Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зенчук, Преобразования типа Миуры нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом $\bar{\partial}$ -проблемы, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 47–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:51:42

© 1999 г.

А. И. Зенчук*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА МИУРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ МЕТОДОМ $\bar{\partial}$ -ПРОБЛЕМЫ

Предложен новый способ построения преобразований типа Миуры для систем нелинейных уравнений математической физики, интегрируемых методом $\bar{\partial}$ -проблемы, с помощью введения обобщенной нормировочной функции в $\bar{\partial}$ -проблему. Рассмотрены примеры таких преобразований для уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории интегрируемости нелинейных уравнений математической физики фундаментальная роль отводится методу одевания [1] как регулярному методу построения решений интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих приложение в различных областях физики. Современным вариантом метода одевания является нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема [2, 3], которая позволяет строить определенные классы решений $(2 + 1)$ -мерных нелинейных уравнений.

Под нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемой [2, 3] понимается интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\psi_p(\lambda; \mathbf{x}) &= Q_p(\lambda; \mathbf{x}) + \int \psi_p(\mu; \mathbf{x}) R(\mu, \lambda; \mathbf{x}) d^2\mu, \\ Q_p &= \bar{\partial}q_p, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \\ \psi_p(\lambda; \mathbf{x})|_{\lambda \rightarrow \infty} &\rightarrow q_p(\lambda; \mathbf{x}) + \sum_k \frac{\psi_{pk}(\mathbf{x})}{\lambda^k}, \quad p = 1, \dots, N_1, \quad N_1 \in \mathbf{Z},\end{aligned}\tag{1}$$

где все функции матричнозначные, величины q_p называются нормировочными функциями (или нормировками), ядро R – произвольная функция своих аргументов, обеспечивающая однозначную разрешимость уравнения (1); ψ_p – решения уравнения (1) с одним и тем же ядром R , но с разными нормировочными функциями q_p . В дальнейшем аргументы в скобках по возможности будем опускать.

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: zenchuk@itp.ac.ru

Напомним, что ранее [2–4] для построения интегрируемых уравнений использовались решения уравнения (1) с дробно-рациональными нормировочными функциями вида

$$q_p = P_p(\lambda) + \sum_k \frac{f_{pk}(\mathbf{x})}{\lambda - a_{pk}}, \quad (2)$$

где $P_p(\lambda)$ – полиномы по λ , коэффициенты которых произвольным образом зависят от $\mathbf{x}$, a_{pk} – некоторые точки комплексной плоскости, f_{pk} – произвольные функции $\mathbf{x}$. Зависимость от параметров $\mathbf{x}$ вводилась с помощью уравнений

$$R_{x_i}(\lambda, \mu) = K_{x_i}(\lambda; \mathbf{x})R(\lambda, \mu) - R(\lambda, \mu)K_{x_i}(\mu; \mathbf{x}), \quad (3)$$

где одевающий оператор K – некоторая матричнозначная дробно-рациональная функция λ , линейная по $\mathbf{x}$.

В данной работе мы расширим класс допустимых нормировочных функций и рассмотрим функции q_p с произвольной зависимостью от параметра λ и фиксированной зависимостью от параметров $\mathbf{x}$, задаваемой некоторой системой дифференциальных уравнений. Эта зависимость вместе с уравнением (3) определяет конкретный вид нелинейной системы уравнений, описываемой задачей (1). Такая модификация $\bar{\partial}$ -проблемы существенно расширяет класс уравнений, интегрируемых с ее помощью.

Важно тот факт, что между системами нелинейных уравнений, описываемых $\bar{\partial}$ -проблемой с одним и тем же ядром R , но с разными нормировочными функциями, существует связь типа преобразований Миуры, о чем будет говориться в конце раздела 2. Таким образом, уравнение (1) с обобщенной нормировочной функцией реализует новый способ построения преобразований типа Миуры известных интегрируемых систем. В разделе 3 разобрано несколько примеров таких преобразований для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП).

Отметим, что приводимые рассуждения справедливы и для локальной $\bar{\partial}$ -проблемы.

