightarrow -u$. Последнее означает, что в этих уравнениях нарушена симметрия относительно выбора направления движения. Симметричный вариант уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{X_s(u)}{X_{s+1}(u)X_{s-1}(u)} &= \\ &= \frac{(\lambda + X_s(u)) \left(1 - \frac{\lambda}{2} X_s(u-2)X_s(u-1) - \frac{\lambda}{2} X_s(u+2)X_s(u+1) \right)}{(\lambda + X_s(u-1))(\lambda + X_s(u+1))}. \end{aligned} \quad (31)$$

Другой вариант дискретного уравнения Цицейко был получен в геометрическом подходе в работе [32].

Можно сделать вывод, что уравнения (21) и (22) являются дискретными аналогами уравнений движения в $SU(3)$ -симметричной аффинной модели Тоды. Для изучения решений дискретных уравнений движения (15), (16) и (21), (22) с соответственно нулевыми (9) и квазипериодическими (19) граничными условиями необходимо найти интегралы движения. К этой проблеме мы обратимся в следующем разделе.

3. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Для изучения возможных типов движений интегралы движения, как известно, играют ключевую роль. В работе [13] интегралы движения для дискретной динамики были получены в случае A_1 -алгебры и нулевых граничных условий. Для A_k -алгебры и нулевых граничных условий было выписано также общее детерминантное представление интегралов движения. В этом разделе мы покажем, как получить интегралы движения для A_2 -алгебры из известных интегралов для A_1 -алгебры. Фактически мы на этом примере проиллюстрируем, как интегралы движения преобразуются в потоках Бэклунда. Кроме того, мы выпишем некоторые интегралы движения для квазипериодических граничных условий.

Мы будем исследовать уравнения линейной задачи, которые являются следствием калибровочных и дуальных преобразований на решетке [26] значений рассматриваемых переменных. Эти уравнения эквивалентны уравнениям, получающимся из условия нулевой кривизны [23, 24]. С использованием обозначений работы [26] уравнения линейной задачи записываются следующим образом:

$$g_n(l, m)\tau_n(l+1, m) - g_n(l+1, m)\tau_n(l, m) = c^{-1}g_{n-1}(l, m)\tau_{n+1}(l+1, m), \quad (32)$$

$$g_{n-1}(l, m)\tau_n(l, m+1) - g_{n-1}(l, m+1)\tau_n(l, m) = cg_n(l, m)\tau_{n-1}(l, m+1). \quad (33)$$

Здесь c – произвольная константа. При сравнении выражений (32), (33) с уравнениями линейной задачи работы [26] следует учесть преобразование (2) и соотношения $c_+c_- = -\gamma/\alpha$, $c_- = c$. Эти соотношения являются необходимым условием того, чтобы функции $g_n(l, m)$ также удовлетворяли уравнению Хироты. Обратные уравнения линейной задачи имеют вид

$$g_n(l, m)\tau_n(l-1, m) - g_n(l-1, m)\tau_n(l, m) = -c^{-1}g_{n-1}(l-1, m)\tau_{n+1}(l, m), \quad (34)$$

$$g_n(l, m)\tau_{n+1}(l, m-1) - g_n(l, m-1)\tau_{n+1}(l, m) = -cg_{n+1}(l, m-1)\tau_n(l, m). \quad (35)$$

В терминах функций $T_s^a(u)$ и $G_s^a(u)$ с учетом обозначений (4), когда $\tau_n(l, m) = T_{l+m}^n(l-m-n) = T_s^a(u)$ и $g_n(l, m) = G_{l+m}^n(l-m-n) = G_s^a(u)$, уравнения (32)–(35) записываются следующим образом. Для прямых уравнений линейной задачи имеем

$$G_s^a(u)T_{s+1}^a(u+1) - G_{s+1}^a(u+1)T_s^a(u) = c^{-1}G_s^{a-1}(u+1)T_{s+1}^{a+1}(u), \quad (36)$$

$$G_s^{a-1}(u+1)T_{s+1}^a(u-1) - G_{s+1}^{a-1}(u)T_s^a(u) = cG_s^a(u)T_{s+1}^{a-1}(u). \quad (37)$$

Аналогично обратные уравнения записываются так:

$$G_s^a(u)T_{s-1}^a(u-1) - G_{s-1}^a(u-1)T_s^a(u) = -c^{-1}G_{s-1}^{a-1}(u)T_s^{a+1}(u-1), \quad (38)$$

$$G_s^a(u)T_{s-1}^{a+1}(u) - G_{s-1}^a(u+1)T_s^{a+1}(u-1) = -cG_{s-1}^{a+1}(u)T_s^a(u). \quad (39)$$

Для того чтобы облегчить сравнение подходов и обозначений различных работ [13], мы выписали уравнения линейных задач, выразив входящие в них функции через собственные значения трансфер-матрицы, используемые в работе [13]. Уточним, что полная эквивалентность достигается при $c = -1$ и замене $s \rightarrow -s$.

