Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. П. Косяков, Точные решения в классической электродинамике и теории Янга–Миллса–Вонга в пространстве-времени четного числа измерений, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 119–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:03:14

© 1999 г.

Б. П. Косяков*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА–ВОНГА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ЧЕТНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

Обсуждаются точные решения классических калибровочных теорий, определенных в пространстве-времени четного числа измерений $D = 2n$. Анализируются сходства и отличия этих решений в конкретных измерениях $D = 2$, $D = 4$ и $D = 6$. Предложена непротиворечивая формулировка классических калибровочных теорий поля с точечными заряженными или цветными частицами для $D = 6$. Установлено, что в этом случае лагранжиан частицы должен зависеть от ускорения. Рассмотрена проблема самодействия точечной частицы для $D = 2$ и $D = 6$. Обнаружено, что в случае $D = 2$ излучение отсутствует и все процессы обратимы во времени. В случае $D = 6$ получены выражение для интенсивности излучения и уравнение движения самодействующей частицы, сделан вывод о том, что дрожание обязательно сопровождается излучением. Показано, что в любой D -мерной теории Янга–Миллса–Вонга, за исключением $D = 4$, неабелевы решения отсутствуют, а имеются лишь кулоноподобные решения, соответствующие абелеву пределу.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известно довольно много точно решаемых двумерных и трехмерных ($2D$ и $3D$) классических и квантовых моделей теории поля. Для более высоких измерений возможности интегрируемости изучены хуже. Интегрирование полной системы динамических уравнений тесно связано здесь с решением проблемы самодействия. Долгое время считалось, что для анализа этой проблемы в $4D$ наиболее подходящей является классическая электродинамика. Благодаря линейности уравнений Максвелла полевые переменные легко выражаются через кинематические переменные заряженных частиц. Однако поле оказывается сингулярным на мировых линиях, и его подстановка в уравнения движения частиц приводит к расходимостям. Для преодоления этой

*Российский федеральный ядерный центр, Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

трудности используется процедура регуляризации и перенормировки масс частиц [1], приводящая к уравнению Лоренца–Дирака [2]. Решить это уравнение удалось лишь в некоторых весьма упрощенных (и физически малоинтересных) ситуациях [3].

Как ни странно, проблема интегрирования оказалась проще в теории Янга–Миллса–Вонга, несмотря на нелинейность ее полевых уравнений. Ключевую роль здесь сыграл подход, предложенный в работе [4] и развитый в работах [5, 6]. Были найдены два класса решений уравнений Янга–Миллса с точечными источниками. Один из них описывает поля кулоновского типа, конструируемые на картановской подгруппе калибровочной группы. Для таких решений все коммутаторы полей Янга–Миллса исчезают, и мы возвращаемся к электродинамической ситуации. Решения другого класса являются неабелевыми. Подстановка их в уравнение движения голой цветной частицы ведет к уравнению движения одетой цветной частицы (аналогичному уравнению Лоренца–Дирака), которое в отсутствие внешних сил легко интегрируется. С другой стороны, оказывается, что силы взаимодействия частиц, отвечающие неабелевым решениям, исчезают в пределе $N \rightarrow \infty$. Получается картина, в которой цветные частицы не взаимодействуют друг с другом, хотя испытывают действие собственного поля. Эта картина описывается точным совместным решением полной системы динамических уравнений.

Метод решения уравнений Янга–Миллса, рассмотренный в работах [4–6], можно обобщить на калибровочные теории, определенные в пространстве-времени с одним временным и произвольным нечетным числом пространственных измерений. Для таких пространств справедлив принцип Гюйгенса, играющий центральную роль в построении подобных решений. Наиболее просто обобщение реализуется для сопредельных четных размерностей $D = 2$ и $D = 6$. Им уделено основное внимание в данной работе. Техника решения полевых уравнений, универсально пригодная для работы как с абелевой, так и неабелевой теорией, обсуждается в разделе 2.1, а ее электродинамические особенности – в разделе 2.2. Раздел 2.3 посвящен рассмотрению электромагнитного самодействия при $D = 2$ и $D = 6$.

На первый взгляд, $2D$ -мир, населенный точечными объектами, может показаться слишком умозрительным. Между тем он возникает, например, при изучении струнных теорий. Действие для струны, погруженной в K -мерное объемлющее пространство с координатами X^μ ,

$$S = \frac{1}{2\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu,$$

можно трактовать как действие для двумерной квантовой теории скалярного поля X^μ с K компонентами внутреннего пространства. Переходя от вторичного квантования к первичному в духе работы [7], получим теорию K точечных частиц, живущих в двумерном мире.

Хотя анализ классических калибровочных $2D$ -теорий, представленный в разделе 2.3.А, в техническом отношении элементарен, результаты оказываются довольно любопытными. В частности, заслуживает внимания тот факт, что в этой размерности отсутствует излучение, а значит, все процессы недиссипативны.

Физическая картина в классических калибровочных $6D$ -теориях, обсуждаемая в разделе 2.3.Б, тоже весьма своеобразна. Как известно, в $4D$ -электродинамике собственная энергия является линейно расходящейся величиной, которую можно объединить с голой массой частицы, чтобы получить конечную наблюдаемую массу частицы. Переходя к $6D$, мы обнаруживаем, что собственная энергия содержит кубическую и линейную расходимость. Первая из них поглощается перенормировкой массы, вторая же остается незатронутой, пока в лагранжиане нет констант подходящей размерности для осуществления перенормировки. Чтобы обеспечить непротиворечивость теории, действие частицы нужно дополнить членом, зависящим от ускорения, с константой, предназначенной для поглощения линейной расходимости.

Механические системы с лагранжианом, зависящим от высших производных, называются жесткими. У жесткой частицы скорость и импульс в общем случае не параллельны. Будучи свободной, такая частица может двигаться по спиральной мировой линии, т.е. совершать “дрожания”. Если лагранжиан зависит от ускорений, то дрожание свободной частицы происходит в одном или двух измерениях [8]. Так как в непротиворечивой $6D$ -калибровочной теории лагранжиан частицы должен зависеть от ускорений, две степени свободы такой частицы оказываются “замороженными” в малой компактной области дрожаний. Таким образом, в $6D$ -мире может возникнуть иллюзия четырехмерия [8]. Вопрос, однако, состоит в том, всегда ли жесткая заряженная частица излучает при дрожании? Если это так, то дрожания постепенно затухнут и иллюзия четырехмерия в $6D$ -мире исчезнет. Получив выражение для интенсивности излучения в $6D$ -электродинамике, мы убедимся в невозможности безызлучательных дрожаний.

