Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Церковников, Двухвременные температурные функции Грина в кинетической теории и молекулярной гидродинамике. II. Уравнения для систем с парным взаимодействием, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 1, 142–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:40:14

ДВУХВРЕМЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ
ФУНКЦИИ ГРИНА В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ.
II. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ
С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

На примере системы частиц с прямым парным взаимодействием рассмотрены два подхода к решению задачи о вычислении корреляционных функций. Первый из них основан на цепочке уравнений, определяющей кинетическое уравнение Больцмановского типа. Во втором подходе используется цепочка уравнений молекулярной гидродинамики. Показана эквивалентность обоих подходов в смысле полноты описания рассматриваемой системы. Обсуждаются преимущества подхода, основанного на уравнениях молекулярной гидродинамики.

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей статье [1] была развита общая методика построения цепочек уравнений для неприводимых функций Грина. Вид цепочки уравнений определяется базисными операторами, на которых строятся первые уравнения цепочки. В статье [1] получены также соотношения, позволяющие исходя из неприводимых функций – решений бесконечной цепочки – находить любые корреляционные функции, при этом обеспечивается полное описание исследуемой физической системы.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию предложенной в [1] схемы вычислений на примере квантовой системы с парным взаимодействием. При этом мы убедимся, что в рамках конкретной задачи выбор операторного базиса неоднозначен и от этого выбора зависит эффективность предлагаемого метода. Во втором разделе статьи в качестве базисных выбраны оператор $a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$ и сопряженный ему оператор $a_q^+(p') = a_{p'+\frac{q}{2}}^+ a_{p'-\frac{q}{2}}$. В результате мы получаем цепочку уравнений, определяющую кинетическое уравнение для функции $((a_q(p) | a_q^+(p')))_E$, пропорциональной фурье-образу вигнеровской функции распределения. Полученные уравнения могут быть использованы для построения уравнений гидродинамики и вычисления кинетических

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

коэффициентов. Однако мы не получаем при этом особых преимуществ по сравнению с обычными методами кинетической теории.

Разработанная в работе [1] методика допускает альтернативный, более эффективный подход, которому посвящены третий и последующие разделы данной статьи. В третьем разделе в качестве базиса мы будем использовать набор операторов плотностей сохраняющихся величин (числа частиц ρ_q , потока частиц J_q^α и энергии h_q). В результате первым звеном цепочки будут линеаризованные уравнения молекулярной гидродинамики [2], совпадающие по форме с уравнениями обычной гидродинамики, но применимые также и вне гидродинамической области значений градиентов и частот. Последующие уравнения цепочки служат для определения неприводимых относительно операторов ρ_q , J_q^α и h_q функций Грина, с помощью которых выражаются обобщенные кинетические коэффициенты. Как показано в работах [3] и [4], выбор в качестве второго звена уравнений для функций Грина потоков сохраняющихся величин позволяет вычислить кинетические коэффициенты, не прибегая к решению кинетического уравнения.

В работах [4] обобщенные кинетические коэффициенты вычислялись в приближении слабо неидеального газа. Для того чтобы выйти за рамки этого приближения, необходимо включить в рассмотрение уравнения бесконечной цепочки, следующие за уравнениями молекулярной гидродинамики и уравнениями для потоков сохраняющихся величин. Этому посвящен четвертый раздел статьи. В нем получены уравнения для неприводимых функций Грина, построенных на операторах

$$a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}, \quad a_q(f) = a_{p_1+\frac{k-q}{2}}^+ a_{p_2-\frac{k}{2}}^+ a_{p_2+\frac{k}{2}} a_{p_1-\frac{k-q}{2}}, \quad f = (p_1, p_2, k),$$

через которые выражаются обобщенные времена релаксации. То обстоятельство, что с помощью операторов $a_q(p)$ и $a_q(f)$ выражаются базисные операторы ρ_q , J_q^α , h_q и операторы потоков, приводит к необходимости обобщения понятия обратной матрицы, существование которой является необходимым условием применимости метода, изложенного в работе [1].

Выбор в качестве первого звена цепочки (в отличие от второго раздела) уравнений молекулярной гидродинамики вовсе не означает, что мы утрачиваем возможность вычисления функций распределения (точнее, их отклонения от равновесного значения), без которых описание исследуемой системы было бы неполным. В пятом разделе показано, что соотношения, полученные в работе [1], позволяют выразить такие функции через “диагональные” неприводимые функции, являющиеся решением бесконечной цепочки уравнений.