2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА МИУРЫ

Как известно [1, 2], с решением ϕ задачи (1), нормированным на функцию q_0 вида (2), связано множество решений $\phi^{(n)} = M_n \phi$ уравнения (1) с другими нормировками q_{0n} вида (2), которые строятся из функции ϕ с помощью операторов

$$M_n = \sum_k v_k(\mathbf{x}) \prod_n D_{x_n}^{m_{nk}}.$$

Операторы D_{x_n} действуют на произвольную функцию ϕ по формуле $D_{x_n} \phi = \phi_{x_n} + \phi K_{x_n}$, v_k – произвольные функции параметров $\mathbf{x}$. Обозначим множество таких операторов через $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{M} = \left\{ M_k : \bar{\partial}(M_k \phi)(\lambda) = \bar{\partial}q_{0k} + \int (M_k \phi)(\mu) R(\mu, \lambda) d^2 \mu, \quad k \in \mathbf{Z} \right\}. \quad (4)$$

Нелинейные уравнения возникают для функций $\phi_k, \phi(b_k)$, где ϕ_k — коэффициенты степенного ряда по $1/\lambda$,

$$\phi|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow q_0 + \sum_k \frac{\phi_k}{\lambda^k},$$

b_k — полюсы оператора K . Конкретный вид уравнений определяется оператором K в уравнениях (3). Их построение основано на нахождении линейных дифференциальных операторов $\widetilde{M}_k$ (с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x}$) из множества $\widetilde{M}$ таких, что функции $\chi_k = \widetilde{M}_k \phi$ являются решениями уравнения (1) с нормировкой $q_{0k} = 0$. Вследствие однозначной разрешимости уравнения (1) это означает, что

$$\widetilde{M}_k \phi \equiv 0. \quad (5)$$

Обозначим множество таких операторов через $\widetilde{M}_0$:

$$\widetilde{M}_0 = \{ \widetilde{M}_k : \widetilde{M}_k \phi = 0, k \in \mathbf{Z} \}. \quad (6)$$

Его существование обусловлено уравнениями (3). Согласно результатам работ [2, 3] существуют только два независимых оператора из множества $\widetilde{M}_0$ на каждую тройку независимых переменных x_i, x_j, x_k из множества $\mathbf{x}$, которые представляют собой вспомогательную переопределенную линейную систему уравнений с переменными коэффициентами на функции ψ_p .

Подробный алгоритм построения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых методом $\bar{\partial}$ -проблемы (1), (2), приведен в работах [2, 3]. Прежде чем применить его к уравнению (1) с нормировками q_p ($p = 1, \dots, N_1$), произвольно зависящими от λ , необходимо ввести конкретную зависимость величин q_p от параметров $\mathbf{x}$. Пусть эта зависимость определяется системой уравнений

$$\sum_{p=1}^{N_1} L_{pj} Q_p = \sum_{k=1}^{N_2} \alpha_{jk}(\mathbf{x}) \delta(\lambda - a_{jk}), \quad j = 1, \dots, N_3, \quad N_1, N_2, N_3 \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

где L_{pj} — линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от λ и $\mathbf{x}$, α_{jk} — некоторые функции параметров $\mathbf{x}$, a_{jk} — некоторые точки комплексной плоскости. Пусть множеству операторов L_{pj} соответствует множество линейных дифференциальных операторов T_{pj} ($p = 1, \dots, N_1, j = 1, \dots, N_3$) таких, что функции

$$\chi_j = \sum_{p=1}^{N_1} T_{pj} \psi_p \equiv T_j(\psi), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_{N_1}), \quad (8)$$

являются решениями уравнения

$$\bar{\partial} \chi_j(\lambda) = \sum_{p=1}^{N_1} L_{pj} Q_p + \int \chi_j(\mu) R(\mu, \lambda) d^2 \mu. \quad (9)$$

С учетом системы (7) это означает, что функция χ_j есть решение уравнения (1) с нормировкой $q_j^{(\chi)}$:

$$q_j^{(\chi)} = P_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\alpha_{jk}(\mathbf{x})}{\lambda - a_{jk}}, \quad \chi_j|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow q_j^{(\chi)} + \sum_{k \geq 0} \frac{\chi_{jk}}{\lambda^k}, \quad (10)$$

где $P_j(\lambda)$ – полиномы по λ , коэффициенты которых (функции $\mathbf{x}$) выражаются через ψ_{pk} (см. (1)). В этом случае множество $\widetilde{M}$ (4) состоит из операторов, действующих на векторную функцию ψ (см. (8)),

$$\widetilde{M} = \left\{ T_j, \sum_k g_k(\mathbf{x}) \prod_n D_{x_n}^{m_{nk}} T_j, \quad m_{nk} \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, \dots, N_3 \right\}, \quad (11)$$

где g_k – произвольные функции параметров $\mathbf{x}$.

