Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Верещагин, А. В. Юров, Преобразование Дарбу и точно решаемые космологические модели, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 3, 405–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:34:41

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Предложен простой, эффективный способ построения точно решаемых космологических моделей, содержащих инфляцию с выходом. В этом способе не используется никакая-либо подгонка параметров. Обсуждается проблема решений, нарушающих слабое энергетическое условие.

Ключевые слова: космология, инфляция, интегрируемые модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скалярные поля занимают центральную роль в современной космологии. С одной стороны, эти поля (или поле) играют роль инфлатона, т.е. поля, ответственного за инфляцию в ранней Вселенной [1]–[3]. С другой стороны, безмассовые скалярные поля пытаются рассматривать как квинтэссенцию – физический субстрат, вызывающий наблюдаемое ныне ускоренное расширение Вселенной [4], [5].

В наиболее развитой космологической модели – так называемой теории хаотической инфляции [3] – предполагается, что в ранней Вселенной доминировало скалярное поле с минимальной (в простейшем случае) связью, причем плотность энергии была сконцентрирована в потенциале самодействия¹⁾. При этих условиях удастся провести ряд упрощений исходных уравнений, после чего редуцированная система легко интегрируется, демонстрируя наличие инфляционной фазы (более точно, квазидеситтеровской фазы, в течение которой параметр Хаббла можно примерно считать константой). Далее предполагается, что в процессе раздувания кинетический член возрастает до тех пор, пока приближение медленного скатывания не перестает действовать. Отсюда делается вывод о самопроизвольном прекращении инфляции. Следующей фазой должна быть фаза осцилляций, которая необходима для заполнения Вселенной, “опустошенной инфляцией”, элементарными частицами. Согласно обсуждаемой парадигме все эти частицы были рождены из вакуума сильно осциллирующим скалярным полем, амплитуда

¹⁾ Этот подход называют приближением медленного скатывания.

* Калининградский государственный университет, Калининград, Россия. E-mail: artiom_yurov@mail.ru

колебаний которого уменьшалась со временем. Произошел вторичный разогрев, после которого Вселенная оказалась не только однородной и плоской, но и заполненной горячим веществом. Другими словами, на этом этапе можно использовать космологические уравнения Фридмана для вещества с уравнением состояния, характерным для электромагнитного поля. Дальнейшая эволюция Вселенной должна уже протекать по классическому сценарию: по мере (степенного) расширения Вселенная охлаждается; в определенный момент времени происходит отрыв излучения от вещества; далее следует переход на фридмановское расширение по закону “двух третей” и т.д.

Обнаружение того, что современная Вселенная опять ускоряется [4], оказалось неожиданным, поскольку этот факт вовсе не следовал из текущей инфляционной парадигмы. Потребовались дополнительные гипотезы и предположения о некой квинтэссенции (ассоциируемой с “темной энергией”, которой во Вселенной опять-таки “слишком много”), являющейся причиной ускорения расширения Вселенной. Необходимость в дополнительных предположениях, конечно, противоречит общепринятому сценарию. Пожалуй, лучшее, что можно было бы сделать для сохранения текущей парадигмы, – это доказать, что и ранняя инфляция, и современное ускорение вызываются одной и той же причиной, т.е. одним и тем же скалярным полем. Если это сделать не удастся, то привлекательность инфляционного сценария уменьшится, поскольку окажется, что одной инфляции недостаточно для объяснения наблюдаемой структуры Вселенной, включая ее динамику.

Затруднения, с которыми столкнулась инфляционная космология при объяснении текущего ускорения расширения Вселенной, привело к появлению новых космологических сценариев, таких как экпиротический (ekpyrotic) [6] и циклический [7]. Эти сценарии возникли на базе идей о “бранном мире” [8], которые, в свою очередь, инициированы исследованиями в области пока гипотетической M -теории. К сожалению, исследования показывают, что “бранные космологии” сталкиваются с большим количеством проблем, лучшим решением которых является гипотеза об инфляции на видимой бране [9]. Тем самым эти модели оказываются, по-видимому, просто неким экзотическим вариантом инфляционной космологии.

Из сказанного вытекает, что инфляция по-прежнему является наилучшей (т.е. самой естественной и экономной) гипотезой, объясняющей если не все, то, по крайней мере, большинство особенностей наблюдаемой Вселенной. Поэтому имеет смысл попытаться сохранить эту гипотезу, не вводя дополнительных предположений о наличии какой-либо квинтэссенции, существенно ослабляющих статус инфляционной космологии, как объяснительной физической теории²⁾. Для этого следует попробовать привлечь гипотетический инфлатон в качестве причины наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной. Подчеркнем, что эта идея непопулярна среди космологов. Тем не менее, с нашей точки зрения, доказательство неэквивалентности инфлатона и “темной энергии” чрезвычайно подрывает доверие ко всему инфляционному сценарию. В самом деле, нет никаких экспериментальных подтверждений существования скалярного инфла-

²⁾ Альтернативой квинтэссенции служат модели с ненулевым космологическим членом. К сожалению, в рамках современной теории поля (и теории струн) не видно способов получить модели с настолько малой плотностью вакуумной энергии, чтобы не вступать в конфликт с наблюдениями.

тона, кроме *самого факта существования однородной, изотропной и фактически плоской Вселенной*. До недавнего времени считалось, что инфляция решает все глобальные проблемы космологии, и именно это заставляло поверить в инфляционный сценарий. Если же окажется, что есть глобальные свойства Вселенной, которые не удастся объяснить с точки зрения инфляции (как, скажем, современное ускорение расширения Вселенной), то мы сильно ослабляем единственный (косвенный!) аргумент в пользу инфляции (см. превосходный обзор концептуальных проблем современной космологии [10]).

2. ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В работах [11], [12] был предложен замечательный подход к решению загадки ускорения в рамках инфляционной парадигмы. В соответствующих моделях допускаются неположительно определенные потенциалы самодействия. Неположительность потенциала приводит к интересному следствию: даже если плотность вещества во Вселенной в точности равна критической, вслед за фазой расширения возможна фаза коллапса, тогда как при положительном потенциале расширение длится вечно. Наличие же отрицательного минимума при ряде естественных предположений приводит к появлению современной фазы ускоренного расширения [11], [12].

Развитые расширенные калибровочные супергравитационные теории с $N = 2, 4, 8$ позволяют надеяться, что описываемые модели могут иметь физический смысл. Деситтеровские решения соответствуют экстремумам эффективного потенциала, а квадраты масс скалярных полей m в этом режиме при $N \geq 2$ “квантуются” в единицах постоянной Хаббла H_0 . Если $m^2/H_0^2 = O(1)$, то оказывается возможным описать современное ускорение расширения Вселенной [12]. При этом скалярные поля обладают чрезвычайно малой массой ($m \sim 10^{-33}$ ГэВ) и способны существенно изменить космологическую постоянную на стадии преобладания холодного (“темного”) вещества, не меняя обычных предсказаний инфляционной теории, поскольку в ранней Вселенной эти поля находятся вдали от минимума потенциала и “включаются”, лишь когда параметр Хаббла становится сравнимым с $|m|$. Наконец, как показывают расчеты, квантовые поправки к m чрезвычайно малы.

Таким образом, инфляционная космология достаточно жизнеспособна. Заметим, что общее исследование динамики Вселенной при заданном потенциале самодействия представляет собой исключительно трудную математическую задачу. По этой причине последние семь лет активизировались исследования модельных космологий, в которых уравнения допускают точное аналитическое решение [13]. Соответствующие модели получили название точно решаемых (ТРКМ) или просто точных космологий (Ехаст Cosmologies, [13]). В основе ТРКМ лежит чрезвычайно широкий калибровочный произвол космологических уравнений в метрике Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ). Если рассмотреть общий случай вселенных с такой метрикой и самодействующим скалярным полем, то можно, задавая, например, эволюцию масштабного фактора, вычислить вид соответствующего потенциала самодействия, приводящего к такой динамике. В других подходах фиксировалась динамика поля или параметра Хаббла, причем в последнем случае оказалось удобным ввести новую независимую переменную —

число e расширений Вселенной. Отметим, что кажущийся почти безграничным произвол сужается необходимостью выполнения энергетических условий: или слабого, или сильного, или основного, в зависимости от контекста рассматриваемой задачи. Поэтому не всякая эволюция, скажем, масштабного фактора действительно может происходить. Ниже мы подробнее остановимся на этом вопросе.

Очевидный недостаток ТРКМ – “патологические” формы потенциалов самодействия, которые вряд ли могут быть обоснованы физикой элементарных частиц. Вместе с тем изучение ТРКМ может оказаться исключительно важным в инфляционной космологии. В самом деле, в рамках теории хаотической инфляции предполагается, что фактически любой потенциал, удовлетворяющий специальным начальным условиям (см. введение), будет приводить к инфляции, выходу из нее, осцилляциям, переходу на фридмановскую стадию радиационного доминирования и т.д. Если это действительно так, то патологическая форма потенциалов, обычно появляющихся в ТРКМ, не должна быть существенной. Собирая статистику по ТРКМ, можно сделать достаточно обоснованные заключения о том, насколько надежны предположения теории хаотической инфляции.

Исследования, проведенные в цитированных выше работах, привели к следующим выводам.

1. Идея медленного скатывания верна. Инфляция действительно возникает при чрезвычайно разнообразных потенциалах самодействия, так что нет никакой необходимости фиксировать некоторую форму потенциала для получения раздувающейся Вселенной³⁾.

2. Выход из инфляции оказался непростой задачей. Для многих модельных потенциалов Вселенная, войдя в стадию раздувания, остается в ней навсегда. Выход из инфляции, как правило, обеспечивается “тонкой настройкой” или, просто говоря, подгонкой параметров модели.

3. Непонятно, откуда берутся осцилляции. Хотя точные модели инфляции с выходом построены, они определенно не содержат осциллирующей фазы (в отличие от неинтегрируемых моделей типа $V = m^2\phi^2/2$, в которых наличие осцилляций подтверждается качественными оценками и численным интегрированием [3], [14]). Это не означает, что такая стадия не может быть описана какой-либо точной космологией. Например, в работе [15] построен пример потенциала, описывающего затухающие осцилляции скалярного поля. Однако вряд ли такой потенциал может быть получен в рамках квантовой теории поля или физики струн.

4. Всем без исключения ТРКМ с выходом присущ следующий недостаток: после выхода из инфляции Вселенная либо переходит на стадию радиационного доминирования, где остается навсегда, либо сначала переходит на стадию пылевидной материи, а потом на стадию преобладания излучения, тогда как все должно быть наоборот. Это достаточно общее явление. Например, в [16] исследовались ТРКМ с комплексным скалярным полем и оказалось, что там имеет место та же самая проблема. В наиболее удачной ТРКМ-модели, описанной в [15], предлагается дополнительная гипотеза о на-

³⁾Так это делалось в ранних моделях Гута [1], где инфляция связывалась с хиггсовской формой потенциала.

личии некоторого фазового перехода, который должен вывести Вселенную из радиационно-доминированной фазы и перевести на фазу доминирования пылевидной материи. Однако едва ли физическая теория может строиться с использованием таких гипотез *ad hoc*.