В разделе 3 установлено, что уравнения Янга–Миллса с точечными источниками в пространстве-времени любой четной размерности, за исключением $4D$, неабелевых решений не имеют, поэтому результаты, полученные в электродинамике, могут быть почти дословно перенесены на соответствующую теорию Янга–Миллса–Вонга. Неабелевость оказывается совместимой лишь с четырехмерным миром.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Ниже всюду речь идет лишь о запаздывающих сигналах, поскольку в классической теории поля условие запаздывания выражает идею причинности, тогда как физический смысл других граничных условий не столь прозрачен. Метрика выбрана в виде $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ \dots -)$. Скорость света положена равной 1. Большинство обозначений взято из работы [6]. D -мерное действие для электромагнитного поля в гауссовой системе единиц задается выражением

$$S_f = -\frac{1}{4\Omega_{D-2}} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где Ω_{D-2} обозначает площадь $(D-2)$ -мерной сферы единичного радиуса,

$$\Omega_{D-2} = 2 \frac{\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})},$$

а напряженность $F_{\mu\nu}$ выражается через потенциал A_μ обычным образом,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Учитывая линейность полевых уравнений, мы будем опускать нормировочные множители полевых величин. При необходимости их можно восстановить с помощью закона Гаусса. Рассматривая поле одиночной частицы, ее электрический заряд для удобства мы можем положить равным 1, при этом соображения размерности становятся особенно простыми.

2.1. Ковариантные запаздывающие величины. Метод решения уравнений калибровочных полей с точечными источниками, предложенный в работах [4, 6], позволяет обойтись без явного использования функций Грина. Существенной частью метода является техника ковариантных запаздывающих величин, которая обеспечивает значительное сокращение вычислений и придает конечным результатам сжатость и геометрическую наглядность. Эффективность этой техники можно оценить на известных примерах, когда обычно используемое описание довольно громоздко.

Рассмотрим сначала электромагнитное поле, порождаемое точечной заряженной частицей в четырехмерном пространстве Минковского. Пусть частица движется вдоль произвольной времениподобной мировой линии $z^\mu(\tau)$. Зададим точку наблюдения x_μ . Из нее как из вершины проведем нижнюю полу светового конуса до пересечения с мировой линией, получим точку z_μ^{ret} , из которой послан запаздывающий сигнал в x_μ . Поскольку носитель запаздывающей функции $G_{\text{ret}}(x)$ для волнового уравнения в $4D$ сосредоточен на границе верхней полу светового конуса, а само выражение для $G_{\text{ret}}(x)$ не содержит производных δ -функции, запаздывающий сигнал несет информацию о единственной точке на мировой линии z_μ^{ret} , причем состояние источника в этой точке полностью характеризуется направлением касательной $v_\mu \equiv \dot{z}_\mu \equiv dz_\mu/d\tau$. Таким образом, запаздывающий 4-потенциал A_μ может зависеть лишь от двух кинематических переменных: 4-скорости v_μ в запаздывающий момент времени τ_{ret} и светоподобного вектора $R_\mu \equiv x_\mu - z_\mu^{\text{ret}}$, проведенного из точки испускания сигнала z_μ^{ret} в точку наблюдения x_μ .

В плоскости, натянутой на векторы R^μ и v^μ , построим пространственноподобный нормированный вектор u^μ , ортогональный v^μ , и светоподобный вектор $c^\mu \equiv v^\mu + u^\mu$. Аналитически это выражается в виде

$$v^2 = -u^2 = 1, \quad c^2 = 0, \quad c \cdot v = -c \cdot u = 1, \quad v \cdot u = 0, \quad R^\mu = \rho c^\mu,$$

где скаляр $\rho \equiv v \cdot R$ имеет смысл расстояния между точками испускания и приема запаздывающего сигнала в системе отсчета с осью времени, направленной вдоль v^μ .

Из условия $R^2 = 0$ легко выводятся следующие правила дифференцирования ковариантных запаздывающих величин:

$$\partial_\mu \tau = c_\mu, \tag{2}$$

$$\partial_\mu \rho = v_\mu + (\rho a_u - 1) c_\mu, \tag{3}$$

где $a_\mu \equiv \dot{v}_\mu$, $a_u \equiv a \cdot u = a \cdot c$. Это дает возможность найти производные любых кинематических величин, например $\partial_\mu v_\nu = a_\nu c_\mu$. Отметим, что формулы дифференцирования не зависят от размерности D пространства-времени, единственным исключением является соотношение

$$\partial_\mu c^\mu = \frac{D-2}{\rho}. \quad (4)$$

Итак, запаздывающий 4-потенциал следует искать в виде

$$A_\mu = v_\mu f(\rho) + R_\mu h(\rho). \quad (5)$$

Действуя на него оператором $\square \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu$, с учетом формул (2) и (3) получим

$$\left(f' + \frac{f}{\rho}\right) \left(\overset{u}{\perp} a\right)_\mu - \frac{1}{\rho} (\rho^2 h'' + 4\rho h' + 2h) v_\mu + a_u (\rho^2 h'' + 2\rho h') c_\mu,$$

где штрихи обозначают дифференцирование по ρ , а $\overset{u}{\perp}$ есть проектор на гиперплоскость с нормалью u_μ :

$$\overset{u}{\perp} \equiv \mathbf{1} - \frac{u \otimes u}{u^2}.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при векторах $\left(\overset{u}{\perp} a\right)_\mu$, v_μ и c_μ , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho f' + f = 0, \quad (6)$$

$$\rho^2 h'' + 4\rho h' + 2h = 0, \quad (7)$$

$$\rho^2 h'' + 2\rho h = 0. \quad (8)$$

Решением уравнения (6) является

$$f(\rho) = \frac{e}{\rho},$$

где постоянная интегрирования e с учетом закона Гаусса совпадает с электрическим зарядом, который мы полагаем равным 1.

