Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. С. Кабриц, М. В. Компаниец, *H*-модель критической динамики: двухпетлевой расчет РГ-функций и критических индексов, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 73–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:09:03

© 1999 г.

Л. Ц. Аджемян*, А. Н. Васильев*,
Ю. С. Кабриц*, М. В. Компаниец*

***H*-МОДЕЛЬ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ: ДВУХПЕТЛЕВОЙ РАСЧЕТ РГ-ФУНКЦИЙ И КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ**

Приводятся уточненные результаты расчета двухпетлевых вкладов в динамический индекс z (критическая размерность частоты), константу Кавасаки R и поправочные индексы ω . Полученные значения заметно отличаются от известных ранее и общепринятых сейчас значений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известная H -модель [1–3] используется для описания динамики в окрестности критической точки перехода жидкость – газ в простых жидкостях и других системах из того же класса универсальности, в частности критической точки расслоения в бинарных смесях. Двухпетлевой расчет индексов $x_\lambda = 4 - z - \eta$ и $x_{\bar{\eta}} = z - d$ для этой модели (z – критическая размерность частоты, η – статический индекс Фишера, в низшем порядке $\eta = \epsilon^2/54$ для $d = 4 - \epsilon$) был выполнен в работе [1]. Ее результаты постоянно используются при обработке экспериментальных данных [4, 5] и в других работах, имеющих отношение к H -модели, в частности при расчетах скорости и затухания звука вблизи критической точки [6]. Отсутствующие в статье [1] данные для поправочных индексов ω приводятся в работе [2] и используются, например, в статье [4], хотя конкретные выражения для ренормгрупповых (РГ) функций H -модели в [2] явно содержат опечатки (даже в знаках при однопетлевых вкладах) и не согласуются с результатами работы [1].

Занимаясь аналогичными проблемами, мы решили для надежности перепроверить результаты [1] и перевести их на современный язык (размерная регуляризация, схема минимальных вычитаний (МВ) и т.п.). В итоге мы убедились, что расчет в [1] принципиально совершенно правилен, но содержит техническую ошибку в численной оценке входящих в ответ конкретных интегралов (подробнее см. ниже разделы 4–6 и приложение). Наш ответ для динамического индекса $z \equiv \Delta_\omega$ (критическая размерность частоты ω ; в

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

обозначениях [1] $z = 4 - \eta - x_\lambda = d + x_{\overline{\eta}}$ и универсальной “амплитуды Кавасаки” R (точное определение см. в разделе 5) при $d = 4 - \epsilon$ выглядит следующим образом:

$$z = 4 - \frac{18\epsilon}{19}[1 - 0.0196\epsilon], \quad R = K_d \frac{19}{24\epsilon}[1 - 0.054\epsilon], \quad (1)$$

где $K_d \equiv S_d/(2\pi)^d$, $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — d -мерный угловой интеграл, $\Gamma(z)$ — гамма-функция. В работе же [1] (соотношения (1.3а) для x_λ и соотношение (2.19) для R , в которых $\eta = \epsilon^2/54$) получено

$$z = 4 - \frac{18\epsilon}{19}[1 - 0.013\epsilon], \quad R = K_d \frac{19}{24\epsilon}[1 + 0.06\epsilon]. \quad (2)$$

Наши результаты для двухпетлевых вкладов в поправочные индексы ω (соотношения (52) и (77), см. ниже) также отличаются от полученных ранее в работе [2].

Из сравнения результатов (1) и (2) видно, что расхождение в двухпетлевых вкладах заметное (в R даже по знаку). На численных значениях z и R при $\epsilon = 1$ ($d = 3$) оно слабо отражается из-за малости двухпетлевых поправок (наиболее существенно различие в R , порядка 10%). Однако с точки зрения теории расхождение между двухпетлевыми вкладами в (1) и (2) значительно. Поэтому оно заслуживает обсуждения, чему и посвящена данная статья. Многие детали расчетов в статье [1] требуют комментариев и пояснений. Они приводятся в разделах 2–6 и в приложении. В разделе 6 также дается общий анализ поправок к скейлингу, из которого следует, во-первых, что индекс ω_w в статье [2] однозначно выражается через индекс z , и, во-вторых, что введенных в работе [2] двух индексов ω недостаточно для описания поправок к скейлингу.

2. УПРОЩЕННАЯ H_0 -МОДЕЛЬ

H -модель описывает критическую динамику системы полей $\varphi = \{\psi(x), v_i(x), x \equiv t, \mathbf{x}\}$, где ψ — поле “параметра порядка”, v_i — поперечное ($\partial_i v_i = 0$) векторное поле скорости среды (в работах [1–3] вместо поля v используется пропорциональная ему величина j , но эквивалентная j переменная v проще по смыслу и более удобна при обсуждении галилеевой инвариантности). Модель задается статическим функционалом действия для не зависящих от времени t полей $\varphi(\mathbf{x})$

$$S^{\text{st}}(\varphi) = -\frac{(\partial\psi)^2}{2} - \frac{\tau_0\psi^2}{2} - \frac{g_{10}\psi^4}{24} - \frac{av^2}{2} = S^{\text{st}}(\psi) - \frac{av^2}{2}. \quad (3)$$

Здесь подразумевается интегрирование по d -мерному аргументу полей $\mathbf{x}$, а запись (3) соответствует равновесному статическому распределению $\exp(S^{\text{st}}(\varphi))$ без минуса в показателе. Динамическая H -модель определяется следующей системой стохастических уравнений:

$$\partial_t \psi = -\lambda_0 \partial^2 H_\psi - (v\partial)\psi + \eta_\psi, \quad (4)$$

$$\partial_t v = P^\perp (\eta_0 \partial^2 v + a^{-1} \psi \partial H_\psi + \eta_v), \quad (5)$$

$$\langle \hat{\eta}_\psi(x) \hat{\eta}_\psi(x') \rangle = -2\lambda_0 \partial^2 \delta(x - x'), \quad \langle \hat{\eta}_v(x) \hat{\eta}_v(x') \rangle = -2a^{-1} \eta_0 \partial^2 \delta(x - x'), \quad (6)$$

где $P^\perp$ в уравнении (5) – поперечный проектор по векторным индексам поля v и

$$H_\psi \equiv \left. \frac{\delta S^{\text{st}}(\varphi)}{\delta \psi(\mathbf{x})} \right|_{\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x)}. \quad (7)$$

Величины $\eta_\varphi(x)$ в уравнениях (4) и (5) – любые конкретные реализации случайных источников (“шумов”) $\hat{\eta}_\varphi(x)$ с гауссовым распределением, заданным корреляторами (6) и условием $\langle \hat{\eta}_\varphi(x) \rangle = 0$. Статическое действие (3) считается неренормированным, входящие в него параметры – затравочными, λ_0 и η_0 в уравнениях (4)–(6) – затравочные коэффициенты теплопроводности и вязкости. Все затравочные параметры отмечаются индексом 0, теми же буквами без такого индекса обозначаются их ренормированные аналоги (коэффициент a в соотношении (3) ренормироваться не будет).

По общему правилу [2, 7] стохастическая задача (4)–(6) эквивалентна квантово-полевой модели с удвоенным числом полей $\phi = \{\varphi, \varphi'\} = \{\psi, v, \psi', v'\}$ (v' – поперечное векторное поле) и функционалом действия

$$S(\phi) = -\lambda_0 \psi' \partial^2 \psi' + \psi' (-\partial_t \psi - \lambda_0 \partial^2 H_\psi - v \partial \psi) - \\ - a^{-1} \eta_0 v' \partial^2 v' + v' (-\partial_t v + \eta_0 \partial^2 v + a^{-1} \psi \partial H_\psi) \quad (8)$$

(интегрирование по $x = t, \mathbf{x}$ и необходимые суммирования по векторным индексам подразумеваются). Если выполнить в (8) растяжение $v' \rightarrow av'$ вспомогательного поля v' и ввести обозначение

$$g_{20} = (a\eta_0\lambda_0)^{-1}, \quad (9)$$

то получим следующее выражение для неренормированного динамического действия:

$$S(\phi) = -\lambda_0 \psi' \partial^2 \psi' + \psi' (-\partial_t \psi - \lambda_0 \partial^2 H_\psi - v \partial \psi) - \\ - \lambda_0^{-1} g_{20}^{-1} v' \partial^2 v' + v' (-a \partial_t v + \lambda_0^{-1} g_{20}^{-1} \partial^2 v + \psi \partial H_\psi). \quad (10)$$

Определенный в (9) параметр g_{20} имеет смысл затравочного заряда межмодового взаимодействия, а параметр g_{10} в (3) – затравочный статический заряд (в обозначениях работы [1] $v = g_0 j$, $v' = g_0 j'$, $a = g_0^{-2}$, $g_{20} = g_0^2 / \lambda_0 \eta_0$).