Последняя проблема может показаться достаточно надуманной. В самом деле, по классической парадигме переход от эпохи излучения к эпохе вещества описывается обычными фридмановскими уравнениями, причем вклад в тензор энергии-импульса вносят главным образом электромагнитное поле (эпоха излучения), а затем, после того как температура понизилась в достаточной мере, нерелятивистское вещество (водород). Трудности же, о которых шла речь выше в четвертом пункте, связаны с решениями уравнений, описывающих скалярное поле и гравитацию. Но на стадии отрыва излучения скалярное поле считается очень слабым на фоне излучения и барионов, и потому его динамика уже не должна играть существенной роли.

С этим заключением не согласуются современные результаты наблюдений. Теперь известно, что главный вклад в тензор энергии-импульса на современной стадии вносит “темная энергия”. Наблюдаемое микролинзирование указывает на то, что обычное барионное вещество следует в своем распределении за “темным”. Другими словами, даже на современном этапе динамика Вселенной определяется отнюдь не барионами, а “темной энергией”.

Что же такое “темная энергия”? Представляется разумной попытка описать ее как скалярное поле неизвестной природы. Разумным представляется и предположение, что роль “темной энергии” во Вселенной всегда была доминирующей. Другими словами, и инфляция, и *вся послеполноценная динамика* обуславливались скалярным полем (или скалярными полями). Учитывая ограниченность наших знаний о Вселенной, кажется естественным попробовать описать космологическую эволюцию, используя лишь одно скалярное поле. Именно эта частная задача и будет обсуждаться ниже⁴⁾. Более точно, мы предложим простой метод построения потенциалов самодействия, приводящих к инфляции (или нескольким инфляциям). При этом возможны варианты с выходом без каких бы то ни было подгонок параметров и с асимптотическим фридмановским режимом, характерным для пылевидной материи.

Этот метод уже применялся в теории нелинейных интегрируемых уравнений и получил название преобразования Дарбу [19]–[21]⁵⁾. Во избежание недоразумений подчеркнем, что цель данной работы состоит не в том, чтобы построить удовлетворительную космологическую модель или предложить гипотезу о физической природе “темной энергии” (как это делается, например, в [12]), а описать *математический метод*, который, как мы надеемся, может помочь построить такую модель в будущем, если, конечно, это действительно возможно.

⁴⁾С этой точки зрения красивые модели типа газа Чаплыгина [17] являются неудовлетворительными, хотя и не обязательно неверными. То же самое можно сказать о гибридных моделях [18].

⁵⁾В контексте нелинейных интегрируемых уравнений его было бы правильнее назвать методом Дарбу–Крама–Матвеева.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать простейший случай плоской вселенной с метрикой ФЛРУ

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

заполненной скалярным полем с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi).$$

Всюду в дальнейшем используется принятая в космологии система единиц $8\pi G = c = 1$. Мы ограничиваемся плоской вселенной ($k = 0$), поскольку, с одной стороны, это наиболее простой случай, а с другой стороны, кривизной в ранней вселенной можно пренебречь. Легко убедиться, что если $\phi = \phi(t)$, то уравнения Эйнштейна с космологическим членом

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda$$

редуцируются в уравнение Шредингера

$$\ddot{\psi} = 3(V + \Lambda)\psi, \quad (1)$$

где $\psi = a^3$. Здесь подразумевается, что $V = V(\phi(t)) = V(t)$, а зависимость поля от времени определяется уравнением

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{3}\frac{d^2}{dt^2}\ln\psi. \quad (2)$$

На этом языке очень легко сформулировать наивный метод построения ТРКМ. Задаем, скажем, $\psi(t)$; подставляя в (2), определяем зависимость поля от времени $\phi(t)$ и используя (1) и (2) совместно, находим в параметрическом виде V как функцию ϕ .

Описанный метод выглядит предельно просто, однако не следует думать, что для *любой* эволюции масштабного фактора (или параметра Хаббла $H = \dot{a}/a$) можно подобрать соответствующий потенциал. Во-первых, как видно из (2), наивный выбор $a(t)$ (т.е. ψ), скорее всего, приведет к ситуациям, когда поле ϕ с течением времени станет *минимумом*. Во-вторых, восстановить V как явную функцию ϕ будет возможно лишь в исключительных случаях, что, конечно, осложнит поиск физического смысла таких потенциалов. Однако в этой работе нас не будет интересовать второй аспект, мы сосредоточимся на первом. Как будет показано ниже, контролируя ψ так, чтобы правая часть (2) меняла знак на заданном интервале, можно строить космологические модели с инфляцией и *неизбежным* выходом из нее.

В дальнейшем нам понадобятся энергетические условия. Следуя, например, [22], определим их следующим образом:

- 1) слабое энергетическое условие, $\rho \geq 0$, $p + \rho \geq 0$;
- 2) сильное энергетическое условие, $p + \rho \geq 0$, $3p + \rho \geq 0$;
- 3) общее энергетическое условие, $\rho \geq 0$, $\rho \geq p \geq -\rho$, где ρ и p — плотность и давление, соответственно. Очевидно, что слабое энергетическое условие (самое главное)

выполняется как раз тогда, когда правая часть (2) положительна. Это простое свойство играет важнейшую роль в дальнейшем.