Представим решение уравнений (7) и (8) в виде $h = C\rho^\alpha$, тогда $\alpha = -1$ или -2 в силу (7) и $\alpha = -1$ или 0 в силу (8). Совместность уравнений (7) и (8) достигается при $\alpha = -1$. Таким образом, общее решение уравнений (7) и (8) есть

$$h(\rho) = \frac{C}{\rho},$$

причем постоянная C остается неопределенной. Однако это не имеет значения, поскольку $R_\mu/\rho = \partial_\mu \tau$ и второй член выражения (5) оказывается чисто калибровочным. В итоге мы приходим к 4-потенциалу Лиенара–Вихерта [2]

$$A_\mu = \frac{v_\mu}{\rho}, \quad (9)$$

дополненному произвольным калибровочным членом $C \partial_\mu \tau$.

Отличительная черта рассмотренной процедуры состоит в том, что она не требует наложения калибровочного условия для A_μ . Таким образом, мы приходим не к единственному решению, а к целому классу эквивалентных потенциалов A_μ , связанных калибровочными преобразованиями.

С помощью формул дифференцирования (2) и (3) из 4-потенциала (9) легко находится напряженность поля

$$F = c \wedge V. \quad (10)$$

Здесь символ $\wedge$ обозначает внешнее произведение векторов c_μ и V_μ ,

$$V_\mu = -\lambda \frac{v_\mu}{\rho^2} + \frac{a_\mu}{\rho}, \quad (11)$$

а скалярная величина λ определена соотношением $\lambda \equiv R \cdot a - 1$.

Несколько более сложная ситуация возникает в $6D$. Здесь запаздывающая функция Грина для волнового уравнения содержит производную δ -функции (см., например, [9]). Поэтому 6-потенциал необходимо искать в следующем виде:

$$A_\mu = v_\mu f(\rho, \lambda) + a_\mu g(\rho, \lambda) + R_\mu h(\rho, \lambda). \quad (12)$$

Повторяя сказанное выше и принимая во внимание соотношение (4), приходим к решению

$$f = -\frac{\lambda}{\rho^3} + C_1, \quad g = \frac{e}{\rho^2}, \quad h = \frac{\lambda C_1 + C_2}{\rho},$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. Опуская чисто калибровочные члены $C_1 \partial_\mu \rho$ и $C_2 \partial_\mu \tau$, получаем 6-потенциал в виде

$$A_\mu = -\lambda \frac{v_\mu}{\rho^3} + \frac{a_\mu}{\rho^2}. \quad (13)$$

Отсюда находим напряженность поля

$$F = \frac{a \wedge v}{\rho^3} + c \wedge V, \quad (14)$$

где 6-вектор V_μ определен согласно формуле

$$V_\mu = \frac{\dot{a}_\mu}{\rho^2} - 3\lambda \frac{a_\mu}{\rho^3} + \frac{v_\mu}{\rho^4} [3\lambda^2 - \rho^2 (\dot{a} \cdot c)]. \quad (15)$$

В $2D$ носителем запаздывающей функции Грина является вся верхняя половина светового конуса [9] и принцип Гюйгенса не выполняется. Тем не менее рассматриваемый метод остается в силе. Потенциал ищется в виде

$$A_\mu = R_\mu h(\rho), \quad (16)$$

и решением оказывается $h(\rho) = 1$ или

$$A_\mu = R_\mu \quad (17)$$

(никаких калибровочных членов не возникает). Отсюда получается выражение для напряженности поля

$$F = c \wedge v. \quad (18)$$

Отметим, что напряженность не зависит от ускорения источника и содержит лишь электрическую компоненту F_{01} .

2.2. Препотенциал, потенциал, напряженность. В случае $D = 2n$ выражение для запаздывающего потенциала A_μ легко найти, если известно выражение для соответствующего потенциала в $D = 2(n - 1)$. Потенциал в пространстве-времени любой четной размерности можно получить из 2-потенциала, дифференцируя его нужное число раз. Это отражает известный математический результат, состоящий в том, что фундаментальное решение волнового уравнения в $D = 2n$ получается $(n - 1)$ -кратным действием оператора Даламбера на двумерное фундаментальное решение [9].

Действительно, используя формулы (2), (3) и (4), находим

$$\square R_\mu = (2 - D) \frac{v_\mu}{\rho}.$$

Таким образом, R_μ является решением волнового уравнения в $D = 2$ и препотенциалом в $D = 4$, поскольку v_μ/ρ есть 4-потенциал Лиенара-Вихерта.

Имеем также $\partial^\nu R_\nu = D - 1$ и $\square \partial^\nu R_\nu = 0$. Поэтому $2n$ -мерный потенциал A_μ , получаемый $(n - 1)$ -кратным действием даламбертиана $\square$ на R_μ , удовлетворяет калибровочному условию Лоренца $\partial^\nu A_\nu = 0$. Проверка выполнения уравнений Максвелла вне мировых линий $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ при любых $n \geq 2$ сводится, таким образом, к проверке выполнения волнового уравнения $\square A_\nu = 0$.

Действие D -мерного даламбертиана на лиенар-вихертовский D -потенциал дает

$$\square \frac{v_\mu}{\rho} = (D - 4) \left(\frac{a_\mu}{\rho^2} - \lambda \frac{v_\mu}{\rho^3} \right),$$

откуда следует, что v_μ/ρ есть решение в $4D$ и препотенциал в $6D$.

Эта процедура позволяет наиболее просто вычислить запаздывающие потенциалы и препотенциалы любой четной размерности $D = 2n$. Кроме того, она автоматически дает важную информацию о соответствующих напряженностях.

В пространстве $D = 2n$ измерений произвольная 2-форма ω может быть приведена к виду

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2n-1} \wedge e_{2n}, \quad (19)$$

где $\{e_j\}$ – канонический для данной 2-формы базис 1-форм. Другими словами, каноническое разложение ω содержит n внешних произведений. В частности, при $D = 4$ произвольная 2-форма ω имеет в каноническом разложении два внешних произведения. Между тем из (10) видно, что лиенар-вихертовская напряженность F содержит только одно внешнее произведение. При $D = 6$ напряженность F согласно (14) содержит два внешних произведения, т.е. снова на единицу меньше, чем произвольная каноническая 2-форма. Это свойство остается справедливым для любых $D = 2n$.

