Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Фермион в кулоновском и магнитном полях в $2 + 1$ измерениях,
ТМФ, 1999, том 119, номер 1, 105–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:13:45

© 1999 г.

В. Р. Халилов*

ФЕРМИОН В КУЛОНОВСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Построены квазиклассические решения и спектр энергий уравнения Дирака в сильном кулоновском и слабом постоянном однородном магнитном полях в $2 + 1$ измерениях применительно к проблеме двумерного водородоподобного атома, помещенного во внешнее магнитное поле. Найдены некоторые “точные” решения уравнений Дирака и Паули, которые описывают “бесспиновые” фермионы в сильных кулоновском и однородном магнитном полях в $2 + 1$ измерениях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы нерелятивистских электронов во внешнем электромагнитном поле, движение которых ограничено в плоскости, привлекают большой интерес в связи с возможностью применения описывающих их теоретико-полевых моделей для изучения таких замечательных квантовых макроскопических явлений, как квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [1, 2]. Ряд эффектов в физике конденсированных сред указывает на существование $(2 + 1)$ -мерных систем со спектром энергий, определяемым гамильтонианом уравнения Дирака [3]. В частности, вырожденный плоский полупроводник с низкоэнергетической динамикой электронов, как предполагают, можно хорошо описать с помощью $(2 + 1)$ -мерной релятивистской теории Дирака [4]. В связи с этим изучение физических эффектов, протекающих в $(2 + 1)$ -мерных системах заряженных частиц в присутствии сильных внешних полей, актуально в настоящее время с точки зрения возможных практических приложений.

Здесь мы найдем квазиклассические и некоторые точные решения уравнений Паули и Дирака во внешних кулоновском и магнитном полях в $2 + 1$ измерениях. Физической реализацией изучаемых моделей могут служить системы электронов, движение которых ограничено в плоскости. Известно [5], что точных решений этих уравнений в терминах специальных функций не существует, однако, как показано в работах [6, 7], в нерелятивистском случае можно найти аналитические решения, которые представимы в виде произведения некоторой весовой функции и конечного полинома. Такие решения

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: khalilov@thc.phys.msu.su

называют точными. Точные решения уравнения Дирака и эффект рождения пар заряженных фермионов из вакуума сильным кулоновским полем протяженного источника в $2 + 1$ измерениях обсуждались недавно в статье [8].

В данной статье в основном используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$, однако мы восстанавливаем размерности физических величин в ряде мест, где это необходимо.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Поскольку [3] в $2 + 1$ измерениях алгебра матриц Дирака может быть представлена в терминах матриц Паули как $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^k = i\sigma^k$, уравнение Дирака для электрона массы m и заряда $e = -e_0$, $e_0 > 0$, взаимодействие которого с внешним полем удовлетворяет принципу “минимальности”, имеет вид

$$(i\partial_t - H_D)\Psi = 0, \quad (1)$$

где

$$H_D = \alpha \mathbf{P} + \beta m + eA^0 \equiv \sigma^1 P_2 - \sigma^2 P_1 + \sigma^3 m + eA^0 \quad (2)$$

— гамильтониан, $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ — оператор обобщенного импульса электрона, A_μ — вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля, а полный момент импульса электрона имеет только одну компоненту $J_z = L_z + S_z$, где $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ и $S_z = \sigma^3/2$.

Для того чтобы включить спин электрона в одночастичную теорию дираковского поля в $3 + 1$ измерениях, используют только четные части соответствующих спиновых операторов, которые не смешивают состояния с различными знаками энергии. Спиновые операторы должны иметь необходимые ковариантные свойства и быть интегралами движения. Четная часть некоторого оператора $\bar{A}$ определяется формулой

$$\bar{A} = \frac{H_D A + A H_D}{2E}. \quad (3)$$

Если внешнее электромагнитное поле однородно, предпочтение отдается так называемому оператору тензора поляризации [9]

$$T_d^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \Psi. \quad (4)$$

В $2 + 1$ измерениях для используемого представления γ -матриц выбранный спиновый оператор имеет только следующие матричные компоненты:

$$T^{01} = -\sigma^1, \quad T^{02} = -\sigma^2, \quad T^{12} = I, \quad (5)$$

где I — двухрядная диагональная единичная матрица.