Мы будем применять к уравнению (1) преобразование Дарбу (ПД) [20], [21]. К тому есть два основания. Во-первых, ПД является изоспектральной симметрией уравнения Шредингера. Происходит это потому, что ПД сохраняет асимптотики преобразуемых функций с точностью до умножения на некоторое число. В частности, интегрируемые с квадратом функции остаются в том же пространстве при условии, что опорные функции, генерирующие ПД, не имеют нулей или имеют перемежающиеся нули, если опорных функций четное число [23]. Это обстоятельство можно использовать следующим образом. Пусть масштабный фактор имеет асимптотику, характерную для плоской вселенной, заполненной пылевидной материей, т.е. $a \sim t^{2/3}$. Одевая соответствующее решение уравнения (1) с помощью опорной функции из L_2 (подходит любое регулярное решение (1) с тем же потенциалом, которое может и не принадлежать пространству L_2), мы получим новое решение уравнений Эйнштейна с тем же асимптотическим поведением. Другими словами, хотя поведение нового масштабного фактора может быть весьма причудливым (например, на конечном интервале он может расти достаточно быстро, чтобы вселенная пережила инфляционную фазу), в любом случае вселенная выйдет на фридмановский режим расширения по закону $2/3$ ⁶). Именно это свойство позволяет обеспечить выход из инфляции.

Во-вторых, ПД можно использовать для построения инфляционных моделей. Для того чтобы это показать, перепишем уравнение (2) в виде

$$\dot{\phi}^2 = V^{(1)} - V,$$

где $V^{(1)}$ – потенциал, построенный по обычным крамовским формулам из потенциала V с помощью опорной функции ψ (см. ниже формулы (5)) [21]. Предположим, что функция ψ имеет N нулей, тогда $V^{(1)}$ будет иметь, по крайней мере, N особенностей. Будем считать, что эти особенности отсутствуют в исходном потенциале V . Если в окрестности одной из особенностей $V^{(1)}$ не является положительно определенной функцией (или функция V имеет свою особенность, около которой она положительно определена), то существуют такие t_1 и t_2 , лежащие слева и справа относительно особенности, что

$$\dot{\phi}(t_1) = \dot{\phi}(t_2) = 0, \quad \dot{\phi}^2(t) < 0, \quad t_1 < t < t_2.$$

Доказательство этого утверждения очевидно. Теперь ясно, что при выполнении указанных условий вселенная непременно войдет в инфляционную фазу при $t \rightarrow t_1$. Действительно, предположим, что вселенная рождается в некоторый момент времени $t = t_i$ ($t_i < t_1$) и допустим, что существует такой промежуток времени, в течение которого выполняются все энергетические условия. Можно показать, что при стремлении к t_1

⁶) Разумеется, следует побеспокоиться, чтобы одетая опорная функция не имела нулей между инфляционной фазой, когда $\ddot{a} > 0$, и собственно фридмановским режимом. В противном случае фаза инфляции и фаза эпохи доминирования пылевой материи окажутся разделенными точкой сингулярности, т.е. окажутся двумя причинно не связанными вселенными.

вначале нарушится сильное энергетическое условие при действующем слабом. В результате вселенная начнет раздуваться вплоть до момента t_1 . При $t = t_1$ мы получаем в точности фазу де Ситтера, но лишь на *один момент*. Далее следует “запретная зона”⁷⁾, которую следует удалить, сшив решения $t = t_1$ и $t = t_2$. Заметим, что такая сшивка требует более жестких условий, чем в аналогичных задачах нерелятивистской квантовой механики, основанных на уравнении Шредингера. Здесь необходимо потребовать совпадения не только волновых функций и их первых производных в точке сшивки, но и вторых производных. Последнее необходимо во избежание скачков в давлении и плотности. Общее решение уравнения (1) содержит две константы интегрирования, поэтому не очевидно, что всегда можно удовлетворить трем условиям сшивки. Тем не менее легко убедиться, что третье условие (совпадение вторых производных) автоматически выполняется при выполнении первых двух! Это счастливое обстоятельство является следствием того, что сшивка происходит в точке перегиба $\ln \psi$. Цена, которую приходится заплатить, – наличие скачка у третьей производной масштабного фактора – не выглядит чрезмерной, по крайней мере пока справедливо классическое (т.е. не квантовое) рассмотрение.

Таким образом, контролируя нули у опорной функции ПД, можно строить точные космологии с инфляцией. Если при этом использовать в качестве затравочных решения с правильными асимптотиками (например, с динамикой по закону двух третей), то вселенная будет автоматически выходить из инфляции без каких-либо подгонок. Ниже на простых примерах мы проиллюстрируем, как это работает.

4. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ

Закон $a \sim t^{2/3}$ приводит к потенциалу

$$V = \frac{2}{3t^2}. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (1) с потенциалом (3) и нулевой космологической постоянной имеет вид

$$\psi^{(-)} = -\frac{c_1}{t} - c_2 t^2, \quad (4)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Решение описывает две не связанные друг с другом вселенные (рис. 1). Первая неограниченно продолжается в прошлое, но имеет конечную сингулярность в точке $t_0 = -(c_1/c_2)^{1/3}$, а вторая выглядит достаточно странно: рождается из сингулярности при $t = t_0$, затем расширяется и переживает суперинфляцию, т.е. к моменту $t = 0$ масштабный фактор становится бесконечно большим. Затем происходит сжатие с переходом к конечному расширению, причем масштабный фактор меняет знак. Разумеется, это решение нельзя воспринимать буквально. Зона

⁷⁾Существование “запретной” зоны коррелирует с известным фактом отсутствия суперинфляции в космологиях со скалярными полями.