Сравнивая (11) и (13), находим, что 4-вектор $V_\mu^{(4)}$ формально с точностью до множителя ρ^{-1} совпадает с 6-потенциалом $A_\mu^{(6)}$. Это совпадение не случайно. Общее утверждение состоит в том, что в пространстве-времени размерностью $D = 2n$ напряженность F содержит $(n - 1)$ внешних произведений, среди которых одно представляется в виде $c \wedge V^{(2n)}$, причем $2n$ -вектор $V_\mu^{(2n)}$ связан с $(2n + 2)$ -потенциалом $A_\mu^{(2n+2)}$ соотношением

$$\rho V_\mu^{(2n)} = A_\mu^{(2n+2)}. \quad (20)$$

2.3. Самодействие. Симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля, получаемый из действия (1), представляется в виде

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega_{D-2}} \left(F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (21)$$

Для нахождения D -импульса электромагнитного поля P_μ выражение (21) следует проинтегрировать по произвольной пространственноподобной $(D - 1)$ -мерной гиперповерхности. Однако непосредственное интегрирование оказывается невозможным из-за расходимостей, связанных с сингулярным поведением $F_{\mu\nu}$.

Например, в $4D$ выражение для P_μ является линейно расходящимся, поскольку вблизи от мировых линий $F_{\mu\nu} \propto \rho^{-2}$. Как известно, от этой расходимости можно избавиться с помощью перенормировки массы заряженной частицы [1].

Действие для частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем, задается в $4D$ следующим образом:

$$S_p + S_{\text{int}} = - \sum_{I=1}^K \int d\tau_I \left[m_0^I \sqrt{\dot{z}_\alpha^I \dot{z}_I^\alpha} + \dot{z}_\nu^I A^\nu(z_I) \right], \quad (22)$$

где m_0^I – голая масса I -й частицы (все электрические заряды частиц положены равными единице), z_α^I – координаты I -й частицы.

Обратим внимание на репараметризационную инвариантность этого выражения. Она играет важную роль в выборе корректной процедуры интегрирования сингулярных четырехмерных величин. Поэтому было бы естественно сохранить ее и в общем D -мерном случае.

Итак, будем считать, что D -мерное действие S инвариантно относительно инфинитезимальных репараметризационных преобразований $\delta\tau = \varepsilon$, $\delta z_\mu = v_\mu \varepsilon$. Тогда согласно второй теореме Нетер возникает тождество

$$\frac{\delta S}{\delta z_\mu} v_\mu = 0.$$

Это означает, что эйлериян $\delta S / \delta z_\mu$, выражающий динамический закон для голой частицы, содержит проектор на $(D - 1)$ -мерную гиперплоскость с нормалью v^μ ,

$$\overset{v}{\perp}(\dot{p}_0 - f) = 0, \quad (23)$$

где p_0^μ есть D -импульс голой частицы, а f^μ — действующая на нее D -сила.

Уравнение (23) — это не что иное, как D -мерная запись второго закона Ньютона. Действительно, проектор $\overset{v}{\perp}$ производит вложение $(D - 1)$ -мерной нерелятивистской ньютоновой динамики в пространственноподобные гиперплоскости, которые представляют собой “обычное” $(D - 1)$ -мерное пространство в сопутствующих инерциальных системах отсчета. Если самодействие учтено корректно, то репараметризационная инвариантность сохраняется, т.е. уравнение движения одетой частицы имеет ту же проекционную структуру, что и уравнение движения голой частицы (23). Динамическое отличие одетой и голой частиц состоит в том, что им соответствуют D -импульсы p^μ и p_0^μ , которые могут по-разному зависеть от кинематических переменных.

2.3.A. Самодействие в $2D$. Подстановка $F_{\mu\nu}$ вида (18) в выражение для тензора энергии-импульса (21) дает

$$\Theta_{\mu\nu} = (c_\mu v_\nu + v_\mu c_\nu - c_\mu c_\nu) = \frac{1}{4} (v_\mu v_\nu - u_\mu u_\nu) = \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu}. \quad (24)$$

В последнем равенстве учтено двумерное соотношение полноты $\eta_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu - u_\mu u_\nu$. Очевидно, что $\partial^\nu \Theta_{\mu\nu} \equiv 0$. Поэтому пространственноподобная гиперповерхность интегрирования в выражении для 2-импульса электромагнитного поля P_μ может быть выбрана произвольно. В частности, это может быть гиперплоскость Σ , нормальная к 2-скорости частицы v^μ в точке пересечения ее мировой линии с Σ . В этом случае интегрирование тривиально и результат представляется расходящимся на больших расстояниях L выражением

$$P_\mu = v_\mu \frac{L}{2}, \quad L \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Если для описания динамики частиц исходить из действия (22), то эту расходимость можно поглотить перенормировкой массы частицы. При этом 2-импульс и уравнение движения одетой частицы оказываются такими же, как 2-импульс и уравнение движения голой частицы с заменой затравочной массы m_0 на наблюдаемую массу m . Единственный эффект самодействия в $2D$ заключается в перенормировке массы. Заметим, что в отличие от $4D$, где перенормировкой массы поглощается ультрафиолетовая расходимость, в $2D$ перенормировка поглощает инфракрасную расходимость.

Интересно сравнить ситуации в *эффективном* двумерии и в *истинно* двумерном мире. Рассмотрим частицу, которая движется в четырехмерном мире Минковского вдоль прямой линии, например вдоль оси x , под действием силы, направленной по этой оси. Если проекционную структуру уравнения (23) учесть посредством соотношений

$$v^\mu = (\text{ch } \alpha, \text{sh } \alpha, 0, 0), \quad f^\mu = f(\text{sh } \alpha, \text{ch } \alpha, 0, 0), \quad (26)$$

то уравнение движения одетой частицы (уравнение Лоренца–Дирака) сведется к виду

$$m\dot{\alpha} - \frac{2}{3}e^2\ddot{\alpha} = f.$$

С другой стороны, уравнение движения одетой частицы в истинно двумерном мире не содержит члена радиационного трения, $m\dot{v} = f$. Причина этого отличия состоит в том, что в трехмерном пространстве эффективно одномерными могут быть лишь кинематика и межчастичные взаимодействия, самодействие же остается трехмерным, ибо его форма фиксируется полюсной особенностью трехмерного кулоновского потенциала.