В инфракрасной (ИК) асимптотике относительная существенность различных вкладов в функционале (10) определяется значениями “суммарных размерностей” d_F входящих в (10) числовых коэффициентов. Для произвольной величины F (поля или параметра) значение d_F определяется соотношением

$$d_F = d_F^p + d_\omega d_F^\omega, \quad (11)$$

где d_F^p и d_F^ω – импульсная и частотная канонические размерности данной величины F [7], d_ω – суммарная размерность частоты, которая определяется по виду линеаризованных стохастических уравнений при $T = T_c$ (т.е. $\tau_0 = 0$ в (3)). В нашем случае в линейную часть уравнения (4) входит комбинация $\partial_t + \text{const} \cdot \partial^4$, а в уравнение (5) – другая комбинация $\partial_t + \text{const} \cdot \partial^2$. Поэтому определение суммарной размерности частоты d_ω в данном случае неоднозначно и зависит от выбора асимптотического режима при $p \rightarrow 0$: либо

$\omega \sim p^4$, либо же $\omega \sim p^2$. В такой ситуации выбор режима фактически является просто одним из элементов точной постановки асимптотической задачи. Во всех работах, посвященных H -модели, исследуется режим $\omega \sim p^4$, соответствующий полноценной динамике для поля параметра порядка ψ , что означает выбор $d_\omega = 4$ в соотношении (11).

В таком режиме вклад, пропорциональный величине $v' \partial_t v$ в (10), является в действительности ИК-несущественным и может быть отброшен. В этом можно убедиться по данным таблицы, в которой приведены канонические размерности всех полей и параметров (в том числе и ренормированных, которые будут определены позднее) модели (10) при $d = 4 - \epsilon$, $d_\omega = 4$.

	ψ	ψ'	v, v'	a	λ, λ_0	g_{10}, g_{20}	g_1, g_2	τ, τ_0	μ
d_F^p	$1 - \epsilon/2$	$3 - \epsilon/2$	-1	$6 - \epsilon$	-4	ϵ	0	2	1
d_F^ω	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
d_F	$1 - \epsilon/2$	$3 - \epsilon/2$	3	$-2 - \epsilon$	0	ϵ	0	2	1

Из таблицы видно, что в логарифмической теории ($\epsilon = 0$) коэффициент a в выражении (10) имеет отрицательную суммарную размерность $d_a = -2$, тогда как для всех других коэффициентов в (10) $d_F = 0$. Это и означает, что вклад $-av' \partial_t v$ в (10) является ИК-несущественным по сравнению с прочими, т.е. дает лишь поправки к скейлингу и при анализе ведущих критических сингулярностей может быть отброшен. Динамическую модель (10) с $a = 0$ для краткости будем называть H_0 -моделью.

3. РЕНОРМИРОВКА И РГ-АНАЛИЗ H_0 -МОДЕЛИ

Мы будем рассматривать ренормировку в схеме МВ. Она осуществляется применением стандартной ренормировочной R -операции схемы МВ к диаграммам базовой теории, которая получается из неренормированной заменой всех затравочных параметров базовыми (для τ_0 и λ_0 базовые параметры совпадают с ренормированными, для зарядов эта замена будет определена ниже). Подставив в (10) явное выражение для производной H_ψ (7) действия (3) и выполнив указанную выше замену параметров, для динамического базового действия H -модели получим соотношение

$$S_B(\phi) = -\lambda \psi' \partial^2 \psi' + \psi' [-\partial_t \psi - \lambda \partial^2 (\partial^2 \psi - \tau \psi - g_{1B} \psi^3 / 6) - v \partial \psi] - \\ - \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} v' \partial^2 v' + v' [-a \partial_t v + \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v + \psi \partial (\partial^2 \psi)], \quad (12)$$

где $g_{iB} = g_i \mu^\epsilon$ ($i = 1, 2$) – базовые заряды, μ – ренормировочная масса, τ, λ, a и $g_{1,2}$ – ренормированные параметры, их канонические размерности приведены в таблице. В слагаемом $v' \psi \partial H_\psi$ от производной (7) статического базового действия (3) остается лишь вклад $\partial^2 \psi$ в H_ψ вследствие поперечности поля v' .

На языке функционала действия ренормировка осуществляется добавлением к базовому действию (12) всех нужных для устранения ультрафиолетовых (УФ) расходимостей (полюсов по ϵ в функциях Грина) контрчленов. Вклад $-av' \partial_t v$ в соотноше-

нии (12) понимается при этом как добавление ИК-несущественного составного оператора. Контрчлены строятся в форме рядов по a . Линейные по a контрчлены соответствуют ренормировке $v'\partial_t v \rightarrow [v'\partial_t v]_R$ данного составного оператора.

Таким образом, полное выражение для ренормированного действия H -модели выглядит следующим образом:

$$S_R(\phi) = S_R^{(0)}(\phi) - a[v'\partial_t v]_R + \dots, \quad (13)$$

где $S_R^{(0)}(\phi)$ – вклады нулевого порядка по a , $[v'\partial_t v]_R$ – ренормированный составной оператор, многоточие обозначает поправки порядка a^2 и выше от контрчленов диаграмм со вставками двух или более таких операторов.

В действительности нас интересует лишь первое слагаемое в разложении (13), т.е. ренормированное действие H_0 -модели, поскольку все кратные $a, a^2, \dots$ поправки в функциях Грина являются ИК-несущественными (см. раздел 2). Однако при работе с диаграммами слагаемое $-av'\partial_t v$ в соотношении (12) нужно сначала сохранять и лишь потом переходить к пределу $a \rightarrow 0$, поскольку прямая подстановка в диаграммы пропагаторов модели (12) с $a = 0$ иногда приводит к неопределенностям. Отметим, что аналогичная операция (отбор вкладов, эквивалентный в наших обозначениях предельному переходу $a \rightarrow 0$) используется и в работе [1].

Общая структура необходимых для ренормировки H_0 -модели контрчленов определяется стандартными правилами, основанными на “соображениях размерности”. Суммарная каноническая размерность d_Γ любой 1-неприводимой функции Γ базовой теории (12) в общем случае определяется соотношением $d_\Gamma = d + d_\omega - \sum_\phi n_\phi d_\phi$, где n_ϕ – число полей ϕ (у нас $\phi = \{\psi, v, \psi', v'\}$) в данной функции Γ , d_ϕ – их суммарные канонические размерности. Формальный индекс расходимости d_Γ^* есть значение d_Γ в логарифмической теории, т.е. при $\epsilon = 0$. В нашей модели (12) по данным таблицы получаем, что $d_\Gamma^* = 8 - n_\psi - 3n_{\psi'} - 3n_v - 3n_{v'}$. Однако “реальный индекс” δ_Γ в нашей модели меньше формального, а именно $\delta_\Gamma = d_\Gamma^* - n_{\psi'} - n_{v'}$, поскольку из вида трех вершин взаимодействия в (12) следует, что на каждую внешнюю линию вспомогательных полей $\varphi' = \{\psi', v'\}$ в функциях Грина Γ (следовательно, и на поля φ' в соответствующих контрчленах) обязательно выделяется, как минимум, один “множитель” ∂ . Из сказанного следует, что поля φ' могут входить в контрчлены только в виде $\partial\varphi'$, т.е. вместе с символом ∂ . Поэтому контрчленов типа $\psi'\partial_t\psi$ быть не может, так что этот вклад в (12) не ренормируется.

По общим правилам схемы МВ контрчлены порождаются диаграммами только тех функций Γ , для которых δ_Γ – целое неотрицательное число, а их размерность (количество символов ∂) определяется величиной d_Γ^* . Учитывая все эти соображения, по известным (см. выше) значениям d_Γ^* и δ_Γ нетрудно убедиться, что все возможные контрчлены H_0 -модели имеют вид слагаемых базового действия (12) с $a = 0$ и, следовательно, могут быть воспроизведены введением различных безразмерных констант ренормировки Z при слагаемых базового действия. Исключение составляют вклады $-\psi'\partial_t\psi$ и $-\psi'(v\partial)\psi$, которые не ренормируются: первый из-за отсутствия в нем символов ∂ (см. выше), а второй вследствие галилеевой инвариантности H_0 -модели, которая не должна

нарушаться ренормировкой (в обсуждаемых вкладах ∂_t и $v\partial$ группируются в галилеево-ковариантную производную $\nabla_t = \partial_t + (v\partial)$, то же самое должно быть справедливым и для ренормированного действия). Отметим, что галилеева инвариантность имеет место только в H_0 -модели и нарушается вкладом $-av'\partial_t v$ в (12).

