Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Барбашов, А. Б. Пестов, Перенос Ферми–Уолкера и связность Вейля,
ТМФ, 1999, том 119, номер 1, 136–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:30:48

ПЕРЕНОС ФЕРМИ–УОЛКЕРА И СВЯЗНОСТЬ ВЕЙЛЯ

Предложены уравнения, устанавливающие связь между переносом Ферми–Уолкера и конгруэнтным переносом Вейля. На основе этих уравнений указано на возможность проявления неабелева калибровочного поля Вейля в томасовской прецессии гироскопа. Найдены решения уравнений неабелева калибровочного поля.

1. В работе [1] было показано, что конгруэнтный перенос, введенный Вейлем [2], определяет неабелево калибровочное поле. В работе [3] построено спинорное представление калибровочной группы Вейля и найден соответствующий спинорный ток, который является источником этого калибровочного поля. Существование спинорного источника неабелева калибровочного поля Вейля делает обоснованным вопрос о наблюдаемых проявлениях такого поля в макроскопических масштабах. Одна из таких возможностей рассмотрена в данной статье. Показано, что если на вращающееся тело не действуют ни электромагнитные, ни гравитационные силы, то прецессия собственного момента импульса тела может быть обусловлена рассматриваемым неабелевым калибровочным полем.

Как известно (см., например, [4]), наиболее общий закон параллельного переноса векторов вдоль заданной кривой $x^i = x^i(\tau)$ определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dS^i}{d\tau} = -\Gamma_{jk}^i u^j S^k,$$

где $u^i = dx^i/d\tau$. Из условия сохранения длины вектора при параллельном переносе следует, что коэффициенты линейной связности Γ_{jk}^i должны удовлетворять системе алгебраических уравнений

$$\partial_j g_{ik} - \Gamma_{ji}^l g_{lk} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0.$$

Предполагается, что метрический тензор g_{ij} задан, а скалярное произведение определяется как $g(S, S) = g_{ij} S^i S^j$. Общее решение такой системы уравнений может быть записано в виде

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} + G_{jk}^i, \quad (1)$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

где $G_{jk}^i = g^{il} G_{jkl}$ и G_{jkl} есть тензорное поле третьего ранга, кососимметричное по двум последним индексам, т.е. $G_{jkl} + G_{jlk} = 0$. Это G_{jkl} и есть неабелево калибровочное поле Вейля, свойства которого были рассмотрены в упомянутых выше работах. В формуле (1) через $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ обозначены символы Кристоффеля метрики g_{ij} :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

Связность (1) определяет введенный Вейлем конгруэнтный перенос, при котором векторное поле изменяется по правилу

$$\frac{dS^i}{d\tau} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} u^j S^k = -G_{jk}^i u^j S^k. \quad (2)$$

Закон переноса (2) включает в себя смещение, принадлежащее римановой геометрии, и вращение, определяемое метрикой g_{ij} и бивектором $G_{jkl} u^j$. Калибровочная теория Вейля является реализацией абстрактной теории калибровочных полей в рамках дифференциальной геометрии. Особенностью этой реализации является то, что в ней нет разделения между пространством-временем и калибровочным пространством [1]. В данной статье обсуждается одно из возможных физических проявлений неабелева калибровочного поля Вейля.

2. Рассмотрим вращающееся тело, например гироскоп, которое ускоряется под действием сил, приложенных к его центру масс. Такие силы не дают крутящего момента, поэтому они не изменяют вектор S^i собственного момента импульса тела, если исключить единственное вращение в плоскости, натянутой на векторы скорости u^i и ускорения a^i ,

$$a^i = \frac{\delta u^i}{\delta \tau} = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}.$$

Такого рода вращение сохраняет ортогональность вектора собственного момента импульса тела S^i и 4-скорости u^i . С геометрической точки зрения это означает, что собственный момент импульса тела переносится в соответствии с правилом переноса Ферми–Уолкера [5–7]

$$\frac{dS^i}{d\tau} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} u^j S^k + (u^i a^j - u^j a^i) S_j = 0. \quad (3)$$

В переносе Ферми–Уолкера предполагается заданной траектория движения центра тяжести тела в пространстве-времени. Зная траекторию движения, можно найти 4-скорость u^i и 4-ускорение a^i тела и, решая затем уравнения (3), вычислить угловую скорость прецессии.

Нетрудно проверить, что при переносе Ферми–Уолкера сохраняются длина вектора и угол между векторами. Поскольку конгруэнтный перенос (2) характеризуется такими же свойствами, то можно поставить вопрос о применимости уравнений (2) для описания прецессии собственного момента импульса тела в том случае, если гравитационные

и электромагнитные силы отсутствуют. Для ответа на этот вопрос необходимо выяснить, на каких траекториях уравнения (2) и (3) совпадают. Сравнивая уравнения (2) и (3), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$u_i a_j - u_j a_i + G_{lij} u^l = 0, \quad (4)$$

для нахождения траекторий, вдоль которых перенос Ферми–Уолкера совпадает с конгруэнтным переносом Вейля. Отметим, что траектории движения пробных тел во внешнем гравитационном поле, вообще говоря, не удовлетворяют уравнениям (4), поскольку при $a^i = 0$ выражение $G_{lij} u^l$ в общем случае не равно нулю.