Означает ли это, что в двумерном мире электромагнитная энергия не излучается вообще? Согласно общему определению [1, 10], под излучением понимается такая часть плотности энергии-импульса поля, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) удаляется от источника со скоростью света, 2) вне мировой линии динамически не зависит от остальной части энергии-импульса поля, 3) при интегрировании по замкнутой поверхности, окружающей источник, дает постоянный поток, не зависящий от выбора поверхности.

Более точную формулировку этого определения можно получить, если разбить тензор энергии-импульса электромагнитного поля на две части: $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^I + \Theta_{\mu\nu}^{II}$, и попытаться интерпретировать член $\Theta_{\mu\nu}^{II}$ как излучение.

Движение части энергии-импульса со скоростью света означает, что она переносится вдоль образующих верхней полы светового конуса. Иначе говоря, для выполнения условия 1 член $\Theta_{\mu\nu}^{II}$ должен давать нулевой вклад в поток через верхнюю полу светового конуса. А поскольку нормаль к верхней поле светового конуса с вершиной в точке на мировой линии есть вектор c_μ , проведенный из этой точки, то поток величины $\Theta_{\mu\nu}^{II}$ через такую гиперповерхность обратится в нуль, если

$$\Theta_{\mu\nu}^{II} \propto c_\mu c_\nu. \quad (27)$$

Итак, соотношение (27) эквивалентно условию 1.

Вне мировых линий выполняется локальный закон сохранения энергии-импульса $\partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0$, который можно интерпретировать как динамическую независимость электромагнитной и механической частей энергии-импульса в указанной области. Если, кроме того, вне мировых линий имеет место равенство

$$\partial^\mu \Theta_{\mu\nu}^{\text{II}} = 0, \quad (28)$$

то член $\Theta_{\mu\nu}^{\text{II}}$ можно считать динамически не зависимым от $\Theta_{\mu\nu}^{\text{I}}$. Соотношение (28) выражает условие 2.

Убывание $\Theta_{\mu\nu}^{\text{II}}$ в пространстве должно быть согласовано с ростом площади сферы, окружающей источник, так чтобы поток энергии сквозь нее оставался неизменным на любом радиусе,

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{II}} \propto \rho^{-(D-2)}. \quad (29)$$

Соотношение (29) выражает условие 3. При этом обычно подразумевается, что $\Theta_{\mu\nu}^{\text{I}}$ убывает быстрее $\Theta_{\mu\nu}^{\text{II}}$ и излучение оказывается фактически отделимым от остальной части энергии-импульса электромагнитного поля на асимптотически большом удалении от источника. Тем не менее мы потребуем такого отличия поведений $\Theta_{\mu\nu}^{\text{I}}$ и $\Theta_{\mu\nu}^{\text{II}}$ явно, в качестве дополнительного условия.

В выражении (24) можно выделить член $-c_\mu c_\nu / 4$, который удовлетворяет условиям (27)–(29). Однако он ведет себя в пространстве точно так же, как и все остальные члены выражения (24), т.е. не зависит от ρ . Каждый из этих членов порождает поток энергии через нульмерную сферу (через две точки на пространственной прямой, отстоящие по разные стороны на равном расстоянии от точки нахождения источника), который не меняется с удалением от источника. В $2D$ не существует способа выделить член $\Theta_{\mu\nu}^{\text{II}}$, удовлетворяющий всем условиям (27)–(29) и, чтобы при этом член $\Theta_{\mu\nu}^{\text{I}}$ убывал с удалением от источника. Другими словами, в $2D$ не возникает излучения. Заметим, что в $2D$ существует электрическое поле F_{01} , но отсутствует магнитное, следовательно, вектор Пойнтинга тождественно обращается в нуль.

Таким образом, в классической $2D$ -картине отсутствует диссипация энергии и все движения частиц и полей обратимы во времени.

2.3.Б. Самодействие в $6D$. Поле $F_{\mu\nu}$, порождаемое одной частицей, дается выражением (14). Подставляя его в (21), получим первый член $\Theta_{\mu\nu}$ в виде

$$\begin{aligned} F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu = & -\frac{1}{\rho^6} [(a_\mu a_\nu + a^2 v_\mu v_\nu) + (c \cdot V) (c_\mu V_\nu + c_\nu V_\mu) - c_\mu c_\nu V^2] + \\ & + \frac{1}{\rho^3} [a_\mu V_\nu + a_\nu V_\mu + (a \cdot V) (v_\mu c_\nu + v_\nu c_\mu) - \\ & - (v \cdot V) (a_\mu c_\nu + a_\nu c_\mu) - a_u (v_\nu V_\mu + v_\mu V_\nu)], \end{aligned} \quad (30)$$

где $a_u = a \cdot u = a \cdot c$.

Из формулы (30) имеем

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2 \left[\frac{a^2}{\rho^6} - (c \cdot V)^2 - \frac{2}{\rho^3} (a \cdot V) + \frac{2}{\rho^3} a_u (v \cdot V) \right]. \quad (31)$$

Из (30) и (31) с учетом (15) видно, что собственная энергия содержит кубическую и линейную расходимости. Первая из них может поглотиться перенормировкой масс частиц. Для поглощения второй в лагранжиане должны присутствовать физические параметры подходящей размерности.

Добавим к действию (22) репараметризационно-инвариантный член

$$- \sum_{I=1}^K \kappa_0^I \int d\tau_I \Lambda_I^{-1} \left(\frac{d}{d\tau_I} v_\mu^I \Lambda_I^{-1} \right)^2, \quad \Lambda_I \equiv \sqrt{v_\alpha^I v_I^\alpha}. \quad (32)$$

Тогда 6-импульс свободной голой частицы представится в виде

$$p_0^\mu = m_0 v^\mu + \kappa_0 (2\dot{a}^\mu + 3a^2 v^\mu), \quad (33)$$

откуда с помощью соображений размерности нетрудно заключить, что кубическая и линейная расходимости поглощаются перенормировкой соответственно m_0 и κ_0 .