Рассмотрим для определенности движение электрона во внешнем однородном постоянном магнитном поле напряженности B , вектор-потенциал которого выберем в калибровке Ландау $A^0 = A^1 = 0$, $A^2 = Bx$. Спиновый оператор T^{12} в таком поле является

интегралом движения. Полагая $\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp(-i\epsilon Et + ipy)\psi(x)$, где $\epsilon = \pm 1$ – знак, а $E > 0$ – абсолютное значение энергии, и подставляя Ψ в уравнение (1), нетрудно найти спектр энергии

$$E_n = \epsilon \sqrt{m^2 + 2n|eB|} \quad (6)$$

и две компоненты $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} c_1 u_{n-1}(\eta) \\ c_2 u_n(\eta) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь функции

$$u_n(\eta) = \frac{(e_0 B)^{1/4}}{(2^n n! \pi^{1/2})^{1/2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) H_n(\eta)$$

выражаются через полиномы Эрмита $H_n(\eta)$ аргумента $\eta = (e_0 B)^{1/2} x + p/(e_0 B)^{1/2}$, целое число n ($n = 0, 1, 2, \dots$) указывает номер уровня Ландау, а коэффициенты c_i удовлетворяют условию нормировки $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

Подставляя в формулу (3) величины H_D и E из соотношений (2) и (6), получим $\bar{T}^{12} = H_D/E \equiv \mu_B$, а для спинового квантового числа фермиона находим

$$\frac{\mu_B}{2} \Psi = \frac{1}{2} \epsilon \Psi. \quad (8)$$

Отсюда видно, что спиновое квантовое число фермиона при фиксированных ϵ и B может иметь только одно значение. Это означает, что, в отличие от случая трех пространственных измерений, в 2 + 1 измерениях нет вырождения уровней Ландау по спину, т.е. фактически (2 + 1)-мерные электроны ведут себя подобно бесспиновым фермионам.

В нерелятивистском приближении волновая функция (2 + 1)-мерных фермионов имеет лишь одну компоненту, если уравнение Паули выводится из уравнения (1); Ψ можно представить в виде [10, 11]

$$\Psi = \exp\left(-\frac{imc^2 t}{\hbar}\right) \psi. \quad (9)$$

Здесь мы восстановили фундаментальные константы: c – скорость света и $\hbar$ – постоянную Планка. В результате в первом приближении по $1/c$ получим уравнение

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right) \psi = \left(\frac{P_1^2 + P_2^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} F_{12}\right) \psi, \quad (10)$$

где $P_k = -i\hbar \partial/\partial x^k - eA_k/c$.

Ниже мы найдем некоторые решения уравнений (1) и (10) во внешнем кулоновском поле, описываемом вектор-потенциалом

$$A^0(r) = -\frac{Ze_0}{r}, \quad A^x = A^y = 0, \quad (11)$$

и однородном постоянном магнитном поле напряженности B , вектор-потенциал которого выберем в симметричной калибровке как

$$A^0 = 0, \quad A^x = -\frac{By}{2}, \quad A^y = \frac{Bx}{2}. \quad (12)$$

Вначале имеет смысл кратко проанализировать особенности движения релятивистского электрона во внешнем кулоновском поле точечного источника [8].

3. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЯДРА

Решение уравнения Дирака (1) в полях (11), (12) ищем в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\epsilon Et + il\varphi) \psi(r, \varphi), \quad (13)$$

где $\epsilon = \pm 1$ – знак, $E > 0$ – абсолютное значение энергии, l – целое число и

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Заметим, что функция $\psi(r, \varphi)$ является собственной функцией оператора полного момента J_z с собственным значением $l + 1/2$.