Рис. 1

суперинфляции (слева и справа от момента $t = 0$) является запретной, так как в ней нарушается слабое энергетическое условие. Легко убедиться, что давление и плотность имеют вид

$$p = -\frac{c_1(c_1 + 4c_2t^3)}{t^2(c_1 + c_2t^3)^2}, \quad \rho = \frac{(2c_2t^3 - c_1)^2}{3t^2(c_1 + c_2t^3)^2},$$

а потому запрещенная зона, о которой шла речь выше, будет находиться в интервале от t_1 до t_2 , где

$$t_1 = \left[\left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{c_1}{c_2} \right]^{1/3} \sim -0.5 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{1/3}, \quad t_2 = \left[\left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \frac{c_1}{c_2} \right]^{1/3} \sim 1.6 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

Будем считать, что решение (4) справедливо только при $t \leq t_1$, где t_1 определяется формулой (5). Для того чтобы продолжить решение на область $t > t_1$, запишем (4) с другими константами интегрирования, которые мы обозначим b_1 и b_2 :

$$\psi^{(+)} = \frac{b_1}{t} + b_2t^2. \quad (6)$$

Для (6) слабое энергетическое условие будет нарушаться на интервале (t'_1, t'_2) , где $t'_{1,2}$ определяются выражениями (5), в которых осуществлена замена $c_1 \rightarrow -b_1$ и $c_2 \rightarrow -b_2$. Константы b_1 и b_2 следует выбрать так, чтобы выполнялись соотношения:⁸⁾

$$\psi^{(-)}(t_1) = \psi^{(+)}(t'_2), \quad \dot{\psi}^{(-)}(t_1) = \dot{\psi}^{(+)}(t'_2). \quad (7)$$

⁸⁾ Можно легко убедиться, что (7) не будет выполняться при $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2$, поэтому нам и пришлось вводить “второе” решение (6).

Замечательно, что из (6) следует справедливость еще одного соотношения

$$\ddot{\psi}^{(-)}(t_1) = \ddot{\psi}^{(+)}(t'_2). \quad (8)$$

Отсюда следует, что при сшивке $\psi^{(-)}(t_1)$ и $\psi^{(+)}(t'_2)$ давление, плотность и скорость изменения плотности не испытывают скачков!

Очевидным недостатком полученного решения является наличие скачка по времени: $t_1 \neq t'_2$, поэтому на интервале (t_1, t'_2) решение не определено. Несложно, однако, сдвинуть t в $\psi^{(+)}$, $\psi^{(-)}$ так, чтобы выполнялись два условия:

- 1) начальная сингулярность соответствовала бы моменту времени $t = 0$;
- 2) $t_1 = t'_2$, т.е. отсутствует скачок по времени.

Опуская вычисления, приведем ответ.

1. При $0 < t \leq t_1$ динамика описывается формулами

$$\psi^{(-)}(t) = -\frac{c_1^3}{t - c_1/c_2} - c_2^3 \left(t - \frac{c_1}{c_2}\right)^2, \quad V^{(-)} = \frac{2/3}{(t - c_1/c_2)^2}. \quad (9)$$

2. При $t_1 < t$ динамика описывается формулами

$$\psi^{(+)}(t) = \frac{c_1^3(3 + 2\sqrt{2})}{t - g} + c_2^3(3 - 2\sqrt{2})(t - g)^2, \quad V^{(+)} = \frac{2/3}{(t - g)^2}, \quad (10)$$

где

$$t_1 = \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{1/3}\right) \sim 2.6 \frac{c_1}{c_2}, \quad g = \frac{c_1}{c_2} (1 + (16 + 12\sqrt{2})^{1/3}) \sim 4.2 \frac{c_1}{c_2}. \quad (11)$$

Здесь введены новые константы $c_{1,2}^3$ (для удобства) и $t'_2 = t_1$. Сшивка уже осуществлена:

$$\begin{aligned} \psi^{(-)}(t_1) &= \psi^{(+)}(t_1), & \dot{\psi}^{(-)}(t_1) &= \dot{\psi}^{(+)}(t_1), \\ \ddot{\psi}^{(-)}(t_1) &= \ddot{\psi}^{(+)}(t_1), & V^{(-)}(t_1) &= V^{(+)}(t_1), \\ \rho^{(-)}(t_1) &= \rho^{(+)}(t_1), & p^{(-)}(t_1) &= p^{(+)}(t_1). \end{aligned}$$

График a как функции t для второй вселенной приведен на рис. 2. Отметим, что при $t < t_1$ кривая описывается формулой $a^{(-)} = (\psi^{(-)}(t))^{1/3}$, а при $t > t_1$ $a^{(+)} = (\psi^{(+)}(t))^{1/3}$, где $\psi^{(-)}(t)$ и $\psi^{(+)}(t)$ определяются формулами (9) и (10). Для определенности выбрано $c_1 = c_2 = 1$. На рис. 3 изображен график зависимости ускорения $\ddot{a}$ как функции времени. Излом расположен в точке $t = t_1$, определенной формулой (11).

Как видно, имеет место инфляция на конечном интервале (там, где торчит зубец над осью t). Отметим еще, что при $t \rightarrow \infty$ потенциал ведет себя как

$$V \sim \frac{2}{3} e^{-\sqrt{3}\phi}, \quad \phi \sim \frac{2}{\sqrt{3}} \ln t.$$

Рис. 2

Рис. 3

Таким образом, мы построили простейшую модель инфляции с выходом и асимптотическим переходом к режиму фридмановского расширения вселенной, находящейся в фазе преобладания вещества. Разумеется, этот пример не описывает нашу Вселенную, поскольку тут нет фазы осцилляции. Нет и вторичного ускорения. Тем не менее ясно, что, применяя предложенную методику, можно без принципиальных затруднений строить модельные космологии с выходом без использования подгонок параметров. Также нет необходимости использовать гибридные модели.

