Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, А. М. Малокостов, Функция Вигнера для свободных релятивистских частиц, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 67–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:31:25

© 1999 г. О. И. Завьялов*, А. М. Малокозов*

ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ СВОБОДНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Представлено обобщение функции Вигнера на случай свободной частицы с “релятивистским” гамильтонианом $H(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

1. ВВЕДЕНИЕ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Известно [1], что квантовое поведение нерелятивистской частицы, волновая функция которой в импульсном представлении (в момент времени $t = 0$) есть $\psi(\mathbf{p})$, может быть описано в эквивалентной “классической” форме с помощью функции Вигнера $W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$:

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \psi^*(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) \delta\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}\right) \times \\ \times \exp\left\{i\left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m}\right)t + i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\mathbf{x}\right\}. \quad (1)$$

Эту величину можно интерпретировать (см. обзор [2]) как плотность распределения в шестимерном фазовом пространстве $\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\}$ ансамбля свободных классических нерелятивистских частиц, соответствующих гамильтониану

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (2)$$

Легко проверить, что средние значения $\overline{f(\mathbf{x})}$ и $\overline{\varphi(\mathbf{p})}$ функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{p})$ по этому классическому ансамблю совпадают с соответствующими квантовыми матричными элементами:

$$\overline{f(\mathbf{x})} = \int d\mathbf{p} d\mathbf{x} W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} \tilde{\psi}^*(\mathbf{x}, t) f(\hat{\mathbf{x}}) \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

$$\overline{\varphi(\mathbf{p})} = \int d\mathbf{p} d\mathbf{x} W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} \psi^*(\mathbf{p}, t) \varphi(\hat{\mathbf{p}}) \psi(\mathbf{p}, t). \quad (4)$$

Здесь

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \psi(\mathbf{p}, t)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

и

$$\psi(\mathbf{p}, t) = e^{-i\frac{k^2}{2m}t} \psi(\mathbf{p})$$

— волновые функции в координатном и импульсном представлениях, соответственно, в момент времени t . Более того, среднее значение функции $F(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ по этому классическому ансамблю совпадает с матричным элементом

$$\langle \hat{F}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}) \rangle,$$

где $\hat{F}$ — вейлевское квантование классической функции F .

Таким образом, идея Вигнера состоит в том, что квантовая эволюция и эволюция классического ансамбля (1) тождественны. Однако эту тождественность не следует понимать слишком буквально: функция Вигнера не обязательно положительна.

Любопытно, что обобщение соотношения (1) на релятивистский случай, т.е. для гамильтониана

$$H(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (5)$$

по-видимому, неизвестно. В настоящей работе мы представим это обобщение.

Перечислим главные свойства функции Вигнера (1):

- 1) она билинейна по волновой функции $\psi(\mathbf{p})$;
- 2) после интегрирования функции W по координате $\mathbf{x}$ получается плотность вероятности в импульсном пространстве

$$\psi^*(\mathbf{p}, t) \psi(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{x} W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t);$$

- 3) после интегрирования функции W по импульсу $\mathbf{p}$ получается плотность вероятности в координатном пространстве

$$\tilde{\psi}^*(\mathbf{x}, t) \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{p} W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t);$$

- 4) функция Вигнера допускает классический закон эволюции, а именно:

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t + \tau) = W\left(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{m}\tau, t\right).$$

Свойства 1–4 легко проверить, однако мы отложим соответствующие вычисления, поскольку эти формулы будут следовать из релятивистских соотношений в пределе малых импульсов.

Хорошо известно, что наивная квантово-механическая схема несовместима с релятивистскими принципами (это было фактически главной причиной создания квантовой теории поля). Например, трудности возникают уже при построении самого оператора координаты $\hat{\mathbf{x}}$ [3]. Тем не менее предположим, что свободная частица с гамильтонианом (5) обладает волновой функцией в импульсном представлении (функцией на верхней поле массового гиперboloида), равной $\psi(\mathbf{p})$. Скалярное произведение между двумя такими функциями $\psi_1(\mathbf{p})$ и $\psi_2(\mathbf{p})$ есть

$$\langle \psi_1(\mathbf{p}), \psi_2(\mathbf{p}) \rangle = \int d\mu(\mathbf{p}) \psi_1^*(\mathbf{p}) \psi_2(\mathbf{p}),$$

где

$$d\mu(\mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}$$

– инвариантная мера на массовом гиперboloиде. Считается, что трансформационные свойства импульсных волновых функций $\psi(\mathbf{p})$ при преобразованиях Лоренца Λ таковы:

$$\psi_{\Lambda}(\mathbf{p}) = \psi(\Lambda\mathbf{p}).$$

Естественно перейти в импульсное пространство $L_2(d\mathbf{p}, \mathbb{R}^3)$ волновых функций $\psi'(\mathbf{p})$ с лебеговой мерой $d\mathbf{p}$. Соответствующий изоморфизм дается формулой

$$\psi'(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p})}},$$

а общий закон преобразования волновой функции при преобразовании Лоренца может принимать форму

$$\psi'_{\Lambda}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\omega(\Lambda\mathbf{p})}{\omega(\mathbf{p})}} e^{i\Omega(\Lambda\mathbf{p}) - i\Omega(\mathbf{p})} \psi'(\Lambda\mathbf{p}). \quad (6)$$

Здесь $\Omega(\mathbf{p})$ – произвольная вещественная функция.