Подставляя выражения (13) и (14) в уравнение (1) и учитывая равенства

$$P_x \pm iP_y = -ie^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \left(\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{eBr}{2} \right) \right), \quad (15)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \left(\frac{l}{r} - \frac{eBr}{2} \right) f + \left(\epsilon E + m + \frac{Z\alpha}{r} \right) g &= 0, \\ \frac{dg}{dr} + \left(\frac{1+l}{r} - \frac{eBr}{2} \right) g - \left(\epsilon E - m + \frac{Z\alpha}{r} \right) f &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\alpha \equiv e^2 = 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

Точные решения и спектр энергий уравнения Дирака в кулоновском поле точечного ядра в $2 + 1$ измерениях можно найти следующим образом [8]. Положим в уравнениях (16) $B = 0$, а функции $f(r)$ и $g(r)$ представим в виде

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m + E} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g &= \sqrt{m - E} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \alpha \equiv e^2, \quad (18)$$

а γ определяет асимптотическое поведение волновых функций при малых r .

Решение уравнений (16) при $B = 0$, конечное при $\rho = 0$, выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF \left(\gamma - \frac{1}{2} - \left(\frac{Z\alpha E}{\lambda} \right), 2\gamma; \rho \right), \\ Q_2 &= DF \left(\gamma + \frac{1}{2} - \left(\frac{Z\alpha E}{\lambda} \right), 2\gamma; \rho \right), \end{aligned} \quad (19)$$

причем связь между постоянными A и D задается соотношением

$$D = \frac{\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda}}{l + \frac{1}{2} + \frac{Z\alpha m}{\lambda}} A. \quad (20)$$

Спектр энергий определяется из уравнения

$$\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} = -n_r. \quad (21)$$

Нетрудно показать, что допустимы следующие значения квантового числа n_r : $n_r = 0, 1, 2, \dots$ при $l \geq 0$ и $n_r = 1, 2, 3, \dots$ при $l < 0$. Следовательно, дискретный спектр энергий электрона в поле (11) имеет вид

$$E = m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n_r + \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2} \right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (22)$$

Этот спектр энергий похож на спектр энергий бесспиновой заряженной частицы в кулоновском поле [11] в трех пространственных измерениях, что и можно было ожидать, т.к. в (2+1)-мерной квантовой теории электрон фактически ведет себя подобно бесспиновому фермиону. Однако в отличие от энергии истинного бозона энергия бесспинового электрона на низшем уровне ($l = n_r = 0$) есть

$$E_0 = m \sqrt{1 - (2Z\alpha)^2} \quad (23)$$

и обращается в нуль при $Z\alpha = 1/2$.

Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$, т.е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [12–15], что эквивалентно учету конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал.

4. ФЕРМИОН В КУЛОНОВСКОМ И СЛАБОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Исключая из системы (16) функцию $g(r)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} + \left(E^2 - m^2 - |eB|(l+1) + \frac{2\epsilon E Z\alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - l^2}{r^2} - \frac{(\epsilon B r)^2}{4} \right) f(r) + \\ + \frac{Z\alpha}{r^2} \left(\epsilon E + m + \frac{Z\alpha}{r} \right)^{-1} \left(\frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{|eB|r^2 + 2l}{2r} f(r) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что последний член этого уравнения пропорционален $\hbar$. Этот член мал при достаточно больших r , однако он влияет на асимптотику решений при очень малых

$r \sim \hbar/mc$. Учитывая это, в последнем члене уравнения (24) сохраним только главные члены. Затем, вводя функцию $F(r) = rf(r)$, преобразуем уравнение (24) к виду

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left(K + \frac{2EZ\alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - l(l+1)}{r^2} - \frac{(eBr)^2}{4} \right) F(r) = 0, \quad (25)$$

где

$$K = E^2 - m^2 - |eB| \left(l + \frac{3}{2} \right). \quad (26)$$

Подчеркнем, что уравнение (25) практически точно описывает движение электрона в кулоновском поле точечного источника и слабом магнитном поле лишь при малых r .

Легко видеть, что как при положительных, так и при отрицательных K функция $F(r) \sim r^\gamma$ при малых r , где γ определяется формулой (18). Рассмотрим случай отрицательных K и предел относительно слабого магнитного поля. При этом последний член в уравнении (25) можно опустить, и тогда уравнение (25) имеет точное решение, стремящееся к нулю при $r \rightarrow \infty$, которое можно выразить в виде функции Уиттекера

$$F(r) \sim W_{\beta, \frac{\nu}{2}}(2\lambda r), \quad (27)$$

где

$$\beta = \frac{EZ\alpha}{\lambda}, \quad \nu = 2\sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2 + |eB| \left(l + \frac{3}{2}\right)}. \quad (28)$$