Разумеется, множество операторов T_{pj} можно подобрать не для любого множества L_{pj} . По сути, зависимость коэффициентов допустимых операторов L_{pj} от λ определяется одевающим оператором K в уравнении (3) и не может быть произвольной. На зависимость от параметров $\mathbf{x}$ ограничений не накладывается.

Как было сказано выше, множество $\widetilde{M}$ (11) порождает множество $\widetilde{M}_0$ (6), т.е. линейную переопределенную систему уравнений на функции ψ_p и произвольную тройку независимых переменных x_i, x_j, x_k . При этом нелинейная система уравнений возникает для каждой тройки параметров x_i, x_j, x_k и функций $\psi_{pk}, \psi_p(b_k)$, $k, p \in \mathbf{Z}$, где b_k – полюсы оператора K . Чтобы получить эту систему, достаточно разложить линейную систему уравнений, которой удовлетворяют функции ψ_p , по малым параметрам

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\lambda} \Big|_{\lambda \rightarrow \infty}, \quad \varepsilon_k = (\lambda - b_k) \Big|_{\lambda \rightarrow b_k}, \quad k = 1, \dots, N_2, \quad (12)$$

и приравнять нулю достаточное количество членов этого разложения, для того чтобы получить замкнутую систему уравнений.

Преобразования типа Миуры возникают между системами нелинейных уравнений, порождаемыми функциями ψ_p ($p = 1, \dots, N_1$), с одной стороны, и функциями χ_j ($j = 1, \dots, N_3$), с другой. Действительно, поскольку функции χ_j имеют нормировку вида (2), они могут быть использованы для построения нелинейных систем уравнений на функции $\chi_{jk}, \chi_j(b_k)$ с учетом уравнений (3) по обычному алгоритму [2, 3]. В то же время согласно формулам (8) существует явная связь между функциями ψ_p и χ_j . Поэтому, записав уравнения (8) в виде разложений по степеням параметров ε_k ($k = 0, \dots, N_2$) (12) и приравняв нулю достаточное количество членов этих разложений, получим в результате замкнутую систему дифференциальных уравнений, связывающую между собой функции $\chi_{jk}, \chi_j(b_k)$ и $\psi_{pk}, \psi(b_k)$. Это и есть искомое преобразование типа Миуры. Очевидно, что подобные преобразования существуют и между решениями нелинейных уравнений, порождаемыми $\bar{d}$ -проблемой с различными нормировочными функциями q_p ($p = 1, \dots, N_1$) и $\tilde{q}_j$ ($j = 1, \dots, N_3$), также и в том случае, если ни одна из них не является дробно-рациональной функцией вида (2).

В следующем разделе с помощью введенного алгоритма будут получены некоторые преобразования типа Миуры для уравнения КП.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИУРЫ УРАВНЕНИЯ КП

Во всех примерах этого раздела рассматривается скалярная задача (1). Зависимость ядра от дополнительных параметров $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$ введем согласно (3) с помощью одевающего оператора $K = \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 t$,

$$R_x = (\lambda' - \lambda)R, \quad R_y = (\lambda'^2 - \lambda^2)R, \quad R_t = (\lambda'^3 - \lambda^3)R. \quad (13)$$

В дальнейшем используются операторы

$$D_x = \partial_x + \lambda, \quad D_y = \partial_y + \lambda^2, \quad D_t = \partial_t + \lambda^3.$$

Приводимые ниже примеры отличаются друг от друга зависимостью нормировок q_p от параметров $\mathbf{x}$. Везде в качестве операторов L_{pj} выбраны линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, не зависящими от $\mathbf{x}$.

В примерах 1–3 (приведенных ниже) $N_1 = 1$ (т.е. система (1) состоит из одного уравнения) и приняты обозначения

$$Q_1 = Q, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow q + \sum_{k>0} \frac{\psi_k}{\lambda_k}. \quad (14)$$

Первый пример соответствует преобразованию Миуры, связывающему между собой решения уравнения КП и модифицированного уравнения КП. В двух других примерах получаются нелинейные системы, каждая из которых состоит из уравнения КП и линейного уравнения с переменными коэффициентами вида $M(L_-, A_-)\phi = 0$, причем оператор M есть суперпозиция (вообще говоря, нелинейная, как показано в примере 3) операторов L_- и A_- ,

$$L_{\pm} = \pm \partial_y - \partial_x^2 + 2u, \quad A_{\pm} = \partial_t - \partial_x^3 + 3u\partial_x + \frac{3}{2}(u_x \pm \partial_x^{-1}u_y), \quad (15)$$

условие коммутативности которых порождает уравнение КП.