Итак, переход от $4D$ к более высоким измерениям при соблюдении условия поглощения ультрафиолетовых расходимостей за счет перенормировки физических величин сопровождается появлением высших производных в лагранжиане частиц. Другими словами, непротиворечивая теория поля в пространстве-времени размерности $D > 4$ становится возможной лишь в том случае, когда поведение частиц управляется жесткой динамикой.

Стандартная процедура вывода уравнения движения одетой частицы состоит в нахождении регуляризации, сохраняющей репараметризационную инвариантность действия, вычислении всех расходящихся интегралов и выделении из них конечной в пределе снятия регуляризации части. Это довольно трудоемкая задача. Однако оказывается, что можно прийти к конечному результату более простым путем. В этом случае достаточно найти выражение для интенсивности излучения (которое дается сходящимся интегралом, т.е. не зависит от выбора регуляризационно-перенормировочной схемы) и воспользоваться требованием, чтобы конечный результат оставался репараметризационно-инвариантным.

Найдем выражение для интенсивности излучения. Четырехмерная замкнутая поверхность, окружающая источник, играет в $6D$ ту же роль, что и двумерная поверхность в $4D$. Из (30) и (31) видно, что единственное слагаемое, которое содержит члены, порождающие постоянный на любых расстояниях от источника поток энергии-импульса, есть $-V^2 c_\mu c_\nu$. В выражении (15) выделим член, пропорциональный ρ^{-2} : $b_\mu \equiv \dot{a}_\mu - 3a_u a_\mu + 3a_u^2 v_\mu - (\dot{a} \cdot c) v_\mu$. Легко проверить, что член $\rho^{-4} b^2 c_\mu c_\nu$ удовлетворяет всем условиям (27)–(29), поэтому его следует считать излучением.

С учетом (28) гиперповерхность интегрирования в определении 6-импульса излучения P_{rad}^μ можно выбрать произвольно. Удобно выполнить интегрирование по времени-подобной пятимерной трубе малого радиуса $\rho = \epsilon$, окружающей мировую линию источника. Элемент меры на такой трубе есть $d\sigma_\mu = \partial_\mu \rho \rho^4 d\Omega_5 d\tau$, и задача сводится к вычислению интеграла

$$- \int d\tau \int d\Omega_5 \left\{ \left[(\overset{v}{\perp} \dot{a})^2 + 9a_u^2 a^2 + 9a_u^4 + (\dot{a} \cdot u)^2 \right] v_\mu - [3a_u (a^2)^\cdot + 6a_u^2 (\dot{a} \cdot u)] u_\mu \right\}.$$

Это легко осуществить при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \int u_\mu u_\nu d\Omega_5 &= -\frac{\Omega_5}{5} \overset{v}{\perp}_{\mu\nu}, \\ \int u_\alpha u_\beta u_\mu u_\nu d\Omega_5 &= \frac{\Omega_5}{5 \cdot 7} \left[\overset{v}{\perp}_{\mu\nu} \overset{v}{\perp}_{\alpha\beta} + \overset{v}{\perp}_{\alpha\mu} \overset{v}{\perp}_{\beta\nu} + \overset{v}{\perp}_{\alpha\nu} \overset{v}{\perp}_{\beta\mu} \right]. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$P_{\text{rad}}^\mu = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau \left\{ -\frac{4}{5} \left[\dot{a}^2 - \frac{16}{7} (a^2)^2 \right] v^\mu - \frac{3}{7} (a^2)^\cdot a^\mu + \frac{6}{5 \cdot 7} a^2 (\overset{v}{\perp} \dot{a})^\mu \right\}. \quad (34)$$

Аналогично вычисляется другой ультрафиолетово-конечный 6-импульс P_{mix}^μ , соответствующий той части тензора энергии-импульса, которая образована смешанным вкладом поля $F^{\mu\nu}$ рассматриваемой частицы и внешнего поля $F_{\text{ex}}^{\mu\nu}$,

$$P_{\text{mix}}^\mu = - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau f_{\text{ex}}^\mu \equiv - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau F_{\text{ex}}^{\mu\nu} v_\nu. \quad (35)$$

Таким образом, величина $\dot{P}_{\text{mix}}^\mu$ оказывается равной взятой с обратным знаком внешней 6-силе Лоренца $f_{\text{ex}}^\mu = F_{\text{ex}}^{\mu\nu} v_\nu$.

Рассмотрим теперь *увлекаемую* часть электромагнитного 6-импульса, происходящую от интегрирования $\Theta_{\mu\nu}^I$. Конечная часть увлекаемого 6-импульса p_{fin}^μ имеет такую же размерность, как и излучаемый 6-импульс P_{rad}^μ . Из (34) видно, что p_{fin}^μ может иметь следующую кинематическую структуру:

$$p_{\text{fin}}^\mu = c_1 \ddot{a}^\mu + c_2 a^2 a^\mu + c_3 (a^2)^\cdot v^\mu, \quad (a^2)^\cdot \equiv \frac{d}{d\tau} a^2,$$

где c_1 , c_2 и c_3 – некоторые числовые коэффициенты. Поскольку $f_{\text{ex}} \cdot v = 0$, сумма проекций двух величин одинаковой размерности p_{fin}^μ и $\dot{P}_{\text{rad}}^\mu$ на направление v^μ должна обраться в нуль¹⁾. Отсюда с учетом тождеств

$$(\dot{a} \cdot v) = -a^2, \quad (\ddot{a} \cdot v) = -\frac{3}{2} (a^2)^\cdot, \quad (\ddot{\ddot{a}} \cdot v) = -2(a^2)^\cdot\cdot + \dot{a}^2$$

¹⁾ Именно здесь используется требование репараметризационной инвариантности, воплощенной в проекционной структуре перенормированного динамического уравнения.