Функцию (27) можно записать в виде произведения вырожденной гипергеометрической функции $F(a, b; z)$ и асимптотических решений, соответствующих малым и большим r , следующим образом:

$$W_{\beta, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \beta)} M_{\beta, \mu} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \beta)} M_{\beta, -\mu}, \quad (29)$$

где

$$M_{\beta, \pm\mu} = z^{\pm\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(\pm\mu - \beta + \frac{1}{2}, \pm 2\mu + 1; z\right). \quad (30)$$

Конечное при $r = 0$ для произвольных l решение, очевидно, определяется первым членом правой части уравнения (29). Спектр энергий формируется на больших расстояниях, поэтому гипергеометрическая функция $F(a, b; z)$ должна сводиться к полиному при больших z , что произойдет, если параметр a равен целому отрицательному числу или нулю. Дискретный спектр энергий электрона, если определять его с помощью решений уравнения (25), имеет вид

$$E = \left[m + \frac{|eB|}{2m} \left(l + \frac{3}{2} \right) \right] \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2} \right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (31)$$

В пределе слабого магнитного поля решения и дискретные уровни энергии с $E < m$ можно также найти прямо для системы (16) в квазиклассическом приближении. Для этого, заменив l на $l + 1/2$ в первом из уравнений системы (16), что необходимо для получения правильного значения фазы квазиклассической волновой функции при больших r , будем искать решения этой системы в стандартном виде

$$f(r) = A(r) \exp(iS(r)), \quad g(r) = B(r) \exp(iS(r)). \quad (32)$$

Здесь $A(r)$ и $B(r)$ – медленно меняющиеся функции. Подставляя (32) в (16), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $S(r)$ в нулевом приближении по $\hbar$ в виде

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 \equiv Q^2 = E^2 - m^2 - eB \left(l + \frac{1}{2}\right) + \frac{2EZ\alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} - \frac{(eBr)^2}{4}. \quad (33)$$

Дискретные уровни энергии с $E < m$ определяются интегралом

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} Q dr = \pi \left(-\sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2} + \frac{EZ\alpha}{\sqrt{|m^2 + eB(l + \frac{1}{2}) - E^2|}} \right), \quad (34)$$

где $r_{\max} > r_{\min}$ – классические точки поворота. При вычислении интеграла и корней подкоренного выражения член, пропорциональный $(eBr)^2$, в величине Q не учитывался. Если потребовать, чтобы квазиклассическое выражение для спектра сводилось к формуле (22) при $B = 0$, мы должны приравнять правую часть формулы (34) величине πn_r . Тогда в пределе слабого магнитного поля для дискретных уровней энергии с $E < m$ и для $l \neq 0$ получим

$$E = \left[m + \frac{|eB|}{2m} \left(l + \frac{1}{2}\right) \right] \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2} \right]^{-1/2}. \quad (35)$$

Как и следовало ожидать, эта формула для спектра энергий отличается от полученной выше (в соответствии с уравнением (25)) формулы (31).

В нерелятивистском приближении выражение для спектра энергий принимает вид

$$E_{\text{non}} = \frac{|eB|}{2m} \left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{(Z\alpha)^2}{2(n_r + |l + \frac{1}{2}|)^2}. \quad (36)$$

Для нахождения энергетических уровней при $l = 0$ нужно найти точное решение уравнения (25) вблизи точки $r = 0$ и сплести его с квазиклассическим решением при больших r . Для больших квантовых чисел $E \approx m$ точное решение уравнения (25) с $l = 0$, без учета члена $(eBr)^2$, в приближении $Z\alpha \ll 1$, вблизи $r = 0$ имеет вид

$$F = \sqrt{r} J_1(\sqrt{8mZ\alpha r}). \quad (37)$$

Учитывая, что при $l = 0$ имеем $r_{\min} = 0$, и сшивая решение (37) при $r \gg 1/mZ\alpha$ с квазиклассическим решением уравнения (25), получим следующее правило квантования:

$$\int_0^{r_{\max}} \sqrt{E^2 - m^2 - \frac{3|eB|}{2} + \frac{2EZ\alpha}{r} + \left(\frac{Z\alpha}{r}\right)^2} = \pi n. \quad (38)$$