Обратим внимание на симметрию пар уравнений (36), (37) и (38), (39). Из них видно, что при заменах $T_s^a(u) \rightarrow G_{-s}^{-a}(-u)$ и $G_s^a(u) \rightarrow T_{-s}^{-a}(-u)$ уравнения (36), (37) переходят в уравнения (38), (39).

В случае нулевых граничных условий (9) на функцию $T_s^a(u)$ таким же граничным условиям удовлетворяет и функция $G_s^a(u)$, но с меньшими на единицу возможными значениями a , т.е. k следует заменить на $(k-1)$. Это свойство является следствием преобразования Бэклунда $A_k \rightarrow A_{k-1}$. Оно было использовано в работе [13] для получения уравнения БА. Это преобразование для случая $k=3$ схематически может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & Q_1(u+s) & \bar{Q}_1(u-s) & 0 & & & \\ 0 & Q_2(u+s) & G_s^1(u) & \bar{Q}_2(u-s) & 0 & & \\ 0 & \phi(u+s) & T_s^1(u) & T_s^2(u) & \bar{\phi}(u-s) & 0. & \end{array} \quad (40)$$

Здесь $Q_\alpha(u)$ — некоторые граничные функции, выражающиеся через функции Вейерштрасса $\sigma(\eta u)$, $\bar{Q}_\alpha(u) = Q_\alpha(u - \alpha)$. Из граничного условия (9) также следует, что $Q_k(u) = \phi(u)$. Функции на каждом уровне удовлетворяют уравнению Хироты. Между двумя соседними уровнями существует связь, определяемая уравнениями линейной задачи. Случаю A_1 -алгебры соответствует функция $G_s^1(u)$. Записанные для нее уравнения линейной задачи позволяют получить интегралы движения, которые для u -динамики [13] имеют вид

$$I_1(s) = \frac{Q_2(s-2)G_{s-u+1}^1(u) + Q_2(s)G_{s-u-1}^1(u-2)}{G_{s-u}^1(u-1)}, \quad (41)$$

$$I_2(s) = \frac{\bar{Q}_2(s+2)G_{u-s+1}^1(u) + \bar{Q}_2(s)G_{u-s-1}^1(u+2)}{G_{u-s}^1(u+1)}. \quad (42)$$

Для A_2 -случая уравнение (36) линейной задачи при $a=1$ и $a=2$ может быть записано следующим образом:

$$Q_2(u+s)T_{s+1}^1(u) - Q_2(u+s+2)T_s^1(u-1) = c^{-1}G_{s+1}^1(u)\phi(u+s), \quad (43)$$

$$G_s^1(u)T_{s+1}^2(u) - G_{s+1}^1(u+2)T_s^2(u-1) = c^{-1}\bar{Q}_2(u-s-1)T_s^1(u). \quad (44)$$

Аналогично записывается уравнение (37):

$$G_s^1(u)T_{s+1}^1(u) - G_{s+1}^1(u-1)T_s^1(u) = cQ_2(u+s+1)T_s^2(u-1), \quad (45)$$

$$\bar{Q}_2(u-s)T_{s+1}^2(u-1) - \bar{Q}_2(u-s-2)T_s^2(u) = cG_{s+1}^1(u)\phi(u+s). \quad (46)$$

Выразив из (43) нужные значения $G_s^1(u)$ и подставив их в (41), получим первый интеграл движения

$$\begin{aligned} I_1(s) = \phi(s-2) & \left[\frac{Q_2(s-2) [T_{s-u+1}^1(u)Q_2(s) - T_{s-u}^1(u-1)Q_2(s+2)]}{\phi(s) [T_{s-u}^1(u-1)Q_2(s-2) - T_{s-u-1}^1(u-2)Q_2(s)]} + \right. \\ & \left. + \frac{Q_2(s) [T_{s-u-1}^1(u-2)Q_2(s-4) - T_{s-u-2}^1(u-3)Q_2(s-2)]}{\phi(s-4) [T_{s-u}^1(u-1)Q_2(s-2) - T_{s-u-1}^1(u-2)Q_2(s)]} \right]. \quad (47) \end{aligned}$$