Таким образом, стандартный анализ размерностей приводит к выводу, что ренормированное действие H_0 -модели (первое слагаемое в (13)) должно иметь следующий вид:

$$S_R^{(0)}(\phi) = -Z_1 \lambda \psi' \partial^2 \psi' + \psi' \left[-\partial_t \psi - \lambda \partial^2 \left(Z_2 \partial^2 \psi - Z_3 \tau \psi - \frac{Z_4 g_{1B} \psi^3}{6} \right) - v \partial \psi \right] - \\ - Z_5 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} v' \partial^2 v' + v' [Z_6 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v + Z_7 \psi \partial(\partial^2 \psi)] \quad (14)$$

с некоторыми безразмерными константами ренормировки $Z_1, \dots, Z_7$.

Во всех посвященных H -модели работах считается, что ренормировка в соотношении (14), как обычно, мультипликативна и согласована со статикой, т.е. функционал (14) получается из неренормированного действия (10) с $a = 0$ стандартной мультипликативной ренормировкой всех полей и параметров:

$$S_R^{(0)}(\phi) = S^{(0)}(Z_\phi \phi), \quad Z_\phi \phi \equiv \{Z_\psi \psi, Z_{\psi'} \psi', Z_v v, Z_{v'} v'\}, \quad (15) \\ \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad \lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad g_{i0} = g_i \mu^\epsilon Z_{g_i}, \quad i = 1, 2,$$

где $S^{(0)}(\phi)$ – функционал (10) с $a = 0$. Если это так, то из отсутствия ренормировки двух вкладов в (14) вытекают равенства $Z_{\psi'} Z_\psi = 1$, $Z_{\psi'} Z_\psi Z_v = 1$. Анализируя ренормировку вклада $v'\partial_t v$ в (13) как ренормировку составного оператора, нетрудно убедиться, что к нему могут примешиваться другие операторы той же размерности, но сам он контрчленом быть не может по тем же причинам, по которым отсутствует ренормировка вклада $\psi'\partial_t \psi$. Можно показать, что отсюда вытекает равенство $Z_{v'} Z_v = 1$ для констант ренормировки в (15). В итоге приходим к соотношениям

$$Z_v = Z_{v'} = 1, \quad Z_{\psi'} = Z_\psi^{-1}, \quad (16)$$

а условие мультипликативности ренормировки (15) для констант Z в (14) выражается с учетом (16) следующими равенствами:

$$Z_1 = Z_\lambda Z_{\psi'}^2, \quad Z_2 = Z_\lambda, \quad Z_3 = Z_\lambda Z_\tau, \quad Z_4 = Z_\lambda Z_{g_1} Z_\psi^2, \\ Z_5 = Z_6 = Z_\lambda^{-1} Z_{g_2}^{-1}, \quad Z_7 = Z_\psi^2. \quad (17)$$

Требование согласованности со статикой означает, что для присутствующих в статическом действии (3) с $a = 0$ величин ψ , τ_0 , g_{10} динамические константы ренормировки совпадают со статическими, т.е.

$$Z_F = Z_F^{\text{st}}, \quad F = \psi, \tau, g_1. \quad (18)$$

Соотношения (16)–(18) выражают свойства мультипликативности и согласованности со статикой ренормировки динамической H_0 -модели. Следуя общепринятому мнению, мы будем в дальнейшем считать эти соотношения правильными, хотя необходимо

отметить, что ни в одной из известных нам работ их формальное доказательство не приводится (мы надеемся опубликовать такое доказательство в отдельной работе).

Таким образом, существенно новыми в динамике являются только константы ренормировки Z_λ и Z_{g_2} , а все прочие выражаются через них и (считающиеся известными) статические константы (18).

По любой из констант Z_a определяется РГ-функция аномальной размерности γ_a соответствующей величины a (поля или параметра), а по любому из зарядов g — β -функция данного заряда:

$$\gamma_a = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_a, \quad \beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g, \quad (19)$$

здесь и далее $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах. Из определений (19) и формул ренормировки (15) для наших зарядов $g_{1,2}$ имеем

$$\beta_i \equiv \beta_{g_i} = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g_i = g_i(-\epsilon - \gamma_{g_i}), \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Стандартные РГ-уравнения для любой мультипликативно ренормируемой ($F = Z_F F_R$) величины F (например, функции Грина) записываются в виде

$$[\mathcal{D}_{\text{РГ}} + \gamma_F] F_R = 0, \quad \gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F, \quad (21)$$

где γ_F — РГ-функция аномальной размерности данной величины F , а $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ — операция $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ в ренормированных переменных:

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} = \tilde{\mathcal{D}}_\mu = \mathcal{D}_\mu + \sum_g \beta_g \partial_g - \sum_e \gamma_e \mathcal{D}_e, \quad \mathcal{D}_x \equiv x \partial_x \quad \forall x, \quad (22)$$

с суммированием по всем зарядам g в слагаемых $\beta_g \partial_g$ и по всем прочим параметрам e в слагаемых с $\mathcal{D}_e$ (в H_0 -модели $g = g_{1,2}$ и $e = \tau, \lambda$). Если в уравнениях (21) величина F_R — любая ренормированная связная функция Грина полей ϕ H_0 -модели, то

$$\gamma_F = \sum_\phi n_\phi \gamma_\phi$$

— сумма аномальных размерностей γ_ϕ всех входящих в F_R полей ϕ , мультииндекс n_ϕ — числа соответствующих полей.

При наличии ИК-притягивающей фиксированной точки $g_* = (g_{1*}, g_{2*})$ из РГ-уравнений типа (21) вытекает существование “критического скейлинга” в ИК-асимптотике $p \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ при фиксированных параметрах $\mu, \lambda, g_{1,2}$. РГ-уравнение для ИК-асимптотики $F_R|_{\text{ИК}}$ рассматриваемой величины F_R получается простой подстановкой $g = g_*$ в (21); при этом все вклады с β -функциями исчезают ($\beta(g_*) = 0$), а все РГ-функции $\gamma_e = \gamma_e(g)$ становятся константами $\gamma_e^* = \gamma_e(g_*)$. Явные выражения для критических размерностей Δ_F различных величин F (полей и параметров) проще всего можно получить комбинированием РГ-уравнения (21) (при $g = g_*$) с двумя (импульсным и частотным) каноническими масштабными уравнениями, которые для функций в координатном представлении ($F_R = F_R(t, \mathbf{x}, \dots)$), где t — совокупность всех времен,

$\mathbf{x}$ — всех координат, многочлен — прочие переменные) имеют в общем случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_{\mathbf{x}} + \sum_e d_e^p \mathcal{D}_e - d_F^p \right] F_R &= 0, \\ \left[-\mathcal{D}_t + \sum_e d_e^\omega \mathcal{D}_e - d_F^\omega \right] F_R &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где d_F^p и d_F^ω — импульсная и частотная канонические размерности соответствующей величины F . Вклад с $\mathcal{D}_g$ в (23) отсутствует вследствие безразмерности всех ренормированных зарядов. Подставив в уравнения (22) и (23) значения $e = \tau, \lambda$ с известными из таблицы (см. раздел 2) каноническими размерностями, а затем исключив из системы трех уравнений (23) и (21) (где $g = g_*$) вклады с $\mathcal{D}_\mu$ и $\mathcal{D}_\lambda$ (поскольку параметры μ и λ считаются фиксированными в исследуемой ИК-асимптотике), получим искомое уравнение критического скейлинга

$$[-\mathcal{D}_{\mathbf{x}} + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_\tau \mathcal{D}_\tau - \Delta_F] F_R|_{\text{ИК}} = 0, \quad (24)$$

в котором $\Delta_t = -\Delta_\omega \equiv -z$, $\Delta_\tau \equiv 1/\nu$ — критические размерности данных величин (z и ν — традиционные обозначения, $\Delta_p = -\Delta_{\mathbf{x}} = 1$ — стандартное условие нормировки размерностей):

$$\Delta_\omega \equiv z = 4 - \gamma_\lambda^*, \quad \Delta_\tau \equiv \frac{1}{\nu} = 2 + \gamma_\tau^*, \quad (25)$$

а Δ_F — критическая размерность рассматриваемой величины F ,

$$\Delta_F = d_F^p + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^* = d_F - \gamma_\lambda^* d_F^\omega + \gamma_F^*. \quad (26)$$

Соотношение (26) справедливо для любых величин F , в частности для самих полей и их функций Грина, а также и для систем смешивающихся при ренормировке составных операторов, когда его следует считать матричным. Для полей $\phi = \{\psi, \psi', v, v'\}$ с учетом данных таблицы раздела 2 и следствий соотношений (16) для РГ-функций (19) ($\gamma_{\psi'}^* = -\gamma_\psi^*$, $\gamma_v^* = \gamma_{v'}^* = 0$) из (26) получаем

$$\Delta_\psi = d_\psi + \gamma_\psi^*, \quad \Delta_{\psi'} = d_{\psi'} - \gamma_\psi^*, \quad \Delta_v = \Delta_{v'} = -1 + \Delta_\omega, \quad (27)$$

где $d_\psi = d/2 - 1$, $d_{\psi'} = d/2 + 1$ — канонические размерности этих полей, $\gamma_\psi^* = \eta/2$ — обычный статический индекс простой ψ^4 -модели.