Квазиклассическое движение электрона в магнитном и кулоновском полях (для определенности мы имеем в виду поле притяжения) можно охарактеризовать с помощью величин $l_B = \sqrt{2\hbar c/|eB|}$ (“магнитная длина”) и $a_B = m\hbar^2/Ze^2$ (радиус Бора водородоподобного атома заряда Ze). В приближении слабого магнитного поля $l_B \gg a_B$ или, что эквивалентно, $B \ll B_{\text{cr}}(Z\alpha)^2 \equiv m^2 c^3 / e_0 \hbar (Z\alpha)^2 \equiv B_0$, т.е. движение электрона определяется кулоновским полем, а спектр энергий формируется на расстояниях порядка a_B и является, по существу, “релятивистским” спектром водородоподобного атома, возмущенного слабым магнитным полем. Это приводит к зеемановскому расщеплению спектра, которое линейно по напряженности магнитного поля и пропорционально “магнитному квантовому числу” $l + 1/2$.

5. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В СИЛЬНЫХ КУЛОНОВСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Рассмотрим теперь некоторые точные решения релятивистского уравнения (25) в сильных кулоновском и магнитном полях, когда $B \sim B_0$. Так как теперь в уравнении (25) нельзя пренебрегать членом $(eBr)^2/2$, то при больших r асимптотическое решение $F(r) \sim \exp(-ar^2/2)$, где $a = |eB|/2$. Представим решения уравнения (25) с $\epsilon = 1$ в виде произведения полинома и асимптотических решений (при малых и больших r) в виде

$$F(r) = r^\gamma \exp\left(-\frac{ar^2}{2}\right) \sum_{n=0} c_n r^n. \quad (39)$$

Подставляя ряд (39) в уравнение (25), получим

$$\sum_{n=0} c_n r^{n+\gamma} \exp\left(-\frac{ar^2}{2}\right) [(n^2 + n(2\gamma - 1))r^{-2} + P + 2EZ\alpha r^{-1}] = 0, \quad (40)$$

где

$$P = E^2 - m^2 - 2a(n + l + 2 + \gamma). \quad (41)$$

Из формулы (40) находим

$$c_0 \neq 0, \quad (42)$$

$$2EZ\alpha c_0 + 2\gamma c_1 = 0 \quad (43)$$

и (для $n \geq 2$)

$$[n^2 + n(2\gamma - 1)]c_n + 2EZ\alpha c_{n-1} + [E^2 - m^2 - 2a(n + l + \gamma)]c_{n-2} = 0. \quad (44)$$

Мы получили трехчленное рекуррентное соотношение. Заметим, что, записав его в форме

$$[n^2 + n(2\gamma - 1)] \frac{c_n}{c_{n-1}} + 2EZ\alpha + [E^2 - m^2 - 2a(n + l + \gamma)] \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} = 0, \quad (45)$$

можно получить цепную дробь, позволяющую в принципе связать параметры уравнения, для которых можно найти решение. Однако анализ получаемого с помощью цепной дроби соотношения между параметрами сложен, поэтому для небольших n проще получить решения прямо из соотношений (42), (43) и (44).

Из рекуррентного соотношения (44) следует, что решение становится полиномом $(n - 1)$ -й степени, если потребовать выполнения условий $c_n = c_{n+1} = 0$. Остальные коэффициенты c_{n+k} для любого положительного целого k исчезают автоматически. Из (44) можно также получить соотношение между параметрами, при котором решения становятся полиномиальными,

$$E^2 - m^2 = 2a(n + 1 + l + \gamma). \quad (46)$$

Простейшие решения (для $n = 2, 3$) нетрудно получить в аналитическом виде. Так, из соотношений (43), (44) и (46) найдем энергию

$$E_2 = m \left(1 - \frac{4(Z\alpha)^2(3 + l + \gamma)}{2\gamma} \right)^{-1/2}, \quad (47)$$

$$E_3 = m \left(1 - \frac{2(Z\alpha)^2(4 + l + \gamma)}{1 + 6\gamma} \right)^{-1/2}, \quad (48)$$