Аналогично, выразив из (44) соответствующие значения $G_s^1(u)$ и подставив их в (42), получаем второй интеграл движения для u -динамики

$$I_2(s) = \phi(-s-2) \left[\frac{\overline{Q}_2(2-s) [T_{s+u+1}^2(u-1)\overline{Q}_2(-s) - T_{s+u}^2(u)\overline{Q}_2(-s-2)]}{\phi(s) [T_{s+u}^2(u)\overline{Q}_2(2-s) - T_{s+u-1}^2(u+1)\overline{Q}_2(-s)]} - \right. \\ \left. - \frac{\overline{Q}_2(-s) [T_{s+u-1}^2(u+1)\overline{Q}_2(4-s) - T_{s+u-2}^1(u+2)\overline{Q}_2(s-2)]}{\phi(s-4) [T_{s+u}^2(u)\overline{Q}_2(2-s) - T_{s+u-1}^2(u+1)\overline{Q}_2(-s)]} \right]. \quad (48)$$

Чтобы получить уравнения для s -динамики, необходимо использовать другую пару (44), (46) уравнений. Интегралы движения связаны с определенным видом (9) граничных условий. При этом один из них связан с граничным условием на левом конце отрезка $[0, k]$, а другой — на правом. Выбранный нами пример $k = 3$ иллюстрирует способ получения интегралов движения из интегралов движения для меньшего на единицу значения k .

Перейдем к рассмотрению квазипериодических граничных условий. Для того чтобы выполнялись уравнения (36), (37) и (38), (39), функция $G_s^a(u)$ в случае квазипериодических граничных условий (19) также должна удовлетворять тем же самым граничным условиям. Поэтому потоки Бэклунда в этом случае отсутствуют и перехода от алгебры A_k к алгебре A_{k-1} не происходит. Из условия, что две функции $T_s^a(u)$ и $G_s^a(u)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Хироты с одинаковыми граничными условиями, следует, что они пропорциональны друг другу. Соотношения между индексами этих функций определяются законом преобразования прямых уравнений (36), (37) линейной задачи в обратные (38), (39). Коэффициент пропорциональности должен оставлять инвариантным уравнение Хироты, т.е. должен совпадать с калибровочным преобразованием (6). Таким образом, можно записать

$$G_s^a(u) = \chi_1(a+u+s)\chi_2(a-u+s)\chi_3(a+u-s)\chi_4(a-u-s)T_{-s}^{-a}(-u). \quad (49)$$

Подставляя выражение (49) в формулы (36), (37), имеем

$$\frac{\chi_4(a-u-s)}{\chi_4(a-u-s-2)}T_{-s}^{-a}(-u)T_{s+1}^a(u+1) - \frac{\chi_1(a+u+s+2)}{\chi_1(a+u+s)}T_{-s-1}^{-a}(-u-1)T_s^a(u) = \\ = c^{-1} \frac{\chi_2(a-u+s-2)}{\chi_2(a-u+s)}T_{-s}^{-a+1}(-u-1)T_{s+1}^{a+1}(u), \quad (50)$$

$$\frac{\chi_2(a-u+s-2)}{\chi_2(a-u+s)}T_{-s}^{-a-1}(-u-1)T_{s+1}^a(u-1) - \frac{\chi_3(a+u-s-2)}{\chi_3(a+u-s)}T_{-s-1}^{-a+1}(-u)T_s^a(u) = \\ = c \frac{\chi_4(a-u-s)}{\chi_4(a-u-s-2)}T_{-s}^{-a}(-u)T_{s+1}^{a-1}(u). \quad (51)$$

Воспользуемся этой формой уравнений для получения интегралов движения. При этом мы учтем, что квазипериодические граничные условия ограничивают тип функций χ_1 и χ_3 . Они должны быть периодическими с периодом $2k$, в то время как функции χ_2