Соотношения (19) и (25)–(27) позволяют вычислять все представляющие интерес критические размерности по соответствующим константам ренормировки Z . В работе [1] и других работах по H -модели используются показатели x_λ и $x_{\overline{\eta}}$, которые выражаются через индекс z из соотношений (25) следующим образом (см. раздел 5):

$$x_\lambda = 4 - \eta - z, \quad x_{\overline{\eta}} = z - d, \quad (28)$$

где $\eta = 2\gamma_\psi^*$ — статический индекс Фишера.

4. ДВУХПЕТЛЕВОЙ РАСЧЕТ В СХЕМЕ МВ

Константы ренормировки Z в действии (14) вычисляются по УФ-расходимостям 1-неприводимых диаграмм функций Грина базовой теории (12) с $a \rightarrow 0$. Конкретные расчеты удобно выполнять в t, k -представлении, в котором пропагаторы (линии диаграмм) базовой теории (12) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \psi \psi' \rangle &= \langle \psi' \psi \rangle^T = \theta(t - t') \exp[-\epsilon_k(t - t')], \\ \langle \psi \psi \rangle &= (k^2 + \tau)^{-1} \exp[-\epsilon_k |t - t'|], \quad \langle \psi' \psi' \rangle = 0, \\ \langle vv' \rangle &= \langle v' v \rangle^T = P^\perp \delta^{-1} \lambda g_{2B} \theta(t - t') \exp[-\delta^{-1} k^2(t - t')], \\ \langle vv \rangle &= P^\perp \delta^{-1} \lambda g_{2B} \exp[-\delta^{-1} k^2 |t - t'|], \quad \langle v' v' \rangle = 0, \\ \epsilon_k &\equiv \lambda k^2(k^2 + \tau), \quad g_{2B} = g_2 \mu^\epsilon, \quad \delta \equiv a \lambda g_{2B} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где транспонирование соответствует перестановке t и t' , $P^\perp$ — поперечный проектор по векторным индексам полей v, v' , а параметр $\delta^{-1} = \eta$ имеет смысл коэффициента вязкости. В пределе $\delta = 0$ выражения (29) для пропагаторов полей v, v' принимают вид

$$\langle vv' \rangle = P^\perp \lambda g_{2B} k^{-2} \delta(t - t'), \quad \langle vv \rangle = 2P^\perp \lambda g_{2B} k^{-2} \delta(t - t'). \quad (30)$$

Хотя нас интересует именно предельная H_0 -модель с $\delta = 0$, прямую подстановку линий (30) можно выполнять не во всех диаграммах. В некоторых из них такая подстановка ведет к неопределенности, которую тогда следует раскрывать подстановкой выражений (29) для пропагаторов $\langle vv \rangle$ и $\langle vv' \rangle$ с последующим предельным переходом $\delta \rightarrow 0$. Такие пределы всегда существуют и определены однозначно.

Константы Z_λ и Z_{g_2} можно вычислить, например, по УФ-расходимостям диаграмм 1-неприводимых функций отклика $\Gamma_{\varphi', \varphi}^B(\omega, k)$ базовой теории (12) с $a \rightarrow 0$:

$$\Gamma_{\psi', \psi}^B = i\omega - \epsilon_k + \Sigma, \quad \Gamma_{v', v}^B = P^\perp [-\lambda^{-1} g_{2B}^{-1} k^2 + \Pi], \quad (31)$$

где $\epsilon_k \equiv \lambda k^2(k^2 + \tau)$, $g_{2B} = g_2 \mu^\epsilon$ — базовый заряд межмодового взаимодействия, а Σ и Π — суммы соответствующих 1-неприводимых диаграмм (величина Π в (31) — скаляр, коэффициент при поперечном проекторе). В формулировке (12) заряд g_2 входит множителем не в вершины, а в линии полей v, v' .

С двухпетлевой точностью в условных обозначениях работы [1] имеем

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\text{Diagram A}}{\text{A}} + \frac{\text{Diagram a}}{\text{a}} + \frac{\text{Diagram b}}{\text{b}} + \frac{\text{Diagram c}}{\text{c}} + \\ &+ \frac{\text{Diagram d}}{\text{d}} + \frac{\text{Diagram B}}{\text{B}} + \frac{\text{Diagram C}}{\text{C}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Pi = \frac{\text{Diagram a}}{\text{a}} + \frac{\text{Diagram b}}{\text{b}} + \frac{\text{Diagram c}}{\text{c}} \dots \quad (33)$$

Сплошные линии в диаграммах (32), (33) соответствуют полям ψ , ψ' , а штриховые — полям v , v' . Нумерация диаграмм а, б, с, д в (32) и (33) такая же, как и в работе [1]. Для полноты мы добавили в Σ диаграммы А, В, С с чисто статическим взаимодействием, хотя для расчета интересующей нас динамической константы $Z_\lambda = Z_2$ в (14) они несущественны: диаграммы $\Sigma_{A,B}$ вообще не дают вклада в эту константу (они порождают лишь вклады в Z_3 в (14)), а диаграмма Σ_C дает вклад в Z_λ , но он заранее известен (отбрасывание в Σ всех диаграмм с межмодовым взаимодействием приводит к “модели В” [3], для которой константа $Z_\lambda = Z_\psi^2$ известна из статики; отсюда определяется без вычислений вклад в Z_λ всех чисто статических диаграмм в модели (14)). В выражениях (32) и (33) отсутствуют двухпетлевые “перекрестные” диаграммы с одним статическим и одним межмодовым взаимодействиями, поскольку известно [1], что они не дают вкладов (в таких диаграммах всегда есть подграф вида $\langle \psi^2(x)v_i(x') \rangle$, равный нулю в силу трансляционной инвариантности и поперечности поля v).

Согласованные с работой [1] обозначения диаграмм в (32), (33) условные; в подробной записи, например,

$$\Sigma_A = \frac{1}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} , \quad \Sigma_a = \text{---}\text{---}\text{---} + \text{---}\text{---}\text{---} , \quad (34)$$

перечеркнутым концам линий соответствуют вспомогательные поля ψ' , v' , а неперечеркнутым — основные поля ψ , v . Аналогичная соотношениям (34) расшифровка всех прочих диаграмм в (32), (33) дает 7 графиков для Σ_b , 4 для Σ_c , 8 для Σ_d , 7 для Π_b и 5 для Π_c .

Приведем теперь результаты расчета и краткие пояснения (сравнение с вычислениями, выполненными в работе [1], см. в приложении).

Для расчета констант Z_2 и Z_6 в действии (14) (а по ним Z_λ и Z_{g_2} с помощью формул (17)) достаточно найти УФ-расходящиеся вклады диаграмм $\Sigma_{a,b,c,d}$ и $\Pi_{a,b,c}$ при нулевой внешней частоте ω и отличном от нуля внешнем импульсе k , а затем добавить в Σ известный (см. выше) вклад статической диаграммы Σ_C . После суммирования по всевозможным “временным версиям” (вариантам упорядочения времен вершин) и интегрирования по всем этим временам ответ для каждой из диаграмм представляется в виде интеграла по циркулирующим d -мерным “импульсам интегрирования”. Такие ответы для всех интересующих нас двухпетлевых диаграмм при $d = 4$ приведены в приложении Е работы [1]. Мы проверили, что все они правильны с точностью до опечатки (именно опечатки, а не ошибки, поскольку она не отражается на последующих вычислениях) в выражении для вклада Π_b из [1], в котором пропущен общий множитель $1/3$. Отметим, что этот и аналогичный множитель $1/3$ в выражении для $\Sigma_b + \Sigma_c$ из [1] в переменной размерности $d = 4 - \epsilon$ нужно понимать как $1/(d - 1)$, что существенно при вычислении полюсов по ϵ в размерной регуляризации; сам вид подынтегральных выражений при переходе от $d = 4$ к $d = 4 - \epsilon$ не изменяется.

В статье [1] показано (и мы это подтверждаем), что при $\omega = 0$ из диаграмм Σ_a , $\Sigma_b + \Sigma_c$ и Σ_d всегда можно выделить множитель $\epsilon_k = \lambda k^2(k^2 + \tau)$, а из диаграмм $\Pi_{a,b,c}$ — множитель k^2 . Поэтому удобно ввести безразмерные “нормированные” функции

$$\overline{\Sigma} = \frac{\Sigma(\omega = 0, k)}{\epsilon_k}, \quad \overline{\Pi} = \frac{\lambda g_2 \mu^\epsilon \Pi(\omega = 0, k)}{k^2}, \quad (35)$$

которым соответствуют логарифмически расходящиеся импульсные интегралы. Это позволяет вычислять их расходящиеся части не только с нулевой внешней частотой ω , но и с нулевым внешним импульсом k , оставляя в качестве регуляризатора только входящий в линии “массовый параметр” τ (что и делается в работе [1], но только не в размерной регуляризации, а с обрезанием Λ).