Более конструктивны примеры 4 и 5, в которых $N_1 = 2$ (два уравнения в системе (1)). При этом получаются нелинейные системы, связанные некоторым преобразованием с уравнением КП.

ПРИМЕР 1. Преобразование Миуры

$$u = \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}r_y + r_x + r^2), \quad (16)$$

переводящее решения модифицированного уравнения КП

$$r_t - \frac{1}{4}r_{xxx} - \frac{3}{4}\partial_x^{-1}r_{yy} + \frac{3}{2}r_x\partial_x^{-1}r_y + \frac{3}{2}r^2r_x = 0 \quad (17)$$

в решения уравнения КП

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x - \frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy} = 0, \quad (18)$$

соответствует зависимости нормировки задачи (1) от дополнительных параметров, выраженной уравнениями

$$D_x Q = 0, \quad D_y Q = 0, \quad D_t Q = 0,$$

здесь $\chi_1 = D_x \psi$, $u = \chi_{11x}/\psi_1$, $r = \psi_{1x}$.

ПРИМЕР 2. Введем более сложную зависимость Q_p от параметров x, y, t :

$$L_1 Q \equiv D_x Q = 0, \quad L_2 Q \equiv (D_t - D_y) Q = 0. \quad (19)$$

Переопределенная система линейных уравнений, получаемая из $\bar{\delta}$ -проблемы, имеет следующий вид:

$$(D_y D_x - D_x^3 - W_1 D_x^2 - W_2 D_x) \psi = 0, \\ W_1 = -2 \frac{\psi_{1x}}{\psi_1}, \quad W_2 = \frac{\psi_{1y}}{\psi_1} - 3 \frac{\psi_{1xx}}{\psi_1} - 2 \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \right)_x + 4 \left(\frac{\psi_{1x}}{\psi_1} \right)^2; \quad (20)$$

$$(D_t - D_y - D_x^3 - W_3 D_x^2 - W_4 D_x) \psi = 0, \\ W_3 = -1 - 3 \frac{\psi_{1x}}{\psi_1}, \quad W_4 = -3 \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \right)_x - 3 \frac{\psi_{1xx}}{\psi_1} - 2 W_3 \frac{\psi_{1x}}{\psi_1}. \quad (21)$$

Соответствующая нелинейная система состоит из уравнения КП (18) для функции

$$u = \partial_x \psi_1 + \frac{\psi_2}{\psi_1}$$

и линейного уравнения для функции $\phi = \psi_1$ с коэффициентами, зависящими от u ,

$$(A_- + L_-) \phi = 0. \quad (22)$$

Здесь использованы операторы A_- , L_- , определенные формулами (15).

ПРИМЕР 3. Пусть нормировка удовлетворяет системе уравнений

$$L_1 Q = D_x Q = 0, \quad L_2 Q = (D_t - D_y^2) Q = 0.$$

Тогда получим систему нелинейных уравнений, состоящую из уравнения КП (18) и уравнения $(A_- - L_-^2) \phi = 0$, где использованы операторы L_- , A_- вида (15),

$$\phi = \psi_1, \quad u = \partial_x \psi_1 + \frac{\psi_2}{\psi_1}.$$

ПРИМЕР 4. Возьмем два скалярных уравнения (1) с нормировками q_1, q_2 и решениями ψ, φ , соответственно:

$$\psi|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow q_1 + \sum_k \frac{\psi_k}{\lambda^k}, \quad \varphi|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow q_2 + \sum_k \frac{\varphi_k}{\lambda^k}.$$

Зависимость нормировок от параметров x, y, t введем формулами

$$D_x Q_i = 0, \quad D_y Q_i = 0, \quad D_t Q_1 + Q_2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае вспомогательная линейная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} (D_y - D_x^2 + 2\xi_x D_x)\psi &= 0, & \xi &= \ln \psi_1, \\ (D_y - D_x^2 + 2\eta_x D_x)\varphi &= 0, & \eta &= \ln \varphi_1, \\ \varphi_1 D_x \psi &= \psi_1 D_x \varphi, \\ (D_t - D_x^3 + 3\xi_x D_x^2 + 3(\xi_{xx} - \xi_x^2 + v_x)D_x)\psi + \varphi &= 0, & v &= \frac{\psi_2}{\psi_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ей соответствует нелинейная система

$$\begin{aligned} r_t - \frac{1}{4}r_{xxx} - \frac{3}{4}\partial_x^{-1}r_{yy} + \frac{3}{2}r_x\partial_x^{-1}r_y + \frac{3}{2}r^2r_x + q_x &= 0, \\ q_y + q_{xx} + 2q_xr &= 0, & r &= \xi_x, & q &= \frac{\phi_1}{\psi_1}, \end{aligned} \quad (24)$$

решения которой связаны с решениями уравнения КП преобразованием Миуры (16).