и χ_4 могут быть произвольными. Выделим из уравнений (50), (51) функции χ_1 и χ_3 , построив следующие соотношения:

$$\frac{\chi_1(a+u+s+2)}{\chi_1(a+u+s)} = \frac{\chi_4(a-u-s)T_{-s}^{-a}(-u)T_{s+1}^a(u+1)}{\chi_4(a-u-s-2)T_{-s-1}^{-a}(-u-1)T_s^a(u)} - c^{-1} \frac{\chi_2(a-u+s-2)T_{-s}^{-a+1}(-u-1)T_{s+1}^{a+1}(u)}{\chi_2(a-u+s)T_{-s-1}^{-a}(-u-1)T_s^a(u)}, \quad (52)$$

$$\frac{\chi_3(a+u-s-2)}{\chi_3(a+u-s)} = \frac{\chi_2(a-u+s-2)T_{-s}^{-a+1}(-u-1)T_{s+1}^a(u-1)}{\chi_2(a-u+s)T_{-s-1}^{-a+1}(-u)T_s^a(u)} - c \frac{\chi_4(a-u-s)T_{-s}^{-a}(-u)T_{s+1}^{a-1}(u)}{\chi_4(a-u-s-2)T_{-s-1}^{-a+1}(-u)T_s^a(u)}. \quad (53)$$

Из периодичности функций χ_1 и χ_3 следует, что правые части уравнений (52), (53) периодичны с периодом $2k$ относительно трех индексов. После замены $u \rightarrow u-s$ в (52) и замены $u \rightarrow u+s$ в (53) правые части этих уравнений не будут зависеть от времени s . Следовательно, правые части уравнений являются интегралами движения для s -динамики. Аналогично можно получить сохраняющиеся величины u -динамики, делая замены $s \rightarrow s-u$ в уравнении (52) и $s \rightarrow s+u$ в уравнении (53).

Для упрощения будем считать, что $\chi_2 = \chi_4 = 1$, и рассмотрим случай A_1 -алгебры. Для $a = 0$ и $a = 1$ из выражения (52) следуют две инвариантные комбинации функций:

$$\frac{\chi_1(u+s+2)}{\chi_1(u+s)} = \frac{T_{-s}^0(-u)T_{s+1}^0(u+1)}{T_{-s-1}^0(-u-1)T_s^0(u)} - c^{-1} \frac{T_{-s}^1(-u-1)T_{s+1}^1(u)}{T_{-s-1}^0(-u-1)T_s^0(u)}, \quad (54)$$

$$\frac{\chi_1(u+s+3)}{\chi_1(u+s+1)} = \frac{T_{-s}^1(-u+2)T_{s+1}^1(u+1)}{T_{-s-1}^1(-u+1)T_s^1(u)} - c^{-1} \frac{T_{-s}^0(-u-1)T_{s+1}^0(u-2)(\lambda e^\alpha)^2}{T_{-s-1}^1(-u+1)T_s^1(u)}. \quad (55)$$

Комбинации, составленные из функций χ_3 , которые следуют из (53), имеют вид

$$\frac{\chi_3(u-s-2)}{\chi_3(u-s)} = \frac{T_{-s}^1(-u-1)T_{s+1}^0(u-1)}{T_{-s-1}^1(-u)T_s^0(u)} - c \frac{T_{-s}^0(-u)T_{s+2}^1(u+2)}{T_{-s-1}^1(-u)T_s^0(u)}, \quad (56)$$

$$\frac{\chi_3(u-s-1)}{\chi_3(u-s+1)} = \frac{T_{-s}^0(-u-1)T_{s+1}^1(u-1)}{T_{-s-1}^0(-u)T_s^0(u)} - c \frac{T_{-s}^1(-u+2)T_{s+1}^0(u)}{T_{-s-1}^0(-u)T_s^0(u)}. \quad (57)$$

Из этих выражений непосредственно видно, что после замены $u \rightarrow u-s$ ($u \rightarrow u+s$) или $s \rightarrow s-u$ ($s \rightarrow s+u$) в уравнениях (54), (55) ((56), (57)) мы получаем в правых частях этих уравнений величины, не зависящие от s (от u) при изменении этих дискретных переменных.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Сохраняющиеся комбинации (54)–(57) функций $T_s^a(u)$ можно использовать при изучении дискретной динамики в модели синус-Гордон. В работе [5] для нахождения решений уравнения движения в дискретной модели синус-Гордон был применен метод БА. В случае A_1 -алгебры для функции

$$T_s^{0,1}(u) = A_s^{0,1} e^{\mu(s)u} \prod_{j=1}^N \sigma\left(\eta(u - z_j^{0,1}(s))\right), \quad (58)$$