Существенные для дальнейшего вклады (полюс по ϵ плюс константа) в однопетлевые выражения $\bar{\Sigma}_1 = \bar{\Sigma}_a$ и $\bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_a$ нормированных функций (35) с $\omega = 0$ и $k = 0$ можно представить следующим образом:

$$\bar{\Sigma}_1 = \bar{\Sigma}_a = \epsilon^{-1} u_2 q^{\epsilon/2} A_1 (1 + \alpha_1 \epsilon), \quad \bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_a = \epsilon^{-1} u_2 q^{\epsilon/2} B_1 (1 + \beta_1 \epsilon). \quad (36)$$

Для суммы вкладов двухпетлевых диаграмм $\Sigma_2 = \Sigma_b + \Sigma_c + \Sigma_d$ и $\Pi_2 = \Pi_b + \Pi_c$ в нормированные функции (35) аналогично имеем

$$\bar{\Sigma}_2 = \epsilon^{-2} u_2^2 q^\epsilon A_2 (1 + \alpha_2 \epsilon), \quad \bar{\Pi}_2 = \epsilon^{-2} u_2^2 q^\epsilon B_2 (1 + \beta_2 \epsilon). \quad (37)$$

Здесь и далее используются обозначения

$$u_i \equiv \frac{g_i}{16\pi^2}, \quad i = 1, 2, \quad q^{\epsilon/2} \equiv \left(\frac{4\pi\mu^2}{\tau} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (38)$$

Наш расчет для коэффициентов в выражениях (36), (37) дает

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{3}{2}, & \alpha_1 &= \frac{5}{12}, & B_1 &= -\frac{1}{12}, & \beta_1 &= \frac{1}{6}, \\ A_2 &= B_2 = \frac{1}{16}, & \alpha_2 &= B + \frac{5}{6}, & \beta_2 &= -\frac{1}{12}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$B = 8(I_1 - 2I_2), \quad (40)$$

а $I_{1,2}$ – следующие конечные интегралы:

$$I_1 = \int_0^1 dx \left\langle \frac{(1-t^2)[(x^2+1)(4t^3-6t) + x(8t^4-6t^2-1)]}{[1+x^4+(1+2xt+x^2)^2]} \right\rangle, \quad (41)$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \left\langle \frac{xt(1-t^2)(x+2t)(1+2xt)}{(1+2xt+x^2)[1+x^4+(1+2xt+x^2)^2]} \right\rangle, \quad (42)$$

в которых $t \equiv \cos \theta$, а символ $\langle \dots \rangle$ обозначает угловое усреднение при $d = 4$, т.е. усреднение по θ в интервале $(0, \pi)$ с весом $\sin^2 \theta$.

Для конкретности приведем также вклады отдельных двухпетлевых диаграмм (32), (33) H_0 -модели в множители $A_2(1 + \alpha_2 \epsilon)$ для Σ и $B_2(1 + \beta_2 \epsilon)$ для Π в (37):

$$\begin{aligned} \Sigma_b &= 0, & \Sigma_c &\propto \frac{1}{16} \left[1 + \epsilon \left(\frac{5}{6} + 8I_1 \right) \right], & \Sigma_d &\propto \frac{1}{16} [0 - \epsilon (16I_2)], \\ \Pi_b &\propto \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{12} \epsilon \right], & \Pi_c &\propto \frac{1}{16} \left[0 - \frac{1}{6} \epsilon \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Вклады Σ_d и Π_c имеют лишь простой полюс по ϵ , т.к. входящие в них однопетлевые вершинные подграфы межмодового взаимодействия не содержат УФ-расходимостей. Для вершины типа $\psi'\psi v$ в соотношении (14) это верно во всех порядках вследствие галилеевой инвариантности, а для вершины типа $v'\psi\psi$ соответствующая константа ренормировки Z_7 в действии (14) является чисто статической в силу соотношений (17) и (18), поэтому в нее не могут давать вкладов диаграммы с межмодовым взаимодействием.

По данным коэффициентам (39) можно найти с двухпетлевой точностью константы $Z_2 = Z_\lambda$ и $Z_6 = Z_\lambda^{-1} Z_{g_2}^{-1}$ в действии (14). Проще всего это сделать, заметив, что УФ-конечные ренормированные функции можно вычислять не только применением R -операции к базовым диаграммам в (31), но и непосредственно по диаграммам для действия (14), учитывая повсюду с нужной точностью дополнительные множители Z . С учетом определений (35) это приводит к следующим выражениям для ренормированных функций (31) при $\omega = 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\psi'\psi}^R|_{\omega=0} &= \epsilon_k [-Z_\lambda + Z_6^{-1} \bar{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_2] + (*), \\ \Gamma_{v'v}^R|_{\omega=0} &= P^\perp \lambda^{-1} g_2^{-1} \mu^{-\epsilon} k^2 [-Z_6 + Z_\lambda^{-1} \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2],\end{aligned}\quad (44)$$

где $\bar{\Sigma}_{1,2}$ и $\bar{\Pi}_{1,2}$ – соответствующие величины (36), (37), а $(*)$ – добавка от статических диаграмм $\Sigma_{A,B,C}$ в (32). В нашем приближении множители Z при $\bar{\Sigma}_1$ и $\bar{\Pi}_1$ нужно учитывать с однопетлевой точностью, а первые слагаемые $-Z_\lambda$ и $-Z_6$ в (44) – с двухпетлевой. Константы Z находятся из требования сокращения УФ-расходимостей (полюсов по ϵ) в выражениях (44). Такой расчет по данным (39) с учетом добавочного статического вклада от диаграммы Σ_C в (32) дает

$$\begin{aligned}Z_\lambda &= 1 - \frac{3u_2}{2\epsilon} - \frac{u_2^2(1-B\epsilon)}{16\epsilon^2} - \frac{u_1^2}{12\epsilon}, \\ Z_6 &= Z_\lambda^{-1} Z_{g_2}^{-1} = 1 - \frac{u_2}{12\epsilon} - \frac{u_2^2(1+\frac{5\epsilon}{12})}{16\epsilon^2}\end{aligned}\quad (45)$$

с зарядами u_i из (38) и константой B из (40). Последнее слагаемое в Z_λ – вклад диаграммы Σ_C .

По константам (45) находятся соответствующие РГ-функции γ_λ и $\gamma_6 = -\gamma_\lambda - \gamma_{g_2}$ (19), а по ним – функции $\gamma_{g_2} = -\gamma_6 - \gamma_\lambda$ в β -функции (20) заряда g_2 . Согласно второму равенству (19) операция $\tilde{D}_\mu$ на любых зависящих только от зарядов g функциях типа констант Z принимает вид $\tilde{D}_\mu = \sum_g \beta_g \partial_g$, откуда с учетом (20) имеем $\tilde{D}_\mu = -\epsilon(\tilde{D}_{g_1} + \tilde{D}_{g_2}) +$ (вклады высшего порядка по g), $\tilde{D}_x \equiv x \partial_x$, $\forall x$. Расчет по константам (45) дает

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda &= \frac{3u_2}{2} - \frac{Bu_2^2}{8} + \frac{u_1^2}{6}, \quad \gamma_6 = \frac{u_2}{12} + \frac{5u_2^2}{96}, \\ \gamma_{g_2} &= -\gamma_\lambda - \gamma_6 = -\frac{19u_2}{12} + \frac{u_2^2(12B-5)}{96} - \frac{u_1^2}{6}.\end{aligned}\quad (46)$$

В β -функциях (20) удобно изменить нормировку, перейдя от исходных зарядов $g_{1,2}$ к величинам $u_{1,2}$ из (38). Из соотношений (20) и (46) находится двухпетлевая РГ-функция β_2 , а для статической функции β_1 ответ хорошо известен (даже с пятипетлевой точ-

ностью [8], но для согласованности мы приводим его только в двухпетлевом приближении) и имеет вид

$$\begin{aligned}\beta_1 &= u_1 \left[-\epsilon + 3u_1 - \frac{17u_1^2}{3} \right], \\ \beta_2 &= u_2 \left[-\epsilon + \frac{19u_2}{12} + \frac{u_2^2(5-12B)}{96} + \frac{u_1^2}{6} \right].\end{aligned}\quad (47)$$

Эти β -функции имеют фиксированную точку

$$\begin{aligned}u_{1*} &= \frac{\epsilon}{3} + \frac{17\epsilon^2}{81}, \\ u_{2*} &= \frac{12\epsilon}{19} + \frac{\epsilon^2 18(12B-5)}{19^3} - \frac{12\eta}{19},\end{aligned}\quad (48)$$

здесь и далее $\eta = \epsilon^2/54$ – вклад низшего порядка в данный статический индекс.

