Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Ширков, Ренормгруппа, причинность и нестепенная теория возмущений
в КТП, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 55–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:33:45

© 1999 г.

Д. В. Ширков*

РЕНОРМГРУППА, ПРИЧИННОСТЬ И НЕСТЕПЕННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КТП

Структура квантово-полевого разложения наблюдаемых изучается в рамках новой “причинной аналитической версии” теории возмущений в квантовой хромодинамике. Здесь инвариантный заряд КХД $a(Q^2/\Lambda^2) = \beta_1 \alpha_s(Q^2)/4\pi$ превращается в Q^2 -аналитическую инвариантную функцию $a_{\text{ан}}(Q^2/\Lambda^2) \equiv \mathcal{A}(x)$, которая по построению свободна от “призрачных” сингулярностей за счет появления непертурбативных вкладов.

В рамках анализированной теории возмущений разложение для наблюдаемой F вместо степеней аналитического инвариантного заряда $\mathcal{A}^n(x)$ содержит специфические функции $\mathcal{A}_n(x) = [a^n(x)]_{\text{ан}}$ – n -е степени $a(x)$, анализированные как целое. Анализ показал, что функции $\mathcal{A}_{n>2}(x)$ в области малых $Q^2 \leq \Lambda^2$ оказываются осциллирующими, что и приводит к слабой петлевой и схемной зависимостям. Таким образом, степенное разложение теории возмущений для $F(x)$ в результате процедуры анализа переходит в *асимптотическое разложение типа Эрдейи по нестепенной последовательности* $\{\mathcal{A}_n(x)\}$. Рассмотрены вопросы неоднозначности механизма причинной аналитизации и возможной несовместности некоторых ее версий со структурой ренормгруппы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] механизм *инвариантной аналитизации* был применен к пертурбативной квантовой хромодинамике (пКХД). Он позволяет осуществить совмещение двух идей: *ренормгруппового суммирования* “больших” ультрафиолетовых (УФ) логарифмов и *свойства аналитичности* по переменной Q^2 , отвечающего спектральному представлению¹⁾ типа Челлена–Лемана [3, 4] (см. ниже формулу (1)). Эта комбинация была впервые реализована в КЭД около сорока лет назад [6] для устранения призрачного полюса Фрадкина–Ландау.

¹⁾Это представление является воплощением [5, гл. “Дисперсионные соотношения”] общих свойств локальной КТП, среди которых важную роль играет условие причинности. В данном контексте наряду с термином “аналитичность” мы будем иногда использовать в качестве синонимов “спектральность” и “причинность”.

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия.
E-mail: shirkovd@thsun1.jinr.ru

Центральным объектом ренорминвариантной квантово-полевой теории возмущений является особая функция, так называемый инвариантный заряд или “инвариантная константа связи” $\alpha(Q^2/\Lambda^2)$, через которую выражаются наблюдаемые величины. Ввиду некоторой двусмысленности последнего выражения мы предпочитаем говорить об “инвариантной (функции) связи”. В КХД параметр Λ , отвечающий положению нефизической особенности (полюса или начала ветвления), примерно равен 300 МэВ. В результате анализирования подходящим образом нормированная инвариантная связь $a(x) = \beta_1 \alpha_s(x)/4\pi$ ($\beta_1 = 11 - 2n_f/3$) превращается в новую *аналитическую функцию связи* $a_{\text{ан}}(x) \equiv \mathcal{A}(x)$, свободную от призрачных сингулярностей.

По построению *аналитическая функция связи определена представлением Челлена–Лемана*

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho(\sigma) d\sigma}{\sigma + x}, \quad (1)$$

где *спектральная плотность* $\rho(\sigma) = \Im a(-\sigma)$ вычислена на основе “исходного”, *просуммированного по ренормгруппе выражения* $a(x)$.

В общем случае $\mathcal{A}(x)$ отличается от $a(x)$ на непертурбативные слагаемые²⁾, которые “вычитают” нефизические сингулярности, такие как призрачный полюс (см. ниже формулы (2) и (6)).

Детальный анализ показал [1, 2], что аналитическая функция связи $\mathcal{A}(x)$ имеет несколько важных свойств. Она оказывается поразительно стабильной в инфракрасной (ИК) области (при $Q < \Lambda$) по отношению к многопетлевым поправкам и к выбору схемы перенормировки. Ее ИК-предельное значение $\mathcal{A}(0)$ в этом смысле является универсальным. Мы кратко обзораем этот сюжет в п. 2.1–2.3.