Исследуем, не приводят ли уравнения (4) к противоречиям. Так как $u_i u^i = 1$, то из (4) сверткой с u^i получаем, что всякое решение уравнений (4) удовлетворяет также уравнениям

$$a^i + G_{jk}^i u^j u^k = 0, \quad (5)$$

которые, как легко видеть, являются уравнениями геодезических в связности (1). Проверим, следует ли из уравнений (2) и (5) условие сохранения ортогональности собственного момента импульса тела и 4-скорости. Сверткой с u^i из уравнений (2) получаем

$$u_i \frac{\delta S^i}{\delta \tau} = -G_{ijk} u^i S^j u^k,$$

а из уравнений (5) сверткой с S_i –

$$S_i \frac{\delta u^i}{\delta \tau} = G_{ijk} u^i S^j u^k.$$

Складывая последние два уравнения, имеем

$$\frac{\delta}{\delta \tau} (u_i S^i) = 0.$$

Таким образом, искомое условие выполняется и уравнения (2) применимы для описания прецессии собственного момента импульса тела в рамках динамики, определяемой уравнениями (4). Остановимся на них подробнее.

3. Как известно, важное значение имеют неприводимые по отношению к фундаментальной группе симметрии величины. Если применить этот принцип к полю G_{ijk} , то необходимо рассмотреть глобальные преобразования калибровочной группы Вейля, которая имеет структуру группы Лоренца. По отношению к этой группе тензор G_{ijk} разложим на неприводимые компоненты. Согласно результатам работы [8] такое разложение имеет вид

$$G_{ijk} = \frac{2}{3}(T_{ijk} - T_{ikj}) + \frac{1}{3}(g_{ij}F_k - g_{ik}F_j) + e_{ijkl}A^l, \quad (6)$$

где e_{ijkl} — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты, а другие величины определяются следующим образом:

$$F_i = g^{jk} G_{jki}, \quad A_i = \frac{1}{6} e_{ijkl} G^{jkl},$$

$$T_{ijk} = \frac{1}{2} (G_{ijk} + G_{jik}) + \frac{1}{6} (g_{ki} F_j + g_{kj} F_i) - \frac{1}{3} g_{ij} F_k.$$

Покажем, что неприводимая компонента, определяемая полярным вектором F_i , допускает физическую интерпретацию. В рамках релятивистской механики [9] ускоренное движение частицы с массой $m = 1$ определяется уравнениями

$$a^i = \frac{\delta u^i}{\delta \tau} = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = F^i, \quad (7)$$

где F^i — 4-сила. С помощью подстановки (7) в (4) нетрудно заметить, что уравнения (4) удовлетворяются, если в качестве G_{ijk} взять величину

$$G_{ijk} = g_{ij} F_k - g_{ik} F_j, \quad (8)$$

которая совпадает со вторым членом разложения (6). Уравнения (5) при этом также удовлетворяются, поскольку из (7) и $u^i u_i = 1$ следует, что 4-сила ортогональна 4-скорости, $u_i F^i = 0$. Наконец, рассмотрим, как подстановка (8) согласуется с уравнениями движения поля G_{ijk} , предложенными в [1, 3]. Уравнения калибровочного поля G_{ijk} имеют вид

$$\nabla_i B^{ijkl} + G_{im}^k B^{ijml} - G_{im}^l B^{ijmk} + S^{jkl} = 0, \quad (9)$$

где величина

$$B_{ijkl} = \nabla_i G_{jkl} - \nabla_j G_{ikl} + G_{ikm} G_{jl}^m - G_{jkm} G_{il}^m + R_{ijkl} \quad (10)$$

— тензор напряженности, тензор S^{jkl} — ток, являющийся источником рассматриваемого калибровочного поля и R_{ijkl} — риманов тензор кривизны для g_{ij} . Предполагается, что ток S^{ijk} задан и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_i S^{ijk} + G_{im}^j S^{imk} - G_{im}^k S^{imj} = 0,$$

которые аналогичны локальному закону сохранения энергии-импульса в общей теории относительности [3].