находим

$$p_{\text{fin}}^\mu = \frac{4}{5} \left[\ddot{a}^\mu + \frac{16}{7} a^2 a^\mu + 2(a^2) \cdot v^\mu \right]. \quad (36)$$

Расходящаяся часть увлекаемого 6-импульса по кинематической структуре должна совпадать с 6-импульсом голой частицы (33). После их слияния получается конечная величина

$$\mathcal{P}^\mu = m v^\mu + \kappa (2\dot{a}^\mu + 3a^2 v^\mu),$$

где m и κ – перенормированные величины, соответствующие затравочным величинам m_0 и κ_0 в (33). Объединив далее $\mathcal{P}^\mu$ с p_{fin}^μ , получим

$$\pi^\mu \equiv \mathcal{P}^\mu + p_{\text{fin}}^\mu = m v^\mu + \kappa (2\dot{a}^\mu + 3a^2 v^\mu) + \frac{4}{5} \left[\ddot{a}^\mu + \frac{16}{7} a^2 a^\mu + 2(a^2) \cdot v^\mu \right]. \quad (37)$$

Напишем уравнение сохранения полного 6-импульса системы

$$\dot{\pi}^\mu + \dot{P}_{\text{rad}}^\mu + \dot{P}_{\text{mix}}^\mu = 0.$$

Подставляя сюда (37), (34) и (35), приходим к уравнению движения одетой частицы

$$\overset{v}{\perp}(\dot{p} - f_{\text{ex}}) = 0, \quad (38)$$

где 6-импульс одетой частицы p_μ определяется как

$$p_\mu = m v_\mu + \kappa (2\dot{a}_\mu + 3a^2 v_\mu) + \left[\frac{4}{5} \ddot{a}_\mu + 2a^2 a_\mu + (a^2) \cdot v_\mu \right]. \quad (39)$$

В заключение обсудим проблему дрожаний заряженной частицы. Свободная голая частица с 6-импульсом (33) может совершать не только галилеево прямолинейное равномерное движение, но и испытывать дрожания. Проще всего в этом убедиться на примере движения вдоль прямой линии²⁾. Проекционная структура уравнения движения учитывается в этом случае при помощи соотношений (26), и уравнение принимает вид

$$m_0 \dot{a} + \kappa_0 (2\ddot{a} - \dot{a}^3) = 0.$$

Если m_0 и κ_0 одного знака, то нетрудно заключить, что в области небольших ускорений ($|\dot{a}| < \sqrt{m_0/\kappa_0}$) решение имеет колебательный характер.

Электромагнитное самодействие существенно влияет на режим свободного движения, поскольку к уравнению движения добавляются члены с более высокими производными. Существуют ли дрожания, которые не сопровождаются излучением? Такой безызлучательный режим в принципе был бы возможен, если бы в выражении для интенсивности излучения содержались лишь производные более высокой степени, чем производные, входящие в уравнение динамики голой частицы. Однако из выражения (34) видно, что интенсивность излучения в $6D$ зависит от a_μ и $\dot{a}_\mu$, следовательно, любое дрожание, будучи ускоренным движением, сопровождается излучением. Это ведет к торможению дрожаний и в конечном счете к выходу на галилеев режим прямолинейного и равномерного движения.

²⁾ Дрожания свободной жесткой частицы в более общем случае рассмотрены в работе [8].

3. ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА–ВОНГА

Рассмотрим систему K классических точечных частиц, взаимодействующих с калибровочным $SU(N)$ -полем Янга–Миллса. Каждой частице, занумерованной с помощью индекса I , $I = 1, \dots, K$, приписывается цветной заряд Q_I^a , преобразующийся по сопряженному представлению группы $SU(N)$, цветной индекс a пробегает значения от 1 до $N^2 - 1$. Действие в D -мерной теории Янга–Миллса–Вонга³⁾ записывается в виде

$$S = S_p - \sum_{I=1}^K \int d\tau_I \operatorname{tr} \lambda_I^{-1} Z_I \dot{\lambda}_I - \int d^D x \operatorname{tr} \left(j_\mu A^\mu + \frac{1}{4\Omega_{D-2}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (40)$$

Здесь S_p зависит от кинематических переменных частиц так же, как соответствующий член действия в D -мерной электродинамике; $\lambda_I = \lambda_I(\tau_I)$ – зависящие от времени элементы группы $SU(N)$; Z_I являются комбинациями генераторов T_a алгебры $su(N)$ вида $e_I^a T_a$ с некоторыми постоянными e_I^a , посредством которых определяются цветные заряды частиц: $Q_I = \lambda_I Z_I \lambda_I^{-1}$ [11]. Ток цветных частиц имеет вид

$$j_\mu(x) = \sum_{I=1}^K \int d\tau_I Q_I(\tau_I) v_\mu^I(\tau_I) \delta^D[x - z_I(\tau_I)],$$

где $Q_I = Q_I^a T_a$, $z_I(\tau_I)$ – набор координат I -й частицы. Напряженность поля определена обычным образом:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu],$$

где g – константа связи. Электродинамика получается отсюда как частный случай теории с абелевой калибровочной группой $U(1)$.

Из действия (40) следуют уравнения Янга–Миллса

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu - ig (\partial_\nu [A^\nu, A_\mu] + [A^\nu, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]) + g^2 [A_\nu, [A^\nu, A_\mu]] = \Omega_{D-2} j_\mu \quad (41)$$

и уравнения Вонга

$$\dot{Q}_I = -ig [Q_I, v_\mu^I A^\mu(z_I)], \quad (42)$$

описывающие эволюцию цветных зарядов частиц Q_I .

Нам следует убедиться, что теория с действием (40) непротиворечива в том смысле, что размерных параметров, входящих в S_p , достаточно для поглощения всех ультрафиолетовых расходимостей.

Точные запаздывающие решения $4D$ -уравнений (41) и (42) подробно рассматривались в работе [6]. Они получались с помощью подстановки

$$A_\mu(x) = \sum_{I=1}^K \sum_{a=1}^{N^2-1} T_a (v_\mu^I f^{aI} + R_\mu^I h^{aI}),$$

³⁾О четырехмерной теории Янга–Миллса–Вонга см., например, в работах [11, 6].

где $f^{aI}(x)$ и $h^{aI}(x)$ — искомые функции. Эта подстановка является неабелевым обобщением выражения (5). Переход к $6D$ и $2D$ осуществляется аналогично тому, как в электродинамике из подстановки (5) получаются подстановки (12) и (16).