С другой стороны, причинная анализация физических амплитуд не является однозначной операцией. Возможны несколько сценариев. В работе [8] была предложена и разработана особая версия – аналитическая теория возмущений (АТВ). Из-за специфического рецепта анализирования вместо разложения по степеням теории возмущений, привычного для теоретической физики и КТП, анализированная физическая амплитуда $\mathcal{F}(x)$ оказывается представленной здесь в виде разложения более общей формы – разложения по асимптотической последовательности функций $\mathcal{A}_n(x) = [a^n(x)]_{\text{ан}}$ – “ n -х степеней $a(x)$, анализированных как целое”. В версии АТВ наблюдалось сильное уменьшение зависимости от вкладов высших петель и от схемы перенормировки (см. [8–10]).

Чтобы понять природу такого “петлевого и схемного иммунитета”, в разделе 3 мы изучаем свойства нестепенной последовательности $\{\mathcal{A}_n(x)\}$, возникающей при использовании рецепта анализирования АТВ.

В разделе 4 рассмотрена структура возможных вариантов анализирования наблюдаемой и обсуждается опасность противоречия, точнее несовместности с внутренней структурой ренормгруппы, для некоторых из этих вариантов.

²⁾ По поводу связи между ренорминвариантностью, причинностью и неаналитичностью по α см. также наши работы [7].

2. РЕШЕНИЕ РГ-УРАВНЕНИЙ И АНАЛИТИЗАЦИЯ

2.1. Однопетлевая аналитизация $a(x)$. В однопетлевом приближении инвариантная функция связи $a(x) = 1/\ln x$ имеет полюс при $x = 1$, несовместный со спектральным представлением (1). Аналитизация состоит в аналитическом продолжении выражения $1/\ln x$ в область отрицательных x и определении спектральной плотности $\rho(\sigma) = \pi(\ln^2 \sigma + \pi^2)^{-1}$ через его мнимую часть. Результирующий спектральный интеграл может быть вычислен явно:

$$a(x) = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow a_{\text{ан}}(x) = \mathcal{A}(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}. \quad (2)$$

Второй член, в точности компенсирующий призрачный полюс, имеет непертурбативную природу. При малых $a_\mu = a(Q^2 = \mu^2)$ он не “оставляет следов” при разложении в ряд Тейлора, будучи пропорциональным $\exp(-1/a_\mu)$. Для того чтобы увидеть это, следует от Λ -параметризации вернуться к параметризации через перенормированную константу связи a_μ и квадрат импульса отсчета μ^2 .

Заметим, что связь между Λ/μ и a_μ в результате аналитизации меняется. Вместо обычного выражения $\Lambda^2 = \mu^2 \exp(-1/a_\mu)$ мы приходим согласно (2) к неявному соотношению

$$\Lambda^2 = \frac{\mu^2}{f(a)}; \quad a = \frac{1}{\ln f(a)} + \frac{1}{1-f(a)}.$$

Здесь при малых a (так же как и в (2) при больших x) можно пренебречь вторым непертурбативным членом. Однако при $a \sim 1$ ($x \lesssim 1$) этот член становится основным и приводит к фиксированной ИК-точке при $a = 1$.

Аналитическая инвариантная связь $\mathcal{A}(x)$ является монотонной функцией на интервале $(0, \infty)$ и имеет конечный ИК-предел. Второй член в (2) быстро убывает при $x \rightarrow \infty$: он составляет около 5% при $Q = 10\Lambda$ и всего 1% при $Q = 25\Lambda$. Полный набор решений (2), рассматриваемых как функции Q^2 с различными значениями параметра Λ , образует пучок с общей точкой $\mathcal{A}(0) = 1$. Это значение, соответствующее $\alpha_s(0) = 4\pi/\beta_1$, оказывается универсальным (см. ниже п. 2.3).

2.2. Двух- и трехпетлевой случай. В двухпетлевом случае инвариантная связь определяется из неявного соотношения

$$\frac{1}{a^{(2)}(x)} - b \ln \left(1 + \frac{1}{ba^{(2)}(x)} \right) = \ln x; \quad b = \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \left(= \frac{64}{81} \text{ при } n_f = 3 \right), \quad (3)$$

получаемого интегрированием двухпетлевого дифференциального уравнения.

Итеративная процедура разрешения этого соотношения дает приближенное решение в явном виде

$$a_{\text{итер}}^{(2)}(x) = \frac{1}{\ell + b \ln(1 + \ell/b)}, \quad \ell = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = \ln x, \quad (4)$$

которое использовалось в наших предыдущих работах.