а также соотношения между величиной напряженности магнитного поля и другими параметрами, при которых решения в виде полиномов первой и второй степеней, соответственно, существуют:

$$eB = \frac{(2E_2 Z\alpha)^2}{2\gamma} \quad \text{при } n = 2, \quad (49)$$

$$eB = \frac{(E_3 Z\alpha)^2}{1 + 6\gamma} \quad \text{при } n = 3. \quad (50)$$

Для простейших решений с $n = 2, 3$ значения параметров E^2, B , при которых соответствующие коэффициенты полиномов $c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+k}$ обращаются в нуль, единственны. Для $n \geq 4$ число различных значений этих параметров, а значит, и число различных решений равно $n/2$ [7, 16]. Тем не менее для каждого n имеется решение, являющееся ортогональным полиномом степени $n - 1$.

Эти решения представляют особый интерес, т.к. согласно известным теоремам [17] каждый ортогональный полином n -го порядка ортогонален (с определенной весовой функцией) всем полиномам меньшего порядка, а нули каждого элемента семейства ортогональных полиномов действительны и различны. В частности, ортогональный полином n -го порядка имеет n нулей. Заметим, что именно для ортогональных полиномов

значения параметров E^2 , B минимальны. Нелишне подчеркнуть, что только решения в виде полиномов гарантируют нормированность собственных функций.

В нерелятивистском приближении из соотношений (47), (49) и (48), (50) найдем соответствующие значения энергии

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2m(Ze^2)^2}{\hbar^2(1+|2l+1|)} \left(3 + l + \frac{1}{2} + \left| l + \frac{1}{2} \right| \right), \\ E_3 &= \frac{m(Ze^2)^2}{\hbar^2(4+|6l+3|)} \left(4 + l + \frac{1}{2} + \left| l + \frac{1}{2} \right| \right), \end{aligned} \quad (51)$$

а также соотношения между значениями напряженности магнитного поля и параметрами, характеризующими кулоновское взаимодействие и проекцию орбитального момента электрона, при которых решения в виде полиномов существуют,

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= 4mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{1+|2l+1|} \quad \text{при} \quad n=2, \\ \hbar\omega &= 2mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{4+|6l+3|} \quad \text{при} \quad n=3, \end{aligned} \quad (52)$$

где $\omega = |eB|/\hbar mc$ — циклотронная частота.

Следует отметить, что решениям в виде полиномов в квантовой механике отвечают в классической механике решения, соответствующие существованию замкнутых траекторий частиц в рассматриваемых полях при выполнении соотношений типа (52).

6. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Точные решения изучаемых уравнений в случае суперпозиции внешних сильных кулоновского и магнитного полей можно найти в виде произведения некоторой весовой функции и конечного полинома. Для этого используется метод, близкий методу факторизации нерелятивистской квантовой механики (подробно о методе факторизации см. в книге [18]). Этот метод позволяет находить спектр любого эрмитова оператора, собственные значения которого ограничены снизу. Для этого оператор, спектр которого требуется найти, представляется в виде произведения операторов типа операторов рождения и уничтожения a^+ , a , используемых для приведения гамильтониана гармонического осциллятора к виду $H_{\text{osc}} = \hbar\omega(a^+a + 1/2)$.

Решения уравнения (25) будем искать в виде

$$F(r) = r^\gamma \exp\left(-\frac{ar^2}{2}\right) f(r), \quad (53)$$

где γ и a те же, что и в предыдущем разделе. Подставляя формулу (53) в уравнение (25), получим

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2\gamma}{x} - 2x \right) \frac{d}{dx} + \left(K + \frac{b}{x} \right) \right] f(x) = 0, \quad (54)$$

где

$$K = \frac{[E^2 - m^2 - 2a(l + 2 + \gamma)]}{a}, \quad b = \frac{2EZ\alpha}{\sqrt{a}}. \quad (55)$$

Видно, что проблема нахождения спектра для уравнения (25) оказывается эквивалентной проблеме определения спектра собственных значений оператора [6]

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{2\gamma}{x} - 2x\right) \frac{d}{dx} - \frac{b}{x}. \quad (56)$$