Соответствующие β -функциям поправочные индексы $\omega_{1,2}$ – собственные значения матрицы $\omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial u_k$ при $u = u_*$. Из-за треугольности этой матрицы для β -функций (47) они определяются просто ее диагональными элементами:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left. \frac{\partial\beta_1}{\partial u_1} \right|_{u=u_*} = \epsilon - \frac{17\epsilon^2}{27}, \\ \omega_2 &= \left. \frac{\partial\beta_2}{\partial u_2} \right|_{u=u_*} = \epsilon + \frac{3\epsilon^2(5-12B)}{2(19)^2} - \eta.\end{aligned}\quad (49)$$

Положительность этих величин при реальном значении $\epsilon = 4 - d = 1$ свидетельствует об ИК-устойчивости данной фиксированной точки u_* .

Подставляя значения (48) в выражение (46) для γ_λ , находим величину $\gamma_\lambda^* = \gamma_\lambda(u_*)$, а по ней из соотношений (25) – динамический индекс z :

$$z = 4 - \gamma_\lambda^* = 4 - \frac{18\epsilon}{19} + \frac{9\epsilon^2(15+2B)}{19^3} - \frac{\eta}{19}.\quad (50)$$

Численный расчет интегралов (41), (42) и выражающейся через них константы B (40) дает

$$I_1 = 0.026285, \quad I_2 = 0.017037, \quad B = -0.062309.\quad (51)$$

Подстановка этого значения для B в формулы (49) и (50) приводит к результату (1) для z и выражению

$$\omega_2 = \epsilon + 0.005364\epsilon^2\quad (52)$$

для поправочного индекса межмодового взаимодействия. Наш результат (52) заметно отличается от полученного ранее в работе [2] выражения

$$\omega_2 = \epsilon + 0.121\epsilon^2\quad (53)$$

(в обозначениях статьи [2] $\omega_2 \equiv \omega_f$). Мы не можем прокомментировать это различие, поскольку в работе [2] детали расчета не приводятся.

Для статического индекса ω_1 в (49) численное значение при $d = 3$ известно по данным пятипетлевых вычислений с использованием процедуры борелевского суммирования: $\omega_1 = 0.81 \pm 0.04$ [9].

5. РАСЧЕТ КОНСТАНТЫ R

Универсальную константу Кавасаки R в терминах H_0 -модели (14) можно определить как ИК-асимптотическое ($\tau \rightarrow 0$) предельное значение следующей канонически и критически безразмерной величины:

$$\Phi\left(s \equiv \frac{\tau}{\mu^2}, g\right) = k^{-4} \xi^{d-2} \Gamma_{\psi'\psi}^R \Gamma_{v'v}^R \Big|_{\omega=0, k=0}, \quad (54)$$

в которой Γ^R – ренормированные функции отклика (44) (для $\Gamma_{v'v}$ имеется в виду скалярный коэффициент при поперечном проекторе), а $\xi = \xi(\tau)$ – корреляционная длина. Она определяется соотношением

$$\xi^2 = k^{-2} \left[\frac{\Gamma_{st}^R(k)}{\Gamma_{st}^R(0)} - 1 \right] \Big|_{k=0}, \quad (55)$$

где $\Gamma_{st}^R = -[D_{st}^R]^{-1}$ – обратный ренормированный статический коррелятор $\langle \psi\psi \rangle$ с точностью до знака. Сразу отметим, что однопетлевой вклад в Γ_{st}^R определяется одной диаграммой типа Σ_A из (32).

Согласно соотношениям (16) функции (44) не ренормируются (т.е. для них $Z_F = Z_\psi Z_{\psi'} = Z_v Z_{v'} = 1$), поэтому каждая из них и их произведение удовлетворяют однородному РГ-уравнению (21) с $\gamma_F = 0$. То же самое справедливо и для величины (55), поскольку константы ренормировки в частном сокращаются, а следовательно, и для всей функции (54). На функциях, зависящих только от указанных в равенстве (54) аргументов, РГ-оператор (22) принимает вид $D_{RG} = -(2 + \gamma_\tau)D_s + \Sigma\beta_g\partial_g$, а из РГ-уравнения $D_{RG}\Phi(s, g) = 0$ следует, что в ИК-пределе $s \equiv \tau/\mu^2 \rightarrow 0$ функция $\Phi(s, g)$ стремится к конечному значению $\Phi(1, g_*)$. Это значение и есть по определению константа Кавасаки

$$R \equiv \Phi(1, g_*) = k^{-4} \xi^{d-2} \Gamma_{\psi'\psi}^R \Gamma_{v'v}^R \Big|_{\omega=0, k=0, \tau=\mu^2, g=g_*}. \quad (56)$$

Поясним кратко расчет константы Кавасаки. Поскольку из функции $\Gamma_{v'v}$ в (44) выносится множитель g_2^{-1} , переходящий в формуле (56) в известную из соотношений (48) только с одной поправкой величину $g_{2*}^{-1} = (16\pi^2 u_{2*})^{-1}$, в коэффициентах при этом множителе достаточно ограничиться тоже только одной поправкой, т.е. однопетлевым приближением. С такой точностью для функций (44) имеем

$$\Gamma_{\psi'\psi}^R \Big|_{\omega=0, k \rightarrow 0} = \lambda k^2 \tau \left[-Z_\lambda + \bar{\Sigma}_1 + \frac{u_1(1 + \ln q)}{2} \right], \quad (57)$$

$$\Gamma_{v'v}^R \Big|_{\omega=0, k \rightarrow 0} = \lambda^{-1} k^2 g_2^{-1} \mu^{-\epsilon} [-Z_6 + \bar{\Pi}_1] \quad (58)$$

с константами Z , взятыми в однопетлевом приближении, и вкладами $\bar{\Sigma}_1$ и $\bar{\Pi}_1$ из формул (36). Последнее слагаемое в равенстве (57), где u_1 и q определены формулами (38), – вклад диаграммы Σ_A из соотношения (32), ренормированной в стандартной схеме МВ.

Учет констант Z в равенствах (57), (58) эквивалентен вычитанию полюсных по ϵ вкладов из выражений (36), что дает с нужной точностью следующие значения:

$$\begin{aligned} -Z_\lambda + \bar{\Sigma}_1 &\simeq -1 + u_2 A_1 \left[\frac{\ln q}{2} + \alpha_1 \right], \\ -Z_6 + \bar{\Pi}_1 &\simeq -1 + u_2 B_1 \left[\frac{\ln q}{2} + \beta_1 \right], \end{aligned} \quad (59)$$

где u_2 и q взяты из (38), а коэффициенты известны из соотношений (39).

Однопетлевой расчет величины ξ^2 по формуле (55) в схеме МВ приводит к формуле

$$\xi^2 = \tau^{-1} \left[1 - \frac{u_1(1 + \ln q)}{2} \right]^{-1}. \quad (60)$$

Отсюда для множителя $\xi^{d-2} = \xi^{2-\epsilon}$ в выражении (54) с нужной точностью имеем

$$\xi^{d-2} \simeq \tau^{-1+\epsilon/2} \left[1 + \frac{u_1(1 + \ln q)}{2} \right]. \quad (61)$$

Подставляя в равенство (54) выражения (57), (58) и (61), с учетом (38) и (59) получаем

$$\Phi(s, g) = \frac{s^{\epsilon/2}}{16\pi^2 u_2} \left\{ 1 - u_2 \left[(A_1 + B_1) \frac{\ln q}{2} + A_1 \alpha_1 + B_1 \beta_1 \right] \right\} \quad (62)$$

(в произведении величин (57) и (61) вклады с u_1 взаимно сокращаются). Полагая в соотношении (62) $s \equiv \tau/\mu^2 = 1$, $u = u_*$, подставляя конкретные значения коэффициентов из (39) и учитывая определение (56), имеем

$$R = \Phi(1, g_*) = \frac{1}{16\pi^2 u_{2*}} \left\{ 1 + u_{2*} \left[\frac{19}{24} \alpha + \frac{23}{36} \right] \right\}, \quad (63)$$

где

$$\alpha \equiv \ln(4\pi) - C, \quad \ln q|_{s=1} = \alpha + O(\epsilon), \quad (64)$$

$C = -\psi(1)$ – постоянная Эйлера. В соотношение (63) нужно подставить известную из равенств (48) величину u_{2*} в двухпетлевом приближении для общего множителя и в однопетлевом приближении внутри фигурной скобки в (63).