Точное решение уравнения (3) может быть также выражено [11, 12] через специальную функцию W – функцию Ламберта $W(z)e^{W(z)} = z$ (в обозначениях работы [13]), обладающую бесконечным числом ветвей $W_n(z)$:

$$a^{(2)}(x) = -\frac{1}{b} \frac{1}{1 + W(z)}; \quad z = -\frac{1}{e} x^{-1/b} = -e^{-\ln x/b-1}. \quad (5)$$

Большая часть физической области $x > 1$ ($z < -1/e$) соответствует ветви $W_{-1}(z)$, которая действительна и монотонна при $x \in (1, \infty)$. Отношение между z и x в (5) определено из соображения соответствия с приближенным решением (4) при $x \gg 1$. Эта ветвь $\mathcal{W}(x) \equiv W_{-1}(z)$ комплексна ниже призрачной особенности при $x = 1$, $z = -1/e$.

Качественный анализ уравнения (3) или его точного решения обнаруживает, что эта особенность имеет форму корневой точки ветвления

$$a^{(2)}(x \simeq 1) = \frac{1}{\sqrt{2b(x-1)}} - \frac{1}{3b} + O(\sqrt{x-1}) \quad (x = 1 + |\varepsilon|),$$

которая приводит к нефизическому разрезу $0 \leq x \leq 1$.

Таким образом, отпавляясь от двухпетлевого решения (5), мы определяем аналитическую функцию связи через представление (1) со спектральной плотностью, выраженной через W , что эквивалентно вычитанию вклада интеграла по “нефизическому разрезу,”

$$\mathcal{A}^{(2)}(x) = -\frac{1}{b(1 + \mathcal{W}(x))} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathcal{R}(\sigma) d\sigma}{\sigma - x}. \quad (6)$$

Заметим, что итеративное приближение (4) обладает несколько иной структурой (кроме полюса оно имеет логарифмическую точку ветвления при $x_c = e^{-b}$) призрачных сингулярностей. Тем не менее в работе [11] было установлено, что анализируемое итеративное двухпетлевое приближение численно очень близко³⁾ к точному (6). С практической точки зрения это означает, что для $\mathcal{A}^{(2)}(x)$ можно использовать явное выражение (1) со спектральной плотностью

$$\rho_{\text{RG}}^{(2)}(L) = \frac{I(L)}{R^2(L) + I^2(L)}; \quad L = \ln \frac{\sigma}{\Lambda^2}, \quad (7)$$

$$R(L) = L + b \ln \sqrt{\left(1 + \frac{L}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}, \quad I(L) = \pi + b \arccos \frac{b + L}{\sqrt{(b + L)^2 + \pi^2}}.$$

В то же время в работе [12] было отмечено, что точное трехпетлевое решение (с преобразованной по Падé бета-функцией) также может быть выражено через функцию Ламберта:

$$a^{(3)}(x) = -\frac{1}{b} \frac{1}{1 - c + W(z)}; \quad (8)$$

$$z = -e^{-\ln x/b+c-1}, \quad c = \frac{\beta_3 \beta_1}{\beta_2^2}.$$

Ниже, обращаясь к трехпетлевому случаю, будем подразумевать $\overline{\text{MS}}$ -схему с $\beta_3 = 2857/2 - 5033n_f/18 + 325n_f^2/54$, здесь (при $n_f = 3$) $\beta_3 = 3863/6 = 643.833$, $c = 1.415$.

³⁾ 3 ÷ 4-процентное отличие может быть скомпенсировано 8%-й коррекцией значения Λ .

2.3. Стабильность аналитической связи в ИК-области. Аналитическая связь $\mathcal{A}(x)$ обладает рядом важных свойств в ИК-области. Она оказывается довольно стабильной при $Q < \Lambda$ по отношению к вкладам от высших петель и относительно схемной зависимости. Предельное значение

$$\mathcal{A}(0) = 1 \quad (9)$$

оказывается универсальным⁴⁾ в этом отношении.

Это замечательное свойство универсальности было впервые обнаружено в самой первой из наших работ [1] этого направления. Позднее более детальный анализ [2, 14, 11, 12] показал, что значение $\mathcal{A}(0)$ оказывается нечувствительным не только к высшим членам в бета-функции, но также и к деталям структуры прозрачной сингулярности, устранимой аналитизацией. А эта структура зависит от приближений.

Вместо корневой точки ветвления точного двухпетлевого решения (5), итеративное двухпетлевое решение (4) обладает полюсом при $x = 1$ и логарифмическим ветвлением при $x_* = e^{-b}$. В трехпетлевом случае аппроксимированное по Падé решение имеет полюс и точку ветвления вместо сингулярности вида $(\ln x)^{-1/3}$ у решения с нетрансформированной бета-функцией.