Подставляя (8) в (10), получим

$$B_{ijkl} = g_{ijkl} (F_m F^m) + g_{ijm} (\nabla^m + F^m) F_l - g_{ijml} (\nabla^m + F^m) F_k + R_{ijkl}, \quad (11)$$

где $g_{ijkl} = g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}$. Как видно, система уравнений (8), (9) для поля F_i является сложной, кроме того, число уравнений в системе значительно больше, чем число неизвестных функций. Следовательно, необходимо проверить рассматриваемую систему

уравнений (8), (9) на совместность. Сворачивая уравнения (9) по индексам j и l , приходим к уравнениям

$$\nabla_i B^{ik} + G_{im}^k B^{im} + G_{ijm} B^{ijmk} + S^k = 0, \quad (12)$$

где $B^{ik} = g_{jl} B^{ijkl}$, $S^k = g_{jl} S^{jkl}$. Свертка по индексам j и k дает такие же уравнения, а по k и l – тождество. Таким образом, всякое решение уравнений (9) является решением уравнений (12). Подставляя (8) в (12), имеем

$$\nabla_i B^{ik} - F_m (B^{mk} + B^{km}) + F^k B + S^k = 0, \quad (13)$$

где $B = g_{ij} B^{ij}$. Используя выражение (11) для тензора напряженности как функции F_i , получаем явные выражения B_{ij} , B через F_i :

$$B_{ij} = 2g_{ij} F_m F^m - 2(\nabla_i + F_i) F_j - g_{ij} \nabla_m F^m + R_{ij}, \quad (14)$$

$$B = 6(F_m F^m - \nabla_m F^m) + R, \quad (15)$$

где R_{ij} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна пространства-времени. Подставляя (14), (15) в (13), находим, что всякое решение уравнений (8), (9) является решением уравнений

$$\nabla^i \nabla_i F^k + 3F^k (\nabla_i F^i - F_i F^i) + \frac{1}{2} \nabla^k (\nabla_i F^i - 3F_i F^i) = \frac{1}{2} S^k, \quad (16)$$

в которых для простоты положено $R_{ijkl} = 0$.

Для доказательства совместности системы уравнений (8), (9) покажем, что она имеет нетривиальные решения при $S^{ijk} = 0$, $R_{ijkl} = 0$. Одним из решений является

$$F_i = \frac{a_i}{a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3} = \frac{a_i}{a_m x^m}, \quad (17)$$

где a_i – постоянное неизотропное векторное поле, $a_i a^i \neq 0$.

Нетрудно убедиться, что (17) удовлетворяет уравнениям (16). Вычисляя тензор напряженности, находим

$$B_{ijkl} = g_{ijkl} \frac{a_m a^m}{(a_n x^n)^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнения поля (9), можно проверить, что они также выполняются.

Другое решение уравнений поля (8), (9) при $S^{ijk} = 0$ и $R_{ijkl} = 0$ – плоская волна

$$F_k = a_k \Phi(a_i x^i),$$

где a_k – изотропный вектор, $a_i a^i = 0$ и Φ – произвольная функция. В этом случае для тензора напряженности получаем

$$B_{ijkl} = (\Phi' + \Phi^2)(g_{ijmk} a^m a_l - g_{ijml} a^m a_k),$$

где штрих означает производную.

Таким образом, система уравнений (8), (9) совместна.

В связи с уравнениями (16) интересно отметить, что, опуская в них члены, соответствующие самодействию, и полагая $S^k = 0$, получаем уравнения, являющиеся частным случаем (при $\lambda = 3/2$) уравнений

$$\nabla_i \nabla^i A^k - (1 - \lambda) \nabla^k \nabla_i A^i = 0,$$

которые применяются в квантовой электродинамике для фиксации калибровки [10] векторного потенциала A^i .

4. В заключение остановимся на возможной физической интерпретации уравнений (4), вытекающей из проведенного рассмотрения. Если вращающийся объект, на который не действуют никакие вращающие моменты, испытывает ускорение, то относительно инерциальной системы отсчета направление оси его вращения изменяется в соответствии с правилом переноса Ферми–Уолкера. Такое явление называется прецессией Томаса, и, как показано выше, причиной прецессии Томаса в принципе может быть калибровочное поле G_{ijk} . Отсюда следует, что это поле можно обнаружить, наблюдая за поведением гироскопа на космической станции. Так как гравитационные и электромагнитные силы там можно считать равными нулю, то прецессия, если таковая обнаружится, могла бы быть вызвана рассматриваемым калибровочным полем.

Благодарности. Мы выражаем благодарность Р. А. Асанову и Э. А. Кураеву за полезные обсуждения затронутых выше вопросов и И. В. Тютину за конструктивные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 07-01-00745.

Список литературы

- [1] Б. М. Барбашов, А. Б. Пестов. ТМФ. 1995. Т. 104. С. 429.
- [2] H. Weyl. Space–Time–Matter. New York: Dover Publications, 1922.
- [3] Б. М. Барбашов, А. Б. Пестов. ТМФ. 1997. Т. 113. С. 112.
- [4] А. П. Норден. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1978.
- [5] Дж. Синг. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
- [6] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. М.: Мир, 1977.
- [7] С. Вейнберг. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
- [8] Kenji Hayashi, Takeshi Shirafuji. Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 3524.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1967.
- [10] Л. Райдер. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 22.I.1998 г.,
после доработки 24.VIII.1998 г.