Для сравнения с результатами работы [1] нужно выделить в соотношении (63) определенный в (1) множитель K_d . С нашей точностью $K_d = (8\pi^2)^{-1} [1 + \epsilon(\alpha + 1)/2]$. Учитывая, что $u_{2*} = 12\epsilon/19 + \dots$, имеем

$$R = \frac{K_d}{2u_{2*}} \left(1 - \frac{11\epsilon}{114} \right) \quad (65)$$

(вклад с α сокращается). Окончательный ответ получается подстановкой в (65) двухпетлевого выражения (48) для u_{2*} , что дает

$$R = K_d \frac{19}{24\epsilon} \left\{ 1 - \epsilon \left[\frac{82 + 54B}{3(19)^2} - \frac{1}{54} \right] \right\} \quad (66)$$

($1/54$ – вклад η из (48)). Подстановка в (66) численного значения B из (51) приводит к формуле (1) для R .

В заключение приведем определение “эффективных коэффициентов” теплопроводности λ_{ef} и вязкости η_{ef} в H_0 -модели, поскольку это важные физические характеристики системы и именно через них обычно определяется константа R (соотношение (2.15) в работе [1]):

$$\lambda_{\text{ef}}(\tau) = -\chi_{\psi} k^{-2} \Gamma_{\psi'\psi}^{\text{R}}|_{\omega=0, k \rightarrow 0}, \quad \eta_{\text{ef}}(\tau, \omega) = -a^{-1} k^{-2} \Gamma_{v'v}^{\text{R}}|_{k \rightarrow 0}, \quad (67)$$

где a – параметр, входящий в выражения (10) и (12), χ_{ψ} – статическая восприимчивость простой ψ^4 -модели, а под $\Gamma_{v'v}^{\text{R}}$ понимается скалярный множитель – коэффициент при поперечном проекторе по индексам.

Определение λ_{ef} в (67) эквивалентно приближенному представлению $\Gamma_{\psi'\psi}^{\text{R}} \simeq i\omega - \lambda_{\text{ef}}(\tau) k^2 \chi_{\psi}^{-1}(\tau)$ в области малых (сравнительно с τ) значений k и ω . Для получения соотношения (67) для η_{ef} необходимо учесть линейные по a поправки к H_0 -модели в (13). Они дадут, во-первых, добавку $i a \omega$ к функции $\Gamma_{v'v}^{\text{R}}$ и, во-вторых, кратные величине $a k^2$ поправки к функции $\Gamma_{v'v}^{\text{R}}$, которыми можно пренебречь как ИК-несущественными. Выражение $i a \omega + \Gamma_{v'v}^{\text{R}}$ при малых (сравнительно с τ и ω) волновых векторах k приближенно заменяется на $a [i\omega - k^2 \eta_{\text{ef}}(\tau, \omega)]$, что и приводит к определению (67). Подчеркнем, что в соотношения (67) входят ренормированные функции H_0 -модели с $a = 0$. Функция $\Gamma_{v'v}^{\text{R}}$ в этой модели, в отличие от $\Gamma_{\psi'\psi}^{\text{R}}$, не содержит вклада типа $i\omega$ и кратна k^2 . Данное обстоятельство и позволяет определить величину η_{ef} при $\omega \neq 0$, чего нельзя сделать для коэффициента λ_{ef} .

Величины (67) имеют определенные критические размерности, которые легко найти из следующих соображений. Ренормированные функции отклика $\langle \varphi \varphi' \rangle$ H_0 -модели в $t, \mathbf{x}$ -представлении имеют размерности $\Delta_{\varphi} + \Delta_{\varphi'}$, к этому добавляется величина $-d - \Delta_{\omega}$ при переходе к (ω, k) -представлению и общий знак минус при переходе к 1-неприводимым функциям типа (44). Поэтому для критических размерностей $\Delta_F = \Delta[F]$ величин (44) получаем

$$\Delta[\Gamma_{\varphi'\varphi}^{\text{R}}(\omega, k)] = d + \Delta_{\omega} - \Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi'}. \quad (68)$$

Отсюда с учетом соотношений (25), (27) и равенства $\Delta[\chi_{\psi}] = \eta - 2$ для статической восприимчивости находим следующие критические размерности величин (67):

$$\Delta[\lambda_{\text{ef}}] = z + \eta - 4 = -x_{\lambda}, \quad \Delta[\eta_{\text{ef}}] = d - z = -x_{\eta} \quad (69)$$

(мы привели также традиционные обозначения работы [1]). Поэтому в критическом режиме с точностью до несущественных множителей имеем

$$\lambda_{\text{ef}}(\tau) \propto \xi^{4-z-\eta}, \quad \eta_{\text{ef}}(\tau, \omega) \propto \xi^{z-d} f(\omega \xi^z), \quad (70)$$

где $\xi \propto \tau^{-\nu}$, $1/\nu \equiv \Delta_{\tau}$ – корреляционная длина, f – некоторая скейлинговая функция от критически безразмерного аргумента, переходящая в константу при $\omega = 0$. Соотношения (69), (70) согласуются с формулами (2.7) и (2.8) работы [1].

6. ПОПРАВКИ К СКЕЙЛИНГУ

Поправки к скейлингу в H -модели (10) определяются, во-первых, известными поправочными индексами ω (49), во-вторых, влиянием ИК-несущественной добавки $-av'\partial_t v$ в неренормированном функционале (10). В работе [2] связанный с этой поправкой параметр трактуется как добавочный заряд w с $w_* = 0$ (в обозначениях (10) для затравочных параметров $w_0 = a\lambda_0^2 g_{20}$), со своей β -функцией β_w и соответствующим поправочным индексом ω_w , для которого в [2] приводится значение

$$\omega_w = 2 - \frac{17\epsilon}{19} + 0.163\epsilon^2. \quad (71)$$

Такой подход в действительности некорректен, т.к. в данной ситуации речь идет о поправках от “возмущения системы” ИК-несущественным по размерности неренормированным локальным составным оператором, который может смешиваться при ренормировке с другими операторами. В общем случае к оператору $v'\partial_t v \equiv F_1$ могут примешиваться любые другие разрешенные по симметрии локальные составные операторы F_k , $k = 2, 3, \dots$, с тем же или меньшим значением размерности $d_F^* = d_F$ ($\epsilon = 0$) (для оператора F_1 имеем $d_F^* = 10$ согласно данным таблицы раздела 2). Каждый конкретный оператор входит в некоторую конечную “замкнутую” систему операторов $F = \{F_i\}$, смешивающихся при ренормировке только между собой, т.е.

$$[F_i]_R = \sum_k Q_{ik} F_k, \quad (72)$$

где F_i – неренормированные операторы, $[F_i]_R$ – ренормированные, Q – матрица смешивания. Определенными критическими размерностями обладают не сами ренормированные операторы $[F_i]_R$, а те их линейные комбинации (“базисные операторы”)

$$[F_i]'_R = \sum_k U_{ik} [F_k]_R, \quad (73)$$

которые диагонализуют соответствующую системе $F = \{F_i\}$ матрицу Δ_F в соотношении (26); критические размерности операторов (73) – собственные значения матрицы Δ_F . Поэтому любой конкретный оператор рассматриваемой системы является в общем случае некоторой линейной комбинацией операторов (73) с определенными критическими размерностями. Добавка

$$-av'\partial_t v \equiv -a \int dx F_1(x)$$

в функционале (10) (напомним, что в нем подразумевается интегрирование по $x = t, \mathbf{x}$) порождает в первом порядке по a поправочный множитель $1 - a \int dx F_1(x)$, в котором F_1 является некоторой линейной комбинацией базисных операторов (73). Это соответствует поправочным множителям типа

$$1 + \sum_i c_i k \omega'_i, \quad \omega'_i = \Delta_i - d - \Delta_\omega, \quad \Delta_\omega \equiv z, \quad (74)$$

где k – какой-нибудь волновой вектор или любая другая величина с той же критической размерностью $\Delta_k = 1$ (например, ξ^{-1} или $\tau^1/\Delta_\tau = \tau^\nu$), Δ_i – критические размерности базисных операторов (73), c_i – критически безразмерные коэффициенты, вклад $-d - \Delta_\omega$ в выражении (74) для ω'_i – критическая размерность величины $dx = dt d\mathbf{x}$ в интеграле $\int dx F_1(x)$ (мы снабдили ω_i индексом штрих, чтобы не путать ω'_1 из (74) с ω_1 из (49)).

Таким образом, возмущение $-av'\partial_t v$ в действии (10) порождает целую серию поправок с индексами $\omega'_i = 2 + O(\epsilon)$ от всевозможных операторов с размерностью $d_F^* = 10$, которые могут смешиваться с оператором $v'\partial_t v \equiv F_1$ при ренормировке.