Тем не менее во всех этих случаях окончательные аналитизированные результаты для $\mathcal{A}(x)$ обладают свойством (9), а их ИК-поведения в интервале $(0, 1)$ весьма близки [10] друг к другу. Процедура аналитизации, “сглаживающая все острые углы”, уравнивает их всех.

Как видно, спектральность, ограничивая поведение инвариантной связи верхней границей, “держит ее в области достаточно малых значений”. Так, например, обычная бета-функция в $\overline{\text{MS}}$ -схеме при $n_f = 3$

$$\beta(a) = -a^2(1 + 0.790a + 0.883a^2) \sim -\alpha^2(1 + 0.566\alpha + 0.453\alpha^2) \quad (10)$$

выглядит “вполне прилично”: ее последовательные члены достаточно быстро убывают в достижимой на опыте физической области $\alpha \leq 0.4$ ($a \leq 0.3$). Здесь уместно ввести “бета-функцию для аналитической связи”

$$\frac{d\mathcal{A}(x)}{d \ln x} = \beta_{\text{ан}}(\mathcal{A}(x)), \quad (11)$$

являющуюся трансцендентной неаналитической функцией $\beta_{\text{ан}}(\mathcal{A})$ своего единственного аргумента с фиксированной точкой при $\mathcal{A} = 1$. В однопетлевом случае эта функция может быть проанализирована достаточно просто (см. ниже формулы (14) и (15)). При этом оказывается, что ее максимальное значение $\beta_{\text{ан}}(1/2) = 1/12$ численно весьма близко (это свойство остается и в высших петлевых приближениях) к выражению (10), взятому при $a = 0.3$.

Напомним, что связь между аналитичностью рассматриваемого типа в комплексной плоскости для физической амплитуды и ее ограниченностью обсуждалась ранее (см., например, работы [15], а также [16, § 11.3]) в контексте анализа поведения низкоэнергетических характеристик рассеяния адронов.

⁴⁾Эффективное число ароматов n_f в точке полюса равно 3, что дает $\alpha_{\text{ан}}(0) = 1.396$.

2.4. Аналитизация наблюдаемых. В работах [8, 9] был предложен особый рецепт для аналитизации наблюдаемой $M(s)$.

Во-первых, следует выразить $M(s)$, возможно определенную во времениподобной области, через некоторую вспомогательную функцию $F(Q^2)$ пространственноподобного аргумента⁵⁾, обладающую свойствами аналитичности в Q^2 -плоскости, совместными со спектральным представлением типа Челлена–Лемана. Эта функция после применения обычного ренормгруппового механизма приобретает форму разложения по степеням инвариантной связи:

$$F(a(x)) = \sum_n f_n a^n(x). \quad (12)$$

Во-вторых, согласно предписанию причинная аналитизация функции $F(a)$ выполняется по правилу

$$F(a(x)) \Rightarrow \mathcal{F}(x) = \sum_n f_n \mathcal{A}_n(x), \quad (13)$$

где $\mathcal{A}_n(x) = [a^n(x)]_{\text{ан}}$ представляет собой “ n -ю степень $a(x)$, аналитизированную в целом”. Здесь каждая функция $\mathcal{A}_n(x)$ удовлетворяет представлению Челлена–Лемана со спектральной плотностью $\rho_n(\sigma)$, определенной как $\Im a^n(-\sigma)$.

Отметим, что разложение (13) не является степенным, так как $\mathcal{A}_n(x) \neq [A(x)]^n$ при $n \neq 1$. Рецепт (12) $\Rightarrow$ (13) меняет природу разложения!

Важной особенностью этого рецепта, приводящего к АТВ, является высокая стабильность его результатов относительно учета высших петлевых поправок [8, 9] и соответственно относительно схемной зависимости [10]. Мы собираемся показать, что природа этих физически важных свойств лежит в изменении вида разложения теории возмущений.

Нестепенная последовательность $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ является асимптотической в УФ-области, так как

$$\mathcal{A}_{n+1}(x) \simeq [\ln x]^{-(n+1)} = o(\mathcal{A}_n(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Это означает, что ряд (13) может рассматриваться как асимптотическое разложение функции $\mathcal{F}(x)$ по асимптотической последовательности $\{\mathcal{A}_n(x)\}$. Свойства его сходимости определяются, с одной стороны, коэффициентами разложения f_n , вычисленными на основе n -петлевых диаграмм Фейнмана, а с другой стороны, свойствами последовательности $\{\mathcal{A}_n(x)\}$. Обратимся к рассмотрению последней.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ РАЗЛОЖЕНИЯ

3.1. Однопетлевые функции разложения. Наиболее простая последовательность состоит из аналитизированных степеней однопетлевой функции связи пКХД $a(x)$.