Оператор (56) ограничен и может быть представлен в виде

$$H = a^+ a + p, \quad (57)$$

где p имеет смысл квантового числа данного оператора, причем $p = K$. Собственные функции оператора H при $p = 0$ должны удовлетворять уравнению

$$a\psi = 0. \quad (58)$$

Если решения в виде полиномов существуют для уравнения (58), то оператор a , очевидно, должен иметь вид

$$a = \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{k=1}^s \frac{1}{x + x_k}, \quad (59)$$

где x_k – корни, а s – степень соответствующего полинома. Тогда оператор a^+ будет иметь вид

$$a^+ = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\gamma}{x} + 2x - \sum_{k=1}^s \frac{1}{x + x_k}. \quad (60)$$

Подставляя выражения (59) и (60) в уравнение (57) и затем сравнивая (56) и (57), получим систему уравнений для определения корней x_k

$$\frac{2\gamma}{x_k} - 2x_k - 2 \sum_{j \neq k}^s \frac{1}{x_j - x_k} = 0 \quad (61)$$

и соотношение

$$-b = 2\gamma \sum_{k=1}^s x_k^{-1}, \quad \text{где} \quad p = s. \quad (62)$$

Суммируя уравнения системы (61), последнее соотношение можно привести к виду

$$-b = 2 \sum_{k=1}^s x_k, \quad \text{где} \quad p = s. \quad (63)$$

Из этих формул мы снова можем найти простейшие решения (для $s = 1, 2$), а также значения энергии и напряженности магнитного поля, которые совпадают с решениями (47)–(50).

Заметим, что в нерелятивистском случае проблему можно свести к нахождению решений и спектра собственных значений энергии следующего уравнения Шредингера (для функции $f(r)$), которое нетрудно получить из (24) в виде

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{x^2}{4} - \frac{l^2}{4x^2} \pm \frac{b}{x} + \beta \right) f(x) = 0. \quad (64)$$

Здесь $x = r/l_B$, $\beta = 2E/\hbar\omega - (l+1)$,

$$b = \frac{l_B}{a_B} \equiv Z\alpha\sqrt{\frac{2mc^2}{\hbar\omega}}. \quad (65)$$

В нерелятивистском случае мы рассмотрим кулоновское взаимодействие, соответствующее как притяжению, так и отталкиванию, имея в виду, что двумерная система двух электронов в однородном магнитном поле (перпендикулярном плоскости движения электронов) представляет большой интерес для описания квантового эффекта Холла. Верхний (нижний) знак в уравнении (64) соответствует отталкиванию (притяжению). При $b = 0$, когда кулоновским взаимодействием можно пренебречь, решения представляются через обобщенные полиномы Лагерра, а спектр энергий E_n – уровнями Ландау

$$E_n = \hbar\omega \left(n_r + \frac{l + |l| + 2}{2} \right), \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (66)$$

Чтобы построить точные решения уравнения (64), в полученных выше общих соотношениях, очевидно, достаточно положить $2\gamma = 2|l| + 1$, $b = 2mZ\alpha/\sqrt{a}$, а также учесть, что $p = E/\hbar\omega - (|l| + l + 2)$. Искомый полином имеет вид (с точностью до нормировки)

$$\prod_{k=1}^s (x + x_k) = x^s \mp bx^{s-1} + \dots + (-1)^s (2|l| + 1), \quad (67)$$

где учтено, что

$$\mp b = \sum_{k=1}^s x_k \quad (68)$$

и

$$\prod_{k=1}^s x_k = 2|l| + 1.$$

Для $s = 1, 2$ корни полинома x_k и значения параметра b , при которых решения в виде полиномов соответствующих степеней существуют, нетрудно найти из формул (61) и (68), соответственно, в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \mp(2|l| + 1), \quad b = \sqrt{2|l| + 1} \quad \text{при} \quad s = 1, \\ x_1 &= \frac{2|l| + 1}{x_2}, \quad x_2 = \mp \frac{1 \pm \sqrt{4|l| + 3}}{\sqrt{2}}, \quad b = \sqrt{2(4|l| + 3)} \quad \text{при} \quad s = 2. \end{aligned} \quad (69)$$

Из соотношений (65) и (69) следуют значения напряженности магнитного поля, при которых искомые решения существуют,