Выписанная система имеет очевидную интерпретацию. Подставим функцию u (16) в уравнение КП (18). Получим после алгебраических преобразований, что $S(\text{мКР}) = 0$, где $S = \partial_y + \partial_x^2 + 2r_x\partial_x$ и буквами мКР обозначена левая часть модифицированного уравнения КП (17). После обращения оператора S имеем следующую систему уравнений:

$$\text{мКР} + s = 0, \quad S(s) = 0, \quad (25)$$

где s — ядро оператора S . Если теперь положить $s \equiv q_x$, то получим из (25) в точности систему (24).

Нетрудно проверить, что уравнения (24) являются условием совместности следующей переопределенной линейной системы уравнений, получаемой из системы (23):

$$\begin{aligned} L_M \Psi &= 0, & A_1 \Psi &= (\partial_x A_M - q\partial_x)\Psi = 0, \\ \Psi &= \psi \exp(\lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 t), \end{aligned} \quad (26)$$

где операторы L_M, A_M имеют вид

$$\begin{aligned} L_M &= \partial_y - \partial_x^2 + 2r\partial_x, & A_M &= \partial_t - \partial_x^3 + 3r\partial_x^2 + \frac{3}{2}v_0\partial_x, \\ v_0 &= r_x - r^2 + \partial_x^{-1}r_y, \end{aligned} \quad (27)$$

а условие их коммутативности порождает модифицированное уравнение КП. Выпишем упомянутое условие совместности

$$A_1 L_M - L_M A_1 = 2r_x A_1.$$

ПРИМЕР 5. Введем зависимость нормировок от параметров x, y, t по формулам

$$D_x Q_i = 0, \quad D_t Q_i = 0, \quad D_y Q_1 + Q_2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Решения также обозначим буквами ψ и φ . Этой задаче соответствуют линейная система уравнений

$$\begin{aligned} (D_y - D_x^2 + 2\xi_x D_x)\psi + \varphi &= 0, \quad \xi = \ln \psi_1, \\ \varphi_1 D_x \psi &= \psi_1 D_x \varphi, \\ (D_t - D_x^3 + 3\xi_x D_x^2 + 3(\xi_{xx} - \xi_x^2 + v_x)D_x)\psi &= 0, \quad v = \frac{\psi_2}{\psi_1}, \\ (D_t - D_x^3)\varphi + \left(3w D_x^2 + 3\left(w_x + \frac{\varphi_{2x}}{\psi_1} - 2w\xi_x - wv\right)D_x\right)\psi &= 0, \quad w = \frac{\varphi_{1x}}{\psi_1} \end{aligned}$$

и нелинейная система

$$\begin{aligned} r_t - \frac{1}{4}r_{xxx} - \frac{3}{4}(\partial_x^{-1}r_{yy} - q_{xx} + q_y - 2r_x\partial_x^{-1}r_y - 2r^2r_x - 2(qr)_x) &= 0, \\ qt - q_{xxx} + \frac{3}{2}(qq_x - q_xr_x + q_x\partial_x^{-1}r_y - q_xr^2 - 2q_{xx}r) &= 0, \\ r = \xi_x, \quad q = \frac{\varphi_1}{\psi_1}, \end{aligned}$$

причем решения последней связаны с решениями уравнения КП (18) соотношением

$$2u - q = \partial_y^{-1}r + r_x + r^2.$$

Выписанная система является условием совместности переопределенной линейной системы уравнений

$$L_1\Psi = (\partial_x L_M + q\partial_x)\Psi = 0, \quad A_M\Psi = 0$$

и имеет вид

$$A_M L_1 - L_1 A_M = B L_1, \quad B = -3(r_x \partial_x + v_{0x}),$$

операторы L_M, A_M определены формулами (27).

Благодарности. Автор выражает благодарность С.В. Манакову за обсуждение результатов работы. Работа была поддержана РФФИ (грант № 98-01-0525).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8. № 3. С. 43.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков. Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19. № 2. С. 11.
- [3] L. V. Bogdanov, S. V. Manakov. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. L537.
- [4] А. И. Зенчук, С. В. Манаков. ТМФ. 1995. Т. 105. № 3. С. 371.

Поступила в редакцию 21.IX.1998 г.