⁵⁾ Так, например, отношение поперечных сечений для e^+e^- -аннигиляции $R(s)$ выражают через функцию Адлера $D(Q^2)$.

Кроме аналитического инвариантного заряда $[a(x)]_{\text{ан}} = \mathcal{A}(x)$ (см. (2)) эта последовательность содержит функции $\mathcal{A}_n(x)$:

$$\begin{aligned} a^2(x) = \frac{1}{\ln^2 x} &\Rightarrow \mathcal{A}_2(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - p_2(x); \quad p_2(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = p_2\left(\frac{1}{x}\right); \\ \mathcal{A}_3(x) = \frac{1}{\ln^3 x} + \frac{x}{(1-x)^3} - \frac{1}{2} \frac{x}{(1-x)^2}; \quad \mathcal{A}_4(x) = \frac{1}{\ln^4 x} - p_2^2(x) - \frac{p_2(x)}{6}; \quad \dots \end{aligned} \quad (14)$$

– “анализированные степени”, обладающие симметрией $\mathcal{A}_n(x) = (-1)^n \mathcal{A}_n(1/x)$ и связанные рекуррентным соотношением, содержащим оператор $\mathcal{D} = -x(d/dx)$,

$$\mathcal{A}_{n+1}(x) = \frac{1}{n} \mathcal{D} \mathcal{A}_n(x) = \frac{1}{n!} \left(-x \frac{d}{dx} \right)^{n+1} \ln \mathcal{A}_0(x); \quad \mathcal{A}_0(x) = \frac{x-1}{x \ln x}, \quad (15)$$

где $\mathcal{A}_0$ играет роль производящей функции. В частности,

$$\frac{d\mathcal{A}(x)}{d \ln x} = -\mathcal{A}_2(x) \equiv \beta_{\text{ан}}^{(1)}(\mathcal{A}(x)) = \beta_{\text{ан}}^{(1)}(\mathcal{A}(1/x)), \quad (16)$$

здесь $\beta_{\text{ан}}^{(1)}(\mathcal{A})$ не является аналитической функцией своего аргумента.

Попытка выразить $\mathcal{A}_n(x)$ через аналитическую функцию связи $\mathcal{A}(x)$ дает “смешанное” представление

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(x) &= \mathcal{A}^2(x) - \frac{2}{1-x} \mathcal{A}(x) + \frac{1}{1-x}; \\ \mathcal{A}_3(x) &= \mathcal{A}^3(x) - \frac{3}{1-x} \mathcal{A}^2(x) + \frac{3}{(1-x)^2} \mathcal{A}(x) - \frac{x+2}{2(1-x)^2}, \quad \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

сочетающее полиномиальную и непертурбативную (через аргумент $x = Q^2/\Lambda^2$) зависимости. Можно показать, что это представление не интересно с прагматической точки зрения (см. ниже п. 3.2).

В двухпетлевом случае, для того чтобы связать решение (6) с высшими анализированными степенями, следует формально воспользоваться оператором

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial W} = -\frac{1+W}{W} \cdot x \frac{\partial}{\partial x},$$

так что

$$\mathcal{A}_{n+1}^{(2)}(x) = \frac{1}{n!} \mathcal{D}_2^n \mathcal{A}_n^{(2)}(x). \quad (18)$$

Заметим, что в уравнении (15) $\mathcal{D}$ можно рассматривать как оператор дифференцирования по “эффективному времени” $t = \ln x$. Подобная интерпретация в двухпетлевом случае

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{1 + b a^{(2)}(e^t)} \cdot \frac{d}{dt} \equiv \frac{d}{d\tau}; \quad \tau = t + b \int_0^t a(e^{t'}) dt', \quad (19)$$

приводит к новой переменной $\tau(t)$, выступающей в роли “эффективного двухпетлевого времени” $\tau = t_2$. При больших значениях t имеем $\tau \simeq t + b \ln t$. Однако выражение для $\mathcal{D}_2$ требует уточнения при $0 < x < 1$.

3.2. Вычитающие структуры и поведение при малых Q . Рациональные структуры $p_n(x) = \mathcal{A}_n(x) - a^n(x)$, которые вычитают призрачные сингулярности,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{1-x}; & p_2(x) &= \frac{x}{(1-x)^2}; & p_3(x) &= \frac{x(1+x)}{2(1-x)^3} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{p_2(x)}{2}; \\ p_4(x) &= p_2^2(x) - \frac{p_2(x)}{6} = -\frac{x(x-x_+)(x-x_-)}{6(1-x)^4} \quad (x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}); \quad \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

связаны рекуррентным соотношением, аналогичным (15), и, за исключением p_1 , обладают (анти)симметрией при замене $x \rightarrow 1/x$.