Однако для выяснения сингулярного поведения поля Янга–Миллса на малых расстояниях от источника решать уравнения (41) и (42) не требуется, достаточно использовать закон Гаусса. Действительно, при $\rho \rightarrow 0$ площадь поверхности, окружающей частицу, уменьшается как ρ^{D-2} , а объем — как ρ^{D-1} , поэтому цветной заряд поля, пропорциональный данному объему, асимптотически исчезает, а полный цветной заряд в этом объеме стремится к цветному заряду точечной частицы и выражается в виде потока напряженности поля $F_{\mu\nu}$ через данную поверхность⁴⁾. Это означает, что на малых расстояниях от частицы с цветным зарядом Q_I зависимость напряженности поля от цветных переменных целиком заключена в факторе Q_I , более того

$$F_{\mu\nu} \sim \frac{Q_I}{\rho^{D-2}}, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (43)$$

Сингулярность поля Янга–Миллса оказывается такой же, как у электромагнитного поля, следовательно, S_p можно задать единым образом в обеих теориях.

Из (43) видно также, что потенциал A_μ пропорционален Q_I и при $D > 4$ асимптотически стремится к ρ^{3-D} . Подстановка такого A_μ в правую часть уравнения (42) обращает ее в нуль, поэтому $\dot{Q}_I = 0$. Таким образом, наличие δ -образных цветных объектов налагает жесткие ограничения на сингулярное поведение A_μ , что, в свою очередь, делает тривиальной эволюцию цветных зарядов таких объектов⁵⁾.

Если $h^{aI} = 0$, то решение оказывается абелизованным и кулоноподобным во всем пространстве-времени. В $4D$, как известно [6], существуют и неабелевы решения. В $2D$, где $f^{aI} = 0$, неабелевы решения отсутствуют. Возникает вопрос, имеются ли неабелевы решения в какой-либо иной размерности $D > 4$?

Покажем сначала, что полевые $6D$ -конфигурации, порождаемые цветной частицей в случае калибровочной группы $SU(2)$, могут быть только абелевыми. С помощью комбинаций из матриц Паули $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ и σ_3 потенциал можно записать в виде $A = \alpha_3\sigma_3 + \alpha_+\sigma_+ + \alpha_-\sigma_-$, откуда следует, что квадратичный и кубический члены уравнения (41) представляются в следующем символическом виде:

$$\begin{aligned} \partial[A, A] &= \partial(\alpha_+\alpha_-)\sigma_3 + \partial(\alpha_+\alpha_3)\sigma_+ + \partial(\alpha_-\alpha_3)\sigma_-, \\ [A, [A, A]] &= (\alpha_-\alpha_+\alpha_3)\sigma_3 + (\alpha_+\alpha_3\alpha_3)\sigma_+ + (\alpha_-\alpha_3\alpha_3)\sigma_-. \end{aligned}$$

Пусть цветной заряд частицы пропорционален σ_3 . С учетом закона Гаусса на малых расстояниях можно заключить, что величина α_3 при $\rho \rightarrow 0$ ведет себя как ρ^{-3} , а ее

⁴⁾ Закон Гаусса в $4D$ более подробно обсуждается в работе [10].

⁵⁾ Отметим, что наличие δ -образного распределения цветного заряда делает невозможным явное переплетение цветных и пространственно-временных переменных в A_μ , подобное переплетению переменных у монополей или инстантонов.

вторая производная — как ρ^{-5} . Если предположить, что α_+ и α_- отличны от нуля, то квадратичный и кубический члены уравнения (41) должны вести себя подобным же образом. Тогда сравнение коэффициентов перед σ_3 в квадратичном и кубическом членах показывает, что величина $\alpha_- \alpha_+$ должна вести себя как ρ^{-4} и ρ^{-2} , соответственно. Это означает, что, по крайней мере, одна из величин α_- или α_+ должна обращаться в нуль. Положим $\alpha_- = 0$. Поскольку дифференцирование α_+ увеличивает на единицу степень ее сингулярности, то, сравнивая коэффициенты перед σ_+ в линейном, квадратичном и кубическом членах уравнения (41), находим, что степени их сингулярности составляют пропорцию 2:4:6. Отсюда следует, что $\alpha_- = \alpha_+ = 0$. Потенциал A_μ оказывается абелевым.

Причина общего характера, почему точечная цветная частица способна породить неабелево поле лишь в пространстве-времени четырех измерений, состоит в следующем. Закон Гаусса в $4D$ обеспечивает наличие простого полюса потенциала, $A_\mu \propto \rho^{-1}$. Поэтому как дифференцирование, так и умножение на A_μ увеличивают степень сингулярности на единицу. Действие производной ∂_μ и ковариантной производной $\partial_\mu - igA_\mu$ на сингулярные члены потенциала A_μ оказывается одинаковым, благодаря чему и возможны неабелевы решения.

Таким образом, теория Янга–Миллса–Вонга, определенная на пространстве-времени любой четной размерности $D = 2n$, за исключением $D = 4$, по составу реализуемых полевых конфигураций оказывается эквивалентной соответствующей D -мерной электродинамике.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра в рамках проекта № 208.

Список литературы

- [1] *C. Teitelboim.* Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 1572.
- [2] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 167. P. 148.
- [3] *G. N. Plass.* Rev. Mod. Phys. 1961. V. 33. P. 37.
- [4] *Б. П. Косяков.* ТМФ. 1991. Т. 87. С. 422.
- [5] *B. P. Kosyakov.* Phys. Lett. B. 1993. V. 312. P. 471; *Б. П. Косяков.* ТМФ. 1994. Т. 99. С. 36.
- [6] *B. P. Kosyakov.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 5032.
- [7] *E. S. Fradkin, D. M. Gitman.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 3230.
- [8] *B. P. Kosyakov, V. V. Nesterenko.* Phys. Lett. B. 1996. V. 384. P. 70.
- [9] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов.* Обобщенные функции и действия над ними. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959.
- [10] *Б. П. Косяков.* УФН. 1992. Т. 162. Вып. 2. С. 161.
- [11] *A. Balachandran, S. Borchardt, A. Stern.* Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 3247.

Поступила в редакцию 28.VIII.1998 г.