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= 2mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{2|l|+1} \quad \text{при} \quad s = 1, \\ \hbar\omega &= mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{4|l|+3} \quad \text{при} \quad s = 2, \end{aligned} \quad (70)$$

а также соответствующие значения энергии

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2m(Ze^2)^2}{\hbar^2(2|l|+1)}(3+l+|l|), \\ E_2 &= \frac{m(Ze^2)^2}{\hbar^2(4|l|+3)}(4+l+|l|). \end{aligned} \quad (71)$$

Формулы (70) и (71) согласуются с результатами работы [7]. Они незначительно отличаются от формул (52) и (51), т.к. последние были получены с помощью уравнения (25) (в нерелятивистском приближении), которое справедливо лишь при малых r .

Полиномы с $s = 1, 2$ имеют вид

$$x + x_1 = x \pm b, \quad \prod_{k=1}^2 (x + x_k) = x^2 \pm bx + 2|l| + 1, \quad (72)$$

где верхние (нижние) знаки соответствуют случаю кулоновского отталкивания (притяжения). Волновая функция электрона определяется формулой (53). Для $s = 1, 2$ в случае кулоновского отталкивания волновые функции не имеют узлов, т.е. обе функции описывают основные состояния, в то время как в случае кулоновского притяжения волновые функции для $s = 1, 2$ имеют один и два узла (функции описывают возбужденные состояния).

Для $s = 1, 2$ найденные решения (70), (71) и (72) единственны, т.к. только для $s = 1, 2$ параметр b и корни полиномов, а значит, циклотронная частота и полином (67), определяются вполне однозначно уравнениями (61) и (62). Для $s \geq 3$ уравнения (61) и (62) имеют более одного решения, а именно, число решений равно $\text{int}(s+1)/2$. Поэтому для $s \geq 3$ даже в случае кулоновского отталкивания решения будут соответствовать как основным состояниям (это решение с наименьшей частотой и не имеющее узлов), так и возбужденным состояниям.

Отметим, что метод факторизации подобен рассмотрению задачи для $b \neq 0$ с помощью суперсимметричной нерелятивистской квантово-механической модели Виттена [19] для метрики [6, 20]

$$L^2 \left(0, \infty; \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) x^{2|l|+1} dx \right).$$

Подчеркнем, что метод факторизации приводит к тем же результатам, что и метод рекуррентных соотношений.

Список литературы

- [1] The Quantum Hall Effect. 2nd ed. Eds. R. E. Prange, S. M. Girvin. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [2] *F. Wilczek*. Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore: World Scientific, 1990.
- [3] *A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1428; *A. Neagu, A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 1785.
- [4] *A. M. J. Schakel, G. W. Semenoff*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2653.
- [5] *В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов, В. Р. Халилов*. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1984.
- [6] *B. A. Lysov, O. F. Dorofeyev, I. M. Ternov*. Nucl. Instr. Methods. A. 1991. V. 308. P. 115.
- [7] *M. Taut*. J. Phys. Math. Gen. A. 1995. V. 28. P. 2081.
- [8] *V. R. Khalilov, C. L. Ho*. Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 615.
- [9] *I. M. Ternov, V. V. Mikhailin, V. R. Khalilov*. Synchrotron Radiation and Its Applications. Amsterdam: Harwood Academic Pub., 1985.
- [10] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [11] *А. А. Соколов, И. М. Тернов*. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.
- [12] *Я. Б. Зельдович, В. С. Попов*. УФН. 1971. Т. 105. С. 403.
- [13] *А. Б. Мигдал*. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.
- [14] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко*. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [15] *I. Pomeranchuk, Ya. Smorodinsky*. J. Phys. USSR. 1945. V. 9. P. 97.
- [16] *V. M. Villalba, R. Pino*. Analytic Solution of a Relativistic Two-dimensional Hydrogen-like Atom in a Constant Magnetic Field. cond-mat/9712044.
- [17] *Ф. Олвер*. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
- [18] *П. В. Елютин, В. Д. Кривченко*. Квантовая механика. М.: Наука, 1976.
- [19] *E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 188. P. 513.
- [20] *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.

Поступила в редакцию 16.IX.1998 г.,
после доработки 26.X.1998 г.