Оператор импульса $\hat{\mathbf{p}}$ в этом пространстве – просто оператор умножения:

$$\hat{\mathbf{p}}\psi'(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\psi'(\mathbf{p}).$$

Из канонических коммутационных соотношений следует, что оператор координаты $\hat{\mathbf{x}}$ (если таковой существует) может быть выбран в виде

$$\hat{\mathbf{x}} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}.$$

Соответственно координатная волновая функция $\widetilde{\psi}'(\mathbf{x})$ (если таковая существует) является просто преобразованием Фурье импульсной волновой функции $\psi'(\mathbf{p})$:

$$\widetilde{\psi}'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \psi'(\mathbf{p}) e^{-i\omega(\mathbf{p})t}. \quad (7)$$

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА

Перейдем теперь к рассмотрению релятивистского случая.

Требуется найти функцию $W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$, имеющую следующие свойства (унаследованные от нерелятивистского случая):

- 1) она билинейна по функциям $\psi'(\mathbf{p})$;
- 2) будучи проинтегрированной по $\mathbf{x}$, функция W дает плотность вероятности в импульсном пространстве

$$\psi'^*(\mathbf{p}, t) \psi'(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{x} W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t);$$

3) будучи проинтегрированной по $\mathbf{p}$, функция W дает плотность вероятности в координатном пространстве

$$\widetilde{\psi'}^*(\mathbf{p}, t) \widetilde{\psi'}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{p} W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t);$$

4) функция Вигнера имеет классический закон эволюции, а именно:

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t + \tau) = W\left(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\tau, t\right);$$

5) в пределе малых импульсов функция W переходит в нерелятивистскую функцию Вигнера, определенную равенством (1).

Решение этой задачи дается формулой

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \psi'^*(\mathbf{p}_1) \psi'(\mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p} - (\mathbf{p}_1 \dot{+} \mathbf{p}_2)) \times \\ \times \exp\left(i(\omega(\mathbf{p}_1) - \omega(\mathbf{p}_2))t + i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\mathbf{x}\right). \quad (8)$$

Здесь символ $\dot{+}$ обозначает специальную “сумму на массовом гиперboloиде”: если ввести 4-векторы $P_1 = (\omega(\mathbf{p}_1), \mathbf{p}_1)$ и $P_2 = (\omega(\mathbf{p}_2), \mathbf{p}_2)$, то по определению

$$P_1 \dot{+} P_2 \equiv m \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{(P_1 + P_2)^2}},$$

а $\mathbf{p}_1 \dot{+} \mathbf{p}_2$ — просто пространственная часть 4-вектора $P_1 \dot{+} P_2$.

Другими словами,

$$\mathbf{p}_1 \dot{+} \mathbf{p}_2 = m \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\sqrt{2(m^2 + \omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)}}. \quad (9)$$

Доказательство свойств 1–5 будет дано в следующем разделе.

Разумеется, ситуация с физической интерпретацией релятивистской функции W несколько не лучше, чем в нерелятивистском случае. Она также может быть отрицательной. Далее, средние значения по классическому “ансамблю” для “смешанных” функций (зависящих одновременно от координат и импульсов) не имеют ничего общего с квантовыми матричными элементами, по крайней мере в рамках вейлевского квантования. Более того, из общих принципов классической механики следует, что функция $W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ должна быть скаляром по отношению к преобразованиям Лоренца, что никоим образом несовместимо с законами преобразования волновых функций (6). Это показывает, что даже для случая свободных частиц несовместимость между принципами квантовой механики и специальной теории относительности, возможно, является более глубокой, чем принято думать. Однако мы надеемся, что функция (8) все же может быть полезна, например, в теории “непрерывных измерений”. Нам она интересна для анализа специального представления канонических коммутационных соотношений, которое мы пытаемся применить к квантовой теории поля [4].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВ 1–5

Свойство 1 очевидно. Свойство 5 может быть получено из (9) в пределе $\omega \rightarrow m$. Свойство 3 может быть проверено непосредственно. В самом деле, интегрирование функции W по импульсу $\mathbf{p}$ снимается δ -функцией. В результате остается как раз плотность вероятности $\widetilde{\psi}^*(\mathbf{x}, t)\widetilde{\psi}'(\mathbf{x}, t)$. Рассуждения, приводящие к свойству 2, также очень просты: в результате интегрирования по координате $\mathbf{x}$ появляется δ -функция:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \exp\{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\} = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2),$$

так что эффективно

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1.$$

Таким образом, первоначальная δ -функция превращается в $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)$, а интегрирование по $\mathbf{p}_1$ немедленно приводит к нужному соотношению свойства 2.