Как следует из этого рекуррентного соотношения, все $p_{n \geq 2}(x)$ при $x = 0$ имеют нуль первого порядка, что обеспечивает выполнение важного свойства

$$\mathcal{A}_n(0) = 0; \quad n \geq 2, \quad (21)$$

которое так же имеет место в двух- и трехпетлевом случаях.

Для количественной оценки рассмотрим поведение $\mathcal{A}_n(x)$ при $x = 1 + \epsilon$; $\epsilon \ll 1$. В однопетлевом случае с помощью выражений (20) это может быть сделано явно:

$$\mathcal{A}(x) \simeq \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{12}; \quad \mathcal{A}_2(x) \simeq \frac{1}{12} + \frac{19}{60}\epsilon^2; \quad \mathcal{A}_3(x) \simeq +\frac{\epsilon}{240}; \quad \mathcal{A}_4(x) \simeq -\frac{1}{720} + \frac{\epsilon^2}{3042}.$$

Эти численные результаты оказываются довольно полезными. Вместе с условием (21) они показывают, что в “области малых Q ” (т.е. при $Q \leq \Lambda$) мы имеем важное свойство

$$\mathcal{A}_n(x) \ll \mathcal{A}^n(x), \quad (22)$$

которое в конечном итоге ответственно за низкий уровень чувствительности результатов АТВ по отношению к высшим петлевым поправкам и схемным эффектам (см., например, заключения в работах [8–10]). Последнее соотношение оказывается справедливым и при учете высших петель.

Прибегать к выражениям вида (5), (8) и (18) для явного анализа последовательностей $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ в двух- и трехпетлевом случаях не целесообразно. Для ориентировки мы использовали численные вычисления через соответствующий спектральный интеграл. Их результаты показывают, что в интервале $Q < \Lambda$ в дополнение к соотношению (22) имеет место оценка

$$\mathcal{A}_{k+1}(x) \cong [\mathcal{A}(x)]^{1+2k}.$$

Другими словами, в “области малых Q ” реальный параметр разложения численно ближе к $\mathcal{A}^2(x)$, чем к $\mathcal{A}(x)$ ⁶⁾. В то же время с ростом Q/Λ и при уменьшении степенных слагаемых $\mathcal{A}_n(x)$ стремятся к своим естественным пределам $[\mathcal{A}(x)]^n \simeq a^n(x)$.

⁶⁾Отсюда следует, что “смешанное” представление $\mathcal{A}_n$ по степеням функции $\mathcal{A}$ с непертурбативными коэффициентами неприемлемо из-за больших численных сокращений в правой части соотношений, аналогичных уравнению (17).

Более того, как это следует из представления (20) и свойства сингулярности $\ln^{-n} x$ при $x = 0$, функции $\mathcal{A}_{n+2}(x)$ имеют ровно n нулей в интервале $(0, X(\Lambda))$. Здесь $X(\Lambda)$ является верхней границей области, где степенные непертурбативные поправки порядка $x^{-1} = \Lambda^2/Q^2$ еще существенны. Следовательно, обсуждаемая последовательность состоит из квазиосциллирующих функций. Это обстоятельство делает задачу оценки остаточного члена (погрешности) в асимптотическом разложении (13) более сложной, что характерно для асимптотического разложения в смысле Эрдейи.

Заметим еще, что последовательности $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ в рассмотренных случаях обладают особым свойством. Их последующие члены связаны дифференциальными соотношениями (15) и (18).

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы проанализировали частную версию “причинной, Q^2 -аналитичной теории возмущений” – АТВ-версию, в которой по соглашению, впервые введенному в работе [8], для аналитизации наблюдаемых используется асимптотическая последовательность $\{\mathcal{A}_n(x)\}$. Ее можно рассматривать как “нестепенную аналитизацию”, в отличие от другой – “степенной”, осуществляемой с помощью последовательности $\{\mathcal{A}^n(x)\}$, т.е. с помощью замены

$$F(a(x)) \Rightarrow F(\mathcal{A}(x)) = \sum_n f_n [\mathcal{A}(x)]^n. \quad (23)$$

Именно нестепенная аналитизация приводит к петлевой и схемной стабильности. Между тем степенная аналитизация (23) дает заметные отклонения от пКХД лишь в ИК-области.

С теоретической точки зрения эта последняя, технически более простая версия имеет преимущество в отношении *согласованности аналитизации со структурой ренормгруппы* (см. ниже п. 4.2). Для пояснения этого утверждения обратимся к структуре алгоритма РГ-метода и укажем на возможность “некоммутативности” аналитизации с некоторыми его элементами.