Напомним, что решение описывает еще одну сжимающуюся вселенную, которая не

имеет начала, но имеет конец. Такие решения выглядят весьма необычно, но их существование неизбежно, поскольку уравнения общей теории относительности обратимы по времени.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

Ясно, что любое точное решение уравнения (1), согласованное с энергетическими условиями, порождает точное решение уравнений Эйнштейна в метрике ФЛРУ. Поскольку не все решения (1) ψ будут порождать положительно определенное выражение после подстановки в правую часть (2), то точные решения уравнений Эйнштейна являются подмножеством точных решений уравнения (1). С другой стороны, фактически все точные решения уравнения Шредингера (1) с “физическими” потенциалами могут быть построены с помощью ПД⁹⁾. В качестве примера можно привести гармонический осциллятор, многосолитонные и даже конечнозонные потенциалы¹⁰⁾. Мы будем использовать это как “экспериментальный факт”, не пытаясь придать точный математический смысл утверждениям типа “все потенциалы, для которых уравнение (1) может быть явно решено для всех значений спектрального параметра, строятся с помощью ПД и, возможно, еще некоторого конечного набора симметрий из других потенциалов с тем же свойством”. Тогда, неформально говоря, можно заключить, что все точные решения уравнений Эйнштейна в плоской вселенной ФЛРУ, заполненной вещественным скалярным полем, могут быть построены с помощью ПД.

В качестве простейшего примера можно привести потенциал (3), который строится однократным ПД на фоне нулевого потенциала $V^{(0)} = 0$. Результат N -кратного ПД можно компактно записать с помощью формул Крама,

$$\psi^{(N)} = \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}, \quad V^{(N)} = V - \frac{2}{3} \frac{d^2 \ln \Delta_N}{dt^2}, \quad (12)$$

где

$$\Delta_N = \det \left[\frac{d^k \psi_i}{dt^k} \right], \quad k = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, N,$$

и

$$\Delta_{N+1} = \det \left[\frac{d^k \psi_i}{dt^k} \right], \quad k = 0, \dots, N, \quad i = 1, \dots, N+1.$$

В этих выражениях ψ_i – частные решения (1) при некотором общем исходном потенциале V и разных собственных значениях 3Λ .

Теперь ясно, как можно использовать ПД для построения моделей с двумя ускорениями. Мы уже обсуждали необходимость наличия в потенциале $V^{(N)}$ особенностей. Из формул Крама следует, что все особенности совпадают с нулями функций, входящих

⁹⁾ Мы не рассматриваем потенциалы типа прямоугольной ямы, ограничиваясь непрерывными функциями.

¹⁰⁾ Отметим, что для построения многих точно решаемых примеров часто используется идея “форм-инвариантности”. Например, гармонический осциллятор и конечнозонные потенциалы строятся с помощью замыкания цепочки дискретных симметрий. То же относится и к некоторым трансцендентам Пенлеве.

в крамовский определитель Δ_N . Поэтому задача сводится к контролю за этими нулями. Будем считать, что исходный потенциал определяется выражением (3). Решение (4) отвечает нулевому космологическому члену. Решения уравнения (1) с положительным ($\Lambda = k^2/3$) и отрицательным ($\Lambda = -k^2/3$) значениями лямбда-члена имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_+ &= \mu_1 \left(1 - \frac{1}{kt}\right) e^{kt} + \mu_2 \left(1 + \frac{1}{kt}\right) e^{-kt}, \\ \psi_- &= \nu_1 \left(\frac{\sin kt}{kt} - \cos kt\right) + \nu_2 \left(\frac{\cos kt}{kt} + \sin kt\right),\end{aligned}\quad (13)$$

где $\mu_{1,2}$ и $\nu_{1,2}$ – произвольные константы. Используя эти функции для разных значений k в формулах (12) и считая, что ψ_{N+1} задано выражением (4) для всех номеров N , можно построить множество решений, асимптотически выходящих на фридмановский режим $2/3$ при $t \rightarrow +\infty$.

Рис. 4

Ясно, что функции $\psi^{(N)}$ будут содержать множество особенностей, вблизи которых нарушается слабое энергетическое условие и, значит, будет возникать режим ускорения. Как и в примере из раздела 3, решения нужно оборвать в точках M_j перегиба $\ln \psi^{(N)}$, где реализуется точный режим де Ситтера, после чего произвести сшивку в этих точках. При этом не обязательно сшивать решения в двух “соседних” точках. Под соседними мы понимаем точки M_j и M_{j+1} , между которыми лежит лишь одна особенность функции $\psi^{(N)}$. Как показано в разделе 3, всегда можно сшить любые две точки M_j , что дает известную свободу для построения нужного нам решения.

Заметим, что с ростом N явный вид решений быстро усложняется. Приведем несколько примеров. Всюду ниже считается, что $c_1 = c_2 = 1$.

Однократное ПД с опорной функцией ψ_+ из (13) приводит к выражениям

$$\psi^{(1)} = \frac{\mu[(x-1)^3 + k^3 + 1]e^x - [(x+1)^3 + k^3 - 1]e^{-x}}{\mu(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}},$$

$$V^{(1)} = \frac{2k^2}{3} \frac{\mu^2 e^{2x} + e^{-2x} - 4\mu x^2 - 2\mu}{(\mu(x-1)e^x + (x+1)e^{-x})^2},$$

где $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu$, $x = kt$. При $\mu < 0$ график для $\psi^{(1)}(t)$ изображен на рис. 4. Здесь уже вырезаны области, в которых нарушается слабое энергетическое условие. Граничные точки (там, где $\dot{\phi} = 0$) следует сшить. Тогда становится ясно, что такое решение описывает две вселенные. Первая сжимается, причем в определенный момент, предшествующий коллапсу в финальную сингулярность, она переживает фазу обращенной по времени инфляции. Динамика второй вселенной фактически является обращенной по времени динамикой первой: вселенная рождается в сингулярности, некоторое время расширяется, затем переживает фазу раздувания, выходит из инфляции и асимптотически переходит к фридмановскому расширению, характерному для вселенной с преобладанием вещества.