Прежде чем обратиться к свойству 4, отметим, что выполняется следующее равенство: если $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, то

$$\omega(\mathbf{p}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \frac{\omega(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{m^2 + \omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}}. \quad (10)$$

Теперь, чтобы доказать свойство 4 (учитывая формулу (10)), достаточно убедиться в том, что

$$-\tau(\omega(\mathbf{p}_2) - \omega(\mathbf{p}_1)) + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \frac{\mathbf{p}\tau}{\omega(\mathbf{p})} = 0.$$

Следующая цепочка преобразований делает это очевидным:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}_2) - \omega(\mathbf{p}_1) &= \frac{(\omega(\mathbf{p}_2))^2 - (\omega(\mathbf{p}_1))^2}{\omega(\mathbf{p}_2) + \omega(\mathbf{p}_1)} = \frac{\mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_1^2}{\omega(\mathbf{p}_2) + \omega(\mathbf{p}_1)} = \\ &= \frac{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)}{\sqrt{m^2 + \omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}} \times \\ &\times \frac{\sqrt{m^2 + \omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}}{\omega(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{p}_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Иногда удобно рассматривать модельный случай двумерного пространства-времени. В этом случае импульсное пространство, соответствующее массовой оболочке $P^2 = m^2$, будет одномерным:

$$P = \{m \operatorname{ch} \gamma, m \operatorname{sh} \gamma\}.$$

Тогда $+$ - δ -функция может быть эффективно проинтегрирована. При этом для функции Вигнера получаем

$$\begin{aligned} W(p, x, t) &= \frac{2m^3}{\operatorname{ch} \Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \operatorname{ch}(\Gamma + \beta) \operatorname{ch}(\Gamma - \beta) \times \\ &\times \psi'^*(m \operatorname{sh}(\Gamma + \beta)) \psi'(m \operatorname{sh}(\Gamma - \beta)) \times \\ &\times \exp\left\{\frac{it}{m} [\operatorname{ch}(\Gamma + \beta) - \operatorname{ch}(\Gamma - \beta)] - \frac{ix}{m} [\operatorname{sh}(\Gamma + \beta) - \operatorname{sh}(\Gamma - \beta)]\right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В самом деле, перейдем в (8) к аналогичным переменным для одномерных импульсов p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{m} &= \text{sh } \gamma_1, & \frac{p_2}{m} &= \text{sh } \gamma_2, \\ \frac{dp_1}{m} &= \text{ch } \gamma_1 d\gamma_1, & \frac{dp_2}{m} &= \text{ch } \gamma_2 d\gamma_2.\end{aligned}$$

После этого функция Вигнера W принимает форму

$$\begin{aligned}W &= m^2 \int d\gamma_1 d\gamma_2 \text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 \psi'^*(m \text{sh } \gamma_1) \psi'(m \text{sh } \gamma_2) \times \\ &\times \exp \left\{ i \frac{t}{m} (\text{ch } \gamma_1 - \text{ch } \gamma_2) - i \frac{x}{m} (\text{sh } \gamma_1 - \text{sh } \gamma_2) \right\} \times \\ &\times m \delta \left(\text{sh } \Gamma - \frac{\text{sh } \gamma_1 + \text{sh } \gamma_2}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 - \text{sh } \gamma_1 \text{sh } \gamma_2}} \right).\end{aligned}\quad (13)$$

Выражение под знаком квадратного корня в аргументе δ -функции можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}1 + \text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 - \text{sh } \gamma_1 \text{sh } \gamma_2 &= 1 + \text{ch}(\gamma_1 - \gamma_2) = \\ &= 1 + \text{ch}^2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) + \text{sh}^2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) = 2 \text{ch}^2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, полный интеграл (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}W &= m^3 \int d\gamma_1 d\gamma_2 \Psi^*(\gamma_1, x, t) \Psi(\gamma_2, x, t) \delta \left(\text{sh } \Gamma - \text{sh } \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 = \\ &= m^3 \int d\gamma_1 d\gamma_2 \Psi^*(\gamma_1, x, t) \Psi(\gamma_2, x, t) \frac{1}{\text{ch } \Gamma} \delta \left(\Gamma - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2,\end{aligned}\quad (14)$$

где

$$\Psi(\gamma, x, t) = \psi'(m \text{sh } \gamma) \exp \left(-i \frac{t}{m} \text{ch } \gamma + i \frac{x}{m} \text{sh } \gamma \right).$$

Перейдем к новым переменным α и β :

$$\gamma_1 = \alpha + \beta, \quad \gamma_2 = \alpha - \beta.$$

В результате интегрирование по α снимается δ -функцией, и мы приходим к равенству (12).

В трехмерном случае эффективное интегрирование с помощью δ -функции также может быть произведено.

Благодарности. Настоящая работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 98-01-00162а.

Список литературы

- [1] *E. P. Wigner.* Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [2] *В. И. Татарский.* УФН. 1983. Т. 139. С. 587.
- [3] *T. D. Newton, E. P. Wigner.* Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400.
- [4] *О. И. Завьялов, А. М. Малокостов.* Квантовая теория поля с нефоковскими асимптотическими полями: существование S -матрицы. ТМФ (в печати).

Поступила в редакцию 17.IX.1998 г.