4.1. О произволе процедуры аналитизации. Процедура ренормгруппового метода состоит из нескольких этапов:

I. Вычисление бета-функции(й) и аномальных размерностей.

II. Решение РГ-дифференциальных уравнений (РГДУ) для инвариантной связи $a(x)$.

III. Решение РГДУ для других функций $f(Q^2, a)$, например амплитуд пропагаторов, эффективных масс и “наблюдаемых”⁷⁾, с использованием явных выражений для β -функции, найденной на этапе I, или инвариантной связи $a(x)$, полученной на этапе II. В результате вместо f возникает функция $F(a(x))$, представленная в виде степенного ряда (начинающегося, возможно, с логарифмического члена).

Аналитизацию инвариантной связи нужно рассматривать как дополнительный этап, следующий за II,

IIa: $a(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x)$.

⁷⁾ Таких как функции Адлера, моменты структурных функций и т.д.

Однако аналитизация пропагаторов и наблюдаемых может быть теперь выполнена различными способами: либо модификацией этапа III –

III_м. Использование выражения $\mathcal{A}(x)$ при решении РГДУ для функций $f(Q^2, a)$; либо как дополнительный этап, например,

IV_{АТВ}. Аналитизирование результата этапа III, т.е. применение процедуры аналитизации к степенному разложению для $F(a(x))$.

Последовательность

$$I + II + IIa + III + IV_{\text{АТВ}} = \text{АТВ} \quad (24)$$

была использована в работах [8–10]. Именно эта процедура привела к нестепенному асимптотическому разложению (13).

В то же время наряду с IV_{АТВ} имеется более простая возможность:

IV_{ан}. Подстановка явного выражения $\mathcal{A}(x)$ (как в (23)) в результат этапа III.

Таким образом, набор

$$I + II + IIa + III + IV_{\text{ан}} = \text{АИС}$$

(АИС означает “аналитизацию инвариантной связи”) также может быть использован для аналитизации наблюдаемых. Такая процедура приводит к асимптотическому разложению (23), отличающемуся от обычного (12) только заменой $a(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x)$.

Поэтому причинная аналитизация наблюдаемых оказывается неоднозначной процедурой. Примечательно, что отмеченный произвол имеет функциональную природу и не сводится к возможности введения какого-либо подгоночного параметра.

4.2. Аналитизация и структура РГ. Набор $I + II + IIa + III_{\text{м}}$ содержит внутреннее противоречие. Так, операция III_м, примененная, например, к амплитуде глюонного пропагатора⁸⁾, приводит к выражению, которое оказывается несовместным с результатом этапа IIa. На однопетлевом уровне III_м дает [14]

$$d_{\text{РГ}}^i(x) = [a(x)]^{\nu_i} \Rightarrow [\mathcal{A}_0(x)]^{\nu_i},$$

где $\mathcal{A}_0(x)$ определено в (15). Однако, как это следует из основных РГ-соотношений, произведение вершинной функции и соответствующих степеней пропагаторов образует инвариантный заряд. В применении к нашему случаю такое произведение даст $\mathcal{A}_0(x)$, а не аналитический инвариантный заряд $a_{\text{ан}}(x) = \mathcal{A}(x)$, использованный как исходный.

Аналогично этому возникает тонкость при выполнении этапа IV_{АТВ}. Дело в том, что для некоторых объектов (например, для амплитуды пропагатора) результат этапа III на однопетлевом уровне начинается с дробной степени (или логарифма) $a(x)$, что дает нефизическую особенность в виде точки ветвления. Аналитизация таких выражений как $[\ln x]^{-\nu}$ эквивалентна вычитанию вклада разреза, т.е. приводит к специфической двухчленной структуре⁹⁾. Легко видеть, что надлежащее произведение таких структур не может дать выражение (2) для инвариантного заряда. Это наблюдение, трактуемое буквально, означает, что процедура АТВ также вступает в противоречие со структурой РГ.

⁸⁾Ср. с приемом работы [11], эквивалентным этапу IV_{ан}.

⁹⁾За точными выражениями мы отсылаем, например, к работам [6, 11].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Наш анализ в разделе 3 показал, что разложение (13) “версии АТВ” для наблюдаемой в общем случае является асимптотическим разложением по нестепенной последовательности $\{\mathcal{A}_n(x)\}$. Последняя может иметь довольно разные свойства в различных областях переменной x . В УФ-области она близка к степенной последовательности $\{a^n(x)\}$, обычно используемой в современных вычислениях КТП по теории возмущений. Следовательно, сходимость в УФ-области полностью определяется коэффициентами разложения f_n . С другой стороны, в ИК-области последовательность $\{\mathcal{A}_n(x)\}$ имеет более сложную структуру. При $0 < x < 1$ поведение функций $\mathcal{A}_n(x)$, $n \geq 3$, является осциллирующим. Благодаря этому вклад высших членов в АТВ-разложении подавлен. Разложение (13) в ИК-области, по всей видимости, подобно асимптотическому разложению в смысле Эрдеи. Этот предварительный вывод дает надежду на возможность использования пертурбативного подхода в КХД в области $Q \sim 1$ ГэВ, где эффективная функция связи КХД не является малой величиной.