Рис. 5

Новая ситуация возникает при $\mu > 0$. На рис. 5 приведен график $\psi^{(1)}(t)$ для $\mu = 2$. Здесь изображена динамика трех вселенных. Одна коллапсирует в конечную сингулярность, но не имеет начала. Вторая рождается в исходной сингулярности, некоторое время

мя расширяется, после чего начинает сжиматься и коллапсирует в финальную сингулярность (напомним, что $k = 0$). Третья рождается, расширяется, проходит стадию раздувания (граничные точки сшиваются) и выходит на режим $2/3$.

Рис. 6

В качестве последнего примера приведем решение, полученное двукратным ПД (рис. 6). Одна опорная функция является решением (1) с $\Lambda = 1/3$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $k = 1$, вторая с $\Lambda = 4/3$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $k = 2$. Здесь тоже появляются три вселенные, причем теперь вторая, существующая конечное время, проходит через фазу инфляции, *после чего коллапсирует*. Такие решения очень похожи на решения [11], которые упоминались в начале раздела 2.

Мы не ставили себе целью построить модель с двумя (или больше) ускорениями. Ясно, что такая задача может быть в принципе решена с помощью описанного метода. Более того, величина “ускорения” определяется плотностью ρ , поэтому, строя потенциалы с несколькими особенностями, можно получать несколько инфляций, идущих с разной степенью интенсивности. Если вторая инфляция соответствует меньшему значению ρ , чем первая, то она будет протекать значительно медленнее. Однако мы считаем, что начинать заниматься построением моделей с использованием ПД пока рано. Необходимо понять, как включить в рассмотрение промежуточную фазу осцилляции. Нам пока неясно, как можно это сделать. Очевидно, что без такой фазы любые инфляционные модели абсолютно нежизнеспособны¹¹⁾.

¹¹⁾ Некоторую “подсказку” дают удивительные потенциалы, полученные путем замыкания цепочек Веселова–Шабата [24]. Эти потенциалы содержат модулированные по амплитуде осцилляции

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предположим, что точное решение $a(t) = \sqrt[3]{\psi^{(N)}(t)}$, описывающее две фазы ускорения и промежуточную осцилляцию, будет построено. Очевидно, что мы столкнемся с задачей интерпретации потенциала $V^{(N)}$, который, без сомнения, будет иметь “чудовищный” вид и вряд ли сможет быть получен из какой-нибудь теории поля, или даже теории струн. Действительно, даже потенциалы, полученные однократным ПД, уже выглядят слишком сложно и нефизично, а ведь они достаточно просты, чтобы описать даже два последовательных ускорения без осцилляций!

Естественной реакцией на появление таких выражений будет, вероятно, заключение, что реальная космология не является точно решаемой. С этой точки зрения точные космологии могут быть полезными моделями, но никак не способны описать реальную Вселенную. Однако верно ли такое заключение? Вполне возможно, что правильный потенциал самодействующего скалярного поля вовсе не определяется физикой элементарных частиц, а появляется по другим причинам. Любые предположения на этот счет будут ненадежны и спекулятивны. Тем не менее мы попробуем указать возможный источник странных потенциалов, лежащий за пределами и теории поля, и (будущей) теории струн.

Согласно хаотической инфляции Линде в различных областях Вселенной реализуются все возможные вакуумные состояния, что, в свою очередь, должно приводить к различным спектрам масс элементарных частиц, населяющих эти области. В рамках такой парадигмы идентификация нашей области не вытекает из одних законов физики, а требуется еще и что-то вроде “слабого антропного принципа”. Другими словами, если даже всеобъемлющая M -теория будет построена и ее мощь будет соответствовать ожиданиям, все равно этого окажется недостаточно для объяснения того, почему вакуумное состояние нашей Вселенной именно такое, а не другое и т. д.

Иллюстрируя такую картину, Линде вводит понятие *Мультимира* [14]. В простейшем варианте Мультимир можно описать как бесконечную сумму всех возможных действий, описывающих все возможные варианты квантовой теории поля и M -теории¹²⁾. Хотя гипотезы такого рода могут показаться спекулятивными, следует помнить, что все существующие объяснения наблюдаемого значения вакуумной энергии ($\sim 0.7\rho_c$) получены на базе антропного принципа, который имеет смысл, по-видимому, лишь если гипотеза о существовании Мультимира верна¹³⁾.

Если принять эту гипотезу, то ясно, что возможно существование областей с самыми

и должны быть отнесены к разряду точно решаемых. Спектры представляют собой набор нескольких арифметических прогрессий, а решения, в зависимости от специального условия, либо выражаются через θ -функцию Римана, либо являются обобщением трансцендент Пенлеве. В частности, решение трехзвеньевой ($N = 3$) цепочки выражается через трансценденты уравнения P_{IV} .

¹²⁾ На самом деле Линде идет еще дальше, предлагая включать и модели, не допускающие лагранжевой формулировки, и даже дискретные модели типа клеточных автоматов. Некоторые не останавливаются и на этом, предлагая рассматривать в качестве элементов Мультимира все возможные математические структуры (см. [25]).

¹³⁾ Необычную альтернативу представляет гипотеза “самосогласованности”, предложенная в [26].