Одну из этих размерностей, “ассоциированную” с самим оператором F_1 , можно найти точно, выразив ее через индекс $z = \Delta_\omega$. Действительно, как уже говорилось (см. раздел 3), сам оператор $v'\partial_t v \equiv F_1$ не может быть контрчленом по тем же причинам, по которым отсутствует ренормировка вклада $\psi'\partial_t\psi$ в действии (14), т.е. не может примешиваться при ренормировке ни к каким другим операторам, в том числе и к самому себе. Если выбрать $v'\partial_t v \equiv F_1$ в качестве одного из элементов неренормированного базиса $F = \{F_i\}$, то из сказанного выше следует, что в соотношении (72) $Q_{11} = 1$ и $Q_{k1} = 0$, $\forall k > 1$. Поэтому в соотношении (26) для данной системы операторов матрицы Δ_F и γ_F^* являются блочно-треугольными с $(\gamma_F^*)_{11} = 0$. Здесь важно также, что поля v и v' не ренормируются согласно (16), а критическая размерность Δ_1 ассоциированного с оператором F_1 оператора $[F_1]_R' = F_1 + \dots$ равна, как следует из (26), простой сумме критических размерностей составляющих его “сомножителей”, т.е.

$$\Delta_1 = \Delta_v + \Delta_{v'} + \Delta[\partial_t] = 3\Delta_\omega - 2 = 3z - 2 \quad (75)$$

в силу соотношений (25) и (27). Из равенств (74) и (75) следует, что

$$\omega'_1 = 2z - 2 - d \equiv \omega_w. \quad (76)$$

Это и есть поправочный индекс ω_w из работы [2]. Согласно равенству (76) он выражается через индекс $z \equiv \Delta_\omega$. Это не отмечено в работе [2], хотя фактически равенство (76) следует из приведенного там соотношения $\omega_w = 2 + \eta_\Lambda^* - \eta_\eta^*$ для величин $\eta_\Lambda^* = -x_\lambda - \eta$, $\eta_\eta^* = -x_\eta$ с учетом их выражений через z в (38). Однако конкретное значение (71) в статье [2] не согласуется с результатами статьи [1]: если подставить в (76) приведенное в соотношениях (2) значение z [1], то вместо коэффициента 0.163 при двухпетлевом вкладе в формуле (71) мы получили бы 0.025. Наше значение z из (1) для индекса (76) дает

$$\omega'_1 \equiv \omega_w = 2 - \frac{17\epsilon}{19} + 0.0371\epsilon^2. \quad (77)$$

Расчет же величины (76) проблему поправок не решает, т.к. это всего лишь один из серии многих поправочных индексов $\omega'_i = 2 + O(\epsilon)$ формулы (74) (поскольку маловероятно, что оператор F_1 ренормируется без смешивания). Вполне возможно, что среди величин $\omega'_i = 2 + O(\epsilon)$ в формулах (74) есть индексы с меньшим, чем у индекса (76), численным значением, тогда они и будут определять главные поправки такого типа. На данный момент эта проблема остается полностью открытой. Для ее решения нужно установить, с какими именно составными операторами, имеющими размерность $d_F^* = 10$,

может смешиваться при ренормировке наш оператор $v' \partial_t v \equiv F_1$, т.е. найти содержащую его замкнутую систему $F = \{F_i\}$. Затем нужно вычислить матрицу констант ренормировки Z_F для этой системы и соответствующую матрицу аномальных размерностей γ_F , а по ним – матрицу критических размерностей Δ_F в соотношении (26) и ее собственные значения – размерности Δ_i , через которые определяются поправочные индексы ω'_i в формулах (74). Все это очень трудные и до сих пор нерешенные теоретические проблемы.

Обычно в работах по данной тематике (см., например, [4, 5]) учитываются только поправки с индексами ω_2 из (53) (ω_f в обозначениях статьи [2]) и ω_w из (71), причем отмечается, что из-за близости численных значений этих индексов при $\epsilon = 1$ ($d = 3$) их практически невозможно различить экспериментально. По этому поводу можно заметить следующее: во-первых, статический поправочный индекс ω_1 из (49) также должен учитываться во всех объектах, содержащих вклады статического взаимодействия; во-вторых, знания всего лишь одного индекса (76) из всей серии $\omega'_i = 2 + O(\epsilon)$ в равенствах (74) совершенно недостаточно для определения такого типа поправок к скейлингу.

Общий вывод состоит в том, что для анализа поправок к скейлингу в H -модели еще нет надежной теоретической базы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сравнение с результатами расчета [1]

В приложении Е работы [1] приводятся результаты расчета с УФ-обрезанием Λ однопетлевых диаграмм Σ_a, Π_a из формул (32), (33) в размерности $d = 4 - \epsilon$ с учетом поправок первого порядка по ϵ и двухпетлевых диаграмм $\Sigma_b + \Sigma_c, \Sigma_d, \Pi_{b,c}$ непосредственно в размерности $d = 4$. Мы проделали аналогичный расчет и подтверждаем результаты работы [1] для Σ_a и $\Pi_{a,b,c}$. Результаты вычислений $\Sigma_b + \Sigma_c$ и Σ_d у нас иные. В работе [1] получено, что

$$\begin{aligned}\Sigma_b + \Sigma_c &= A \left(\frac{1}{256} \ln^2 r + 0.00231 \ln r \right), \\ \Sigma_d &= A \left(0 + 0.0426 \ln r \right),\end{aligned}\tag{78}$$

где $A = \lambda_0 k^2 (k^2 + \tau) f_0^2$, f_0 – заряд межмодового взаимодействия и $r = \tau/\Lambda^2$. По нашим же данным

$$\begin{aligned}\Sigma_b + \Sigma_c &= A \left[\frac{1}{256} \ln^2 r + \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{8} I_1 \right) \ln r \right], \\ \Sigma_d &= A \left(0 + \frac{1}{4} I_2 \ln r \right),\end{aligned}\tag{79}$$

где $I_{1,2}$ определены формулами (41), (42). Отметим, что для получения значения $\Sigma_b + \Sigma_c$ в формулах (79) в двукратном интеграле (A.14) статьи [1] по импульсам p, q необходимо учитывать не только обрезания $|p| \leq \Lambda$ и $|q| \leq \Lambda$, но также и $|p + q| \leq \Lambda$, т.е. обрезать нужно все пропагаторы, а не только те, которые соответствуют импульсам интегрирования (именно такова правильная процедура, соответствующая обрезанию по импульсам в фурье-образах самих полей).

Подстановка в соотношения (79) численных значений (51) приводит к следующему изменению коэффициентов в соотношениях (78): $0.00231 \rightarrow 0.0045275$ в первом уравнении и $0.0426 \rightarrow 0.00426$ во втором. Последняя замена выглядит опечаткой, но в расчете авторов статьи [1], судя по конечным результатам, используется именно значение коэффициента из (78).

Для суммы двухпетлевых вкладов (79) получаем

$$\Sigma_b + \Sigma_c + \Sigma_d = A \left[\frac{1}{256} \ln^2 r + \frac{1}{128} (1 - 2B) \ln r \right] \quad (80)$$

с той же самой константой B из (40), через которую выражаются все наши окончательные ответы из разделов 4, 5.

Уже это косвенно свидетельствует в пользу правильности выражений (79). Однако главное то, что при воспроизведении расчета [1] с заменой выражений (78) на (79) для универсальных величин z и R получаются те же самые представления (50), (66) через константу B . Это доказывает, что все расхождения между ответами (1) и (2) объясняются лишь различиями числовых коэффициентов при $\ln r$ в (78) и (79), т.е. различием в значении константы B . При этом выражение через B для параметра $f_0/2$ из соотношения (A.26) в [1], являющегося аналогом u_{2*} в наших обозначениях, не совпадает с (48), что неудивительно, поскольку значение заряда в фиксированной точке — неуниверсальная величина, зависящая от схемы вычитаний, а расчетная схема [1] не совпадает с использованной в данной работе стандартной схемой МВ.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17-033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Минобразования РФ (грант № 97-0-14.1-30).

Список литературы

- [1] *E. D. Siggia, B. I. Halperin, P. C. Hohenberg.* Phys.Rev. B. 1976. V. 13. P. 2110.
- [2] *C. De Dominicis, L. Peliti.* Phys. Rev. B. 1978. V. 18. P. 353.
- [3] *P. C. Hohenberg, B. I. Halperin.* Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 435.
- [4] *D. Beysens, G. Paladin, A. Bourgou.* J. Phys. Lett. (Paris). 1983. V. 44. P. L649.
- [5] *D. Beysens, A. Bourgou, G. Paladin.* Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 2686.
- [6] *R. Dengler, F. Schwabl.* Europhys. Lett. 1987. V. 4. P. 1233; *R. Dengler, F. Schwabl.* Z. Phys. B. 1987. V. 69. P. 327; *R. Folk, G. Moser.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 2706.
- [7] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак.* ТМФ. 1983. Т. 57. С. 268.
- [8] *H. Kleinert, J. Neu, V. Shulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin.* Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 39; Errata. 1993. V. 319. P. 545.
- [9] *J. Zinn-Justin.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.

Поступила в редакцию 14.VII.1998 г.