где индекс a принимает значения $0, 1$; $\mu(s) = \mu_0 s + \mu_1$ (μ_0, μ_1 – произвольные константы), две функции $z_j^{0,1}(s)$ являются нулями функции Вейерштрасса и определяются решениями БА-уравнений

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^N \left(\frac{\sigma(\eta(z_i^1(s+1) - z_j^0(s+1) - 1))}{\sigma(\eta(z_i^1(s+1) - z_j^0(s+2) - 3))} \right) \left(\frac{\sigma(\eta(z_i^1(s) - z_j^1(s) + 1))}{\sigma(\eta(z_i^1(s+1) - z_j^1(s+1) + 1))} \right) \times \\ & \times \frac{\sigma(\eta(z_i^1(s+1) - z_j^0(s+2) - 2))}{\sigma(\eta(z_i^1(s+1) - z_j^0(s)))} = - \frac{A_s^0 A_{s+1}^1}{A_{s+1}^0 A_{s+1}^1}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^N \left(\frac{\sigma(\eta(z_i^0(s+1) - z_j^1(s+1) + 2))}{\sigma(\eta(z_i^0(s+1) - z_j^1(s+1) + 1))} \right) \left(\frac{\sigma(\eta(z_i^0(s) - z_j^0(s) + 1))}{\sigma(\eta(z_i^0(s) - z_j^0(s) + 1))} \right) \times \\ & \times \frac{\sigma(\eta(z_i^0(s+1) - z_j^1(s+2) - 1))}{\sigma(\eta(z_i^0(s+2) - z_j^1(s+2)))} = - \frac{A_s^0 A_{s+1}^1}{A_{s+1}^0 A_{s+1}^1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Функции A_s в рациональном пределе, когда $\sigma(\eta u) \rightarrow u$, можно найти из системы уравнений [5]

$$(A_s^1)^2 - A_{s+1}^1 A_{s-1}^1 = e^{\alpha \lambda^2} (A_s^0)^2 \equiv a (A_s^0)^2, \quad (61)$$

$$(A_s^0)^2 - A_{s+1}^0 A_{s-1}^0 = e^{-\alpha \lambda^2} (A_s^1)^2 \equiv b (A_s^1)^2. \quad (62)$$

Уравнения (59)–(62) описывают дискретную динамику нулей $z_j^{0,1}(s)$ в зависимости от времени s .

Для решения уравнений (59), (60) при наличии ограничений, следующих из (54)–(57), необходимо найти решения уравнений (61), (62). Обратим внимание на инвариантность уравнений (61), (62) относительно преобразований $(A_s^0, A_s^1) \rightarrow (A_s^0, A_s^1) e^{\delta s}$, где δ – константа. Эта инвариантность уже отражена в выражении (58) с помощью функции $\exp(\mu(s)u)$ с $\mu = \mu_0 s + \mu_1$.

Из уравнений (61), (62) следует, что функции $A_s^{0,1}$ имеют вид

$$A_s^0 = A e^{-\gamma s^2}, \quad (63)$$

$$A_s^1 = A e^{-\gamma s^2 + \alpha/2}. \quad (64)$$

Здесь коэффициенты γ и λ связаны соотношением $\lambda_2 = 1 - \exp(-2\gamma)$, A – константа.

Подставляя найденные решения (63), (64) в правые части уравнений (59), (60), мы получаем, что правые части в этих уравнениях равны -1 . При подстановке решений (58) в калибровочно-инвариантные функции $Y_s^a(u)$ мы видим (см. (7)), что эти функции зависят от дискретного времени s только через посредство корней $z_s^{0,1}$, а зависимость гауссовых множителей в (63), (64) от s выпадает. Если функции $T_s^{0,1}(u)$ из (58) подставить в ограничения (54)–(57), выражающие собой законы сохранения в рассматриваемой системе, то это позволит найти ограничения на зависимости корней $z_s^{0,1}$ от дискретного времени s . В случае $N = 2$ эта задача может быть представлена в виде конечного числа отображений. Термодинамический предел $N \rightarrow \infty$ требует численных вычислений.