странными потенциалами самодействия. В этом случае следует пересмотреть те вопросы, которые мы обычно задаем. Например, как правило, потенциалы $V(\phi)$ берутся из физики частицы: $V \sim \phi^2$, $V \sim \phi^4$, или теории струн: $V \sim e^{\alpha\phi}$. Почему такие, а не, скажем, $V \sim \phi^8$? Потому, что при $d = 4$ квантовая теория с таким потенциалом будет неперенормируема. Есть все основания считать, что неперенормируемая теория – это “плохая” теория, поскольку на каждом новом масштабе она требует нового лагранжиана, а потому содержит, вообще говоря, бесконечное число неопределенных параметров. Кроме перенормируемости, модели должны удовлетворять и другим общеизвестным требованиям: унитарности, ограниченности гамильтониана снизу и т.д.

Теперь представим себе, что нам удалось построить семейство потенциалов, приводящих к согласованной с наблюдениями динамике вселенной (скажем, с помощью ПД). На следующем шаге следует проверить эти модели методами квантовой теории (перенормируемость и т.д.). Если какой-нибудь потенциал выдержит соответствующую проверку, то мы вполне можем использовать его, несмотря на то что он не получается из первых принципов теории поля (или струн). Он получается из концепции Мультимира, а теория поля (струн) лишь должна проверить его согласованность.

Благодарности. Одному из авторов (А. Ю.) хотелось бы выразить сердечную благодарность организаторам и участникам Школы Фока 2002 (IFSAP-2002), на которой докладывалась эта работа.

Список литературы

- [1] A. H. Guth. Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 347.
- [2] A. D. Linde. Phys. Lett. B. 1982. V. 108. P. 389; A. Albrecht, P. J. Steinhardt. Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1220.
- [3] A. D. Linde. Phys. Lett. B. 1983. V. 129. P. 177.
- [4] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al. Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565; astro-ph/9812133; A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al. Astron. J. 1998. V. 116. P. 1009; astro-ph/9805201; P. M. Garnavich, S. Jha, P. Challis et al. Astrophys. J. 1998. V. 509. P. 74; astro-ph/9806396.
- [5] T. P. J. Steinhardt, L. M. Wang, I. Zlatev. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 123504; astro-ph/9812313; B. Ratra, P. J. Peebles. Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 3406; I. Zlatev, L. M. Wang, P. J. Steinhardt. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 896; astro-ph/9807002.
- [6] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok. Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 123522; hep-th/0103239.
- [7] P. J. Steinhardt, N. Turok. Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 126003; hep-th/0111098; P. J. Steinhardt, N. Turok. A cyclic model of the universe. hep-th/0111030; P. J. Steinhardt, N. Turok. Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 101302; astro-ph/0112537.
- [8] R. Dick. Class. Q. Grav. 2001. V. 18. № 7. P. R1–R24; hep-th/0105320.
- [9] R. Kallosh, L. Kofman, A. Linde. Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 123523; hep-th/0104073; D. H. Lyth. Phys. Lett. B. 2002. V. 526. P. 173; hep-ph/0110007; R. Brandenberger, F. Finelli. JHEP. 2001. V. 0111. P. 056; hep-th/0109004.
- [10] Yu. V. Baryshev. Astron. Astrophys. Trans. 2000. V. 19. P. 417.
- [11] G. Felder, A. Frolov, L. Kofman, A. Linde. Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 023507; hep-th/0202017.
- [12] R. Kallosh, A. D. Linde, S. Prokushkin, M. Shmakova. Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 105016; hep-th/0110089; A. Linde. JHEP. 2001. V. 0111. P. 052; hep-th/0110195.

- [13] *J. D. Barrow*. Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 3055; *R. Maartens, D. R. Taylor, N. Roussos*. Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 3358; *В. М. Журавлев, С. В. Червон, В. К. Шчиголов*. ЖЭТФ. 1998. Т. 114. С. 406; *S. V. Chervon, V. M. Zhuravlev, V. K. Shchigolev*. Phys. Lett. B. 1997. V. 398. P. 269; *J. D. Barrow*. Phys. Lett. B. 1990. V. 235. P. 40; *G. F. R. Ellis, M. S. Madsen*. Class. Q. Grav. 1991. V. 8. P. 667; *J. E. Lidsey*. Class. Q. Grav. 1991. V. 8. P. 923; *J. D. Barrow, P. Saich*. Class. Q. Grav. 1993. V. 10. P. 279; *P. Parson, J. D. Barrow*. Class. Q. Grav. 1995. V. 12. P. 1715.
- [14] *A. D. Linde*. Phys. Lett. B. 1988. V. 200. P. 272; *A. D. Linde*. Particle Physics and Inflationary Cosmology. Chur, Switzerland: Harwood, 1990.
- [15] *В. М. Журавлев, С. В. Червон*. ЖЭТФ. 2000. Т. 118. С. 259.
- [16] *A. V. Yurov*. Class. Q. Grav. 2001. V. 18. P. 3753.
- [17] *A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier*. Phys. Lett. B. 2001. V. 511. P. 265; gr-qc/0103004.
- [18] *A. D. Linde*. Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 748; astro-ph/9307002.
- [19] *V. B. Matveev, M. A. Salle*. Darboux Transformation and Solitons. Berlin–Heidelberg: Springer, 1991.
- [20] *J. G. Darboux*. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1882. V. 94. P. 1456.
- [21] *M. M. Crum*. Quart. J. Math. Oxford. 1955. V. 6. P. 121.
- [22] *F. J. Tipler et al*. Closed universes with black holes but no event horizons as a solution to the black hole information problem. gr-qc/0003082.
- [23] *В. Э. Адлер*. ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 323.
- [24] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат*. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1.
- [25] *M. Tegmark*. Ann. Phys. 1998. V. 270. P. 1; gr-qc/9704009.
- [26] *H. B. Nielsen, C. Froggatt*. Influence from the Future. hep-ph/9607375.