2. В п. 4.1 мы показали, что общая программа инвариантной аналитизации, будучи полностью определенной процедурой для эффективного заряда, не является достаточно “жесткой”, когда она применяется к другим объектам. В частности, она содержит произвол при аналитизации наблюдаемых.

Этот произвол и “близость к противоречию”, обсуждавшаяся в п. 4.2, указывают на актуальность поиска дополнительного ограничения во всем причинном аналитическом подходе. В то же время возможность, предоставляемая АТВ, слишком интересна, чтобы “отказаться от нее без борьбы”.

3. По нашему мнению, еще одним курьезным уроком рассмотренной нестепенной конструкции является полуколичественное наблюдение того, что АТВ-подход эквивалентен обычной пКХД-технике с довольно странной поправкой: “Ограничься в вычислениях только лидирующим вкладом КХД,” кстати, забывая при этом обо всех “головных болях”, связанных с вычислением диаграмм высших порядков, со схемной зависимостью и сходимостью разложений. Эта интригующая возможность могла бы быть сформулирована как предположение, что пертурбативная КХД является эффективной теорией, а вклады высших порядков не имеют ясного физического содержания¹⁰⁾.

Благодарности. Автору приятно поблагодарить И. Л. Соловцова за важные советы и помощь в численных расчетах, а также И. Я. Арефьеву, Б. А. Арбузова, В. С. Владимирова, Д. И. Казакова, А. Л. Катаева, Н. В. Красникова, Б. А. Маградзе, А. В. Нестеренко и А. А. Славнова за интерес к работе и полезное обсуждение.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты №96-01-01860, №96-15-96030) и INTAS (грант №96-0842).

¹⁰⁾ Подобно, например, вкладам высших порядков теории возмущений для эффективного четырехфермионного лагранжиана Ферми в КТП и для модельного гамильтониана БКШ в теории сверхпроводимости.

Список литературы

- [1] *D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov.* Краткие сообщения ОИЯИ. 1996. № 2[76]. С. 5; hep-ph/9604363.
- [2] *D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1209; hep-ph/9704333.
- [3] *G. Källén.* Helv. Phys. Acta. 1952. V. 25. P. 417.
- [4] *H. Lehmann.* Nuovo Cim. 1954. V. 11. P. 342.
- [5] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [6] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, Д. В. Ширков.* ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 805.
- [7] *D. V. Shirkov.* Lett. Mat. Phys. 1976. V. 1. P. 179; Lett. Nuovo Cim. 1977. V. 18. P. 452.
- [8] *K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova.* Phys. Lett. B. 1977. V. 415. P. 104; hep-ph/9706409.
- [9] *K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova.* Phys. Lett. B. 1998. V. 439. P. 421; hep-ph/9809510; The Gross-Llewellyn Smith sum rule in the analytic approach to perturbative QCD. Preprint ОКНЕР-98-07, Oklahoma Univ.; hep-ph/9809513.
- [10] *I. L. Solovtsov, D. V. Shirkov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 442. P. 344; hep-ph/9711251.
- [11] *B. A. Magradze.* The gluon propagator in analytic perturbation theory. Доклад на конференции “Кварки-98”, Суздаль, Май 1998; hep-ph/9808247.
- [12] *E. Gardi, G. Grunberg, M. Karliner.* Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure? hep-ph/9806462.
- [13] *R. M. Corless et al.* Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 329.
- [14] *D. V. Shirkov.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1998. V. 64. P. 106; hep-ph/9708480.
- [15] *А. В. Ефремов, Д. В. Ширков, Чжун Хун-юань.* ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 603; *A. V. Efremov, D. V. Shirkov, H. Y. Tzu.* The pion-pion scattering at low energy. Preprint D-757. Dubna: JINR, 1960; Scientia Sinica. 1961. V. 10. P. 812.
- [16] *Д. В. Ширков, В. А. Мещеряков, В. В. Серебряков.* Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М.: Наука, 1967.
- [17] *А. В. Нестеренко.* Моменты структурных функций в аналитическом подходе в квантовой хромодинамике. Дипломная работа. Физ. фак. МГУ, 1998.

Поступила в редакцию 14.X.1998 г.