Мы нашли сохраняющиеся в s - и u -динамике величины для A_{k-1} -алгебры с квазипериодическими граничными условиями. Случай $k = 2$ отвечает дискретной модели синус-Гордон. Показано, что для A_2 -алгебры дискретные уравнения движения при нулевых граничных условиях переходят в непрерывном пределе в уравнения движения неабелева обобщения модели Лиувилля, а при квазипериодических граничных условиях — в уравнение движения Цицейко.

Благодарности. Мы благодарны А. Бобенко и В. Шифу за полезное обсуждение. Работа была частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 98-02-16237 и № 96-02-19272.

Список литературы

- [1] *Al. B. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. 1990. V. 342. P. 695.
- [2] *A. Klümper, P. Pearce.* Physica A. 1992. V. 183. P. 304.
- [3] *A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 5215.
- [4] *F. Ravanini, A. Valleriani, R. Tateo.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 1707.
- [5] *P. B. Wiegmann.* Int. J. Mod. Phys. B. 1997. V. 11. P. 75.
- [6] *A. Zabrodin.* Bethe ansatz and classical Hirota equations, hep-th/9607162; A survey of Hirota's difference equations, solv-int /9704001; Discrete Hirota's equation in quantum integrable models, hep-th/9610039.
- [7] *I. Krichever, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Elliptic solutions to difference non-linear equations and related many-body problems, hep-th/9704090.
- [8] *O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Fusion rules for quantum transfer matrices as a dynamical system on Grassmann manifolds, solv-int/9704015.
- [9] *Y. B. Suris.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 451.
- [10] *F. W. Nijhoff, O. Ragnisco, V. B. Kuznetsov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 176. P. 681.
- [11] *H. W. Capel, F. W. Nijhoff.* Integrable lattice equations. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993. P. 38.
- [12] *A. B. Забродин.* ТМФ. 1997. Т. 113. С. 179.
- [13] *I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Quantum integrable systems and elliptic solutions of classical discrete nonlinear equations, hep-th/9604080, 1996.
- [14] *I. G. Korepanov.* Vacuum curves, classical integrable systems in discrete space-time and statistical physics, hep-th/9312197; Algebraic integrable dynamical systems, $(2 + 1)$ dimensional models in wholly discrete space-time, and inhomogeneous models in 2-dimensional statistical physics, solv-int/9506003.
- [15] *L. D. Faddeev.* How algebraic Bethe ansatz works for integrable model. In: Quantum Symmetries. Les Houches Lectures, Session LXIV. Eds. A. Connes, K. Gawedzki, and J. Zinn-Justin.

- Amsterdam: North-Holland, 1998. P. 149; hep-th/9605187.
- [16] *V. Bazhanov, A. Bobenko, N. Reshetikhin.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 175. P. 377.
 - [17] *D. Bernard, A. LeClair.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 142. P. 99.
 - [18] *A. P. Protogenov, V. A. Verbus.* Mod. Phys. Lett. B. 1997. V. 11. P. 283.
 - [19] *A. Protogenov.* Haldane's statistical interactions and universal properties of anyon systems. Preprint IC/95/26. Trieste: ICTP, 1995.
 - [20] *T. Fukui, N. Kawakami.* Phys. Rev. B. 1995. V. 51. P. 5239.
 - [21] *F. D. M. Haldane.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 937.
 - [22] *Б. Энрикес, Б. Л. Фейгин.* ТМФ. 1995. Т. 103. С. 507.
 - [23] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
 - [24] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
 - [25] *А. В. Забродин.* Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 620.
 - [26] *S. Saito, N. Saitoh.* Phys. Lett. A. 1987. V. 120. P. 1052; J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 322.
 - [27] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1987. V. 56. P. 4285.
 - [28] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 2079.
 - [29] *L. Faddeev, A. Volkov.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 125.
 - [30] *A. Volkov.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 313.
 - [31] *R. Jackiw, So-Young Pi.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1992. V. 107. P. 1.
 - [32] *A. Bobenko, W. Schief.* Discrete indefinite affine spheres. Preprint SFB288. V. 263. Berlin: Technische Universität, 1997; Affine Spheres: Discretization via Duality Relations. Preprint SFB288. V. 297. Berlin: Technische Universität, 1997.

Поступила в редакцию 25.VI.1998 г.,
после доработки 28.VIII.1998 г.