В последнем, шестом разделе обсуждаются полученные результаты и возможность дальнейшего развития методики, что позволило бы учесть вклад взаимодействующих мод.

Основными соотношениями работы [1], используемыми в настоящей статье, являются уравнения движения, определяющие бесконечную последовательность операторов $a(n)$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$i\dot{a}(n) = [a(n), \mathcal{H}]_- = \varepsilon(n, \bar{n})a(\bar{n}) + \nu(n | \bar{n} + 1)a(\bar{n} + 1), \quad (1.1)$$

$$-i\dot{a}^+(n') = [\mathcal{H}, a^+(n')]_- = a^+(\bar{n})\bar{\varepsilon}(\bar{n}, n') + a^+(\bar{n} + 1)\bar{\nu}(n + 1 | n') \quad (1.2)$$

и цепочка уравнений для неприводимых функций

$$EG_E(n | n') = \chi(n | n') + \left\{ (i\dot{A}(n) | A^+(n')) + ((i\dot{A}(n) | -i\dot{A}^+(\bar{n}'))_{n,E}) \right\} \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) G_E(\bar{n} | n'), \quad (1.3)$$

где при $n = 1$ оператор $a(1)$ (или набор операторов, представляемый в виде столбца) является базисным, выбираемым в соответствии с характером рассматриваемой задачи, $A(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) – последовательность ортогонализированных операторов, получаемая из последовательности $a(n)$: $A(1) = a(1)$,

$$A(n) = a(n) - \sum_{m=1}^{n-1} (a(n) | A^+(\bar{m}')) \chi^{-1}(\bar{m}' | \bar{m}) A(\bar{m}), \quad n = 2, 3, \dots; \quad (1.4)$$

$\chi(n | n') = (a(n) | a^+(n'))_{n-1} = (A(n) | A^+(n'))$, $G_E(n | n') = ((a(n) | a^+(n'))_{n-1, E})$. Черта над стоящими рядом, не разделенными вертикальной чертой номерами $\bar{n}$, $\bar{n} + 1$, $\bar{m}$, $\dots$ означает свертку по квантовым состояниям и векторным индексам, если $a(n)$ – столбец операторов. Неприводимые функции определяются рекуррентными соотношениями, которые для произвольных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}^+$ имеют вид

$$((\mathcal{A} | \mathcal{B}^+))_{n,E} = ((\mathcal{A} | \mathcal{B}^+))_{n-1,E} - ((\mathcal{A} | A^+(\bar{n}'))_{n-1,E} G_E^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) ((A(\bar{n}) | \mathcal{B}^+))_{n-1,E}, \quad (1.5)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, $((\mathcal{A} | \mathcal{B}^+))_{0,E} \equiv ((\mathcal{A} | \mathcal{B}^+))_E$,

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} | \mathcal{B}^+))_E &= -i \int_0^\infty e^{iEt} (\mathcal{A}(t) | \mathcal{B}^+) dt, \\ (\mathcal{A}(t) | \mathcal{B}^+) &= i \int_t^\infty \langle [\mathcal{A}(t'), \mathcal{B}^+]_- \rangle dt', \end{aligned} \quad (1.6)$$

$\text{Im } E > 0$, $(\mathcal{A}(t) | \mathcal{B}^+)$ и $((\mathcal{A} | \mathcal{B}^+))_E$ – соответственно функция релаксации и ее лапласовский образ. Функции Грина разной степени неприводимости связаны формулой

$$\begin{aligned} ((A(n) | \mathcal{B}^+))_{n-1,E} &= G_E(n | \bar{n}') \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) \times \\ &\times \left\{ (A(\bar{n}) | \mathcal{B}^+) + ((i\dot{A}(\bar{n}) | \mathcal{B}^+))_{n,E} \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

и ей сопряженной для $((\mathcal{A} | A^+(n'))_{n-1,E})$.

Ссылки на формулы работы [1] будут отмечаться римской цифрой I перед соответствующим номером. Так, приведенным выше формулам соответствуют (по порядку) номера: (I.3.4), (I.3.5) при $b^+(n) = a(n)$, (I.3.35) при $B^+(n) = A^+(n)$, (I.3.8), (I.3.23), (I.2.4) и (I.3.29).

2. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Уравнение движения для одночастичного оператора в гейзенберговском представлении $a_p(t) = \exp(i\mathcal{H}t)a_p \exp(-i\mathcal{H}t)$ в случае системы бозе- или ферми-частиц с парным взаимодействием имеет вид (в единицах $\hbar = 1$)

$$i\dot{a}_p = [a_p, \mathcal{H}]_- = \left\{ \frac{p^2}{2m} - \mu \right\} a_p + \frac{1}{V} \sum_{k, p_1} \nu(k) a_{p_1 - \frac{k}{2}}^+ a_{p_1 + \frac{k}{2}} a_{-k+p}, \quad (2.1)$$

где a_p^+ и a_p – бозе- или ферми-операторы рождения и уничтожения, $\nu(k) = \nu(|\mathbf{k}|)$ – фурье-образ потенциала взаимодействия между частицами, $k = \mathbf{k}$, $p = \mathbf{p}$ в случае бозе-системы и $p = (\mathbf{p}, \sigma)$, $\sigma = \pm 1$, для ферми-системы (в этом случае суммирование по p предполагает суммирование как по импульсу $\mathbf{p}$, так и по спиновому индексу σ). В качестве базисного оператора примем $a_{p - \frac{q}{2}}^+ a_{p + \frac{q}{2}}$. Тогда с учетом уравнения (2.1) из уравнений (1.1) получаем цепочку уравнений движения для операторов

$$\begin{aligned} a(1) &\equiv a_q(p) = a_{p - \frac{q}{2}}^+ a_{p + \frac{q}{2}}, \\ a(2) &\equiv a_q(f) = a_q(p_1, p_2, k) = a_{p_1 + \frac{k-q}{2}}^+ a_{p_2 - \frac{k}{2}}^+ a_{p_2 + \frac{k}{2}} a_{p_1 - \frac{k-q}{2}}, \\ a(3) &\equiv a_q(g) = a_q(p_1, p_2, p_3; k, k_1) = \\ &= a_{p_1 + \frac{k+k_1-q}{2}}^+ a_{p_2 - \frac{k}{2}}^+ a_{p_3 - \frac{k_1}{2}}^+ a_{p_3 + \frac{k}{2}} a_{p_2 + \frac{k}{2}} a_{p_1 - \frac{k+k_1-q}{2}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $q \equiv \mathbf{q}$, $k \equiv \mathbf{k}$, $k_1 \equiv \mathbf{k}_1$, $p_i = (\mathbf{p}_i, \sigma_i)$ в случае ферми-системы и $f, g, \dots$ – сокращенные обозначения для соответствующих совокупностей индексов p и k . В первых двух уравнениях цепочки (1.1) (при $n = 1, 2$) коэффициенты имеют вид

$$\varepsilon(1, 1') \equiv \varepsilon_q(p, p') = \varepsilon_q(p) \delta(p, p'), \quad \varepsilon_q(p) = \frac{(p + \frac{q}{2})^2 - (p - \frac{q}{2})^2}{2m} = \frac{(p, q)}{m}; \quad (2.3)$$

$$\nu(1 | 2) \equiv \nu(p | f) = \nu(p | p_1, p_2, k) = \frac{\nu(k)}{V} \left(\delta_{p, p_1 + \frac{k}{2}} - \delta_{p, p_1 - \frac{k}{2}} \right); \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(2 | 2') &\equiv \varepsilon_q(f, f') = \varepsilon_q(f) \delta_q(f, f') + \nu(f, f'), \\ \varepsilon_q(f) &= \frac{(p_1, -k + q) + (p_2, k)}{m}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\nu(f, f') \equiv \nu(p_1, p_2, k; p'_1, p'_2, k') = \nu(p_1 | p'_1, p'_2, k' - k) \delta_{p_1 + p_2, p'_1 + p'_2}$$

и

$$\begin{aligned} \nu(2 | 3') &\equiv \nu(f | g') = \nu(p_1, p_2, k | p'_1, p'_2, p'_3; k' k'_1) = \\ &= \nu(p_1 | p'_1, p'_2, k'_1) \delta_{p_2, p'_2} \delta_{k, k'} + \nu(p_2 | p'_1, p'_2, k'_1) \delta_{p_1, p'_2} \delta_{-k + q, k'}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В соотношениях (2.3)–(2.6) функции $\delta(p, p')$ и $\delta_q(f, f')$ имеют вид

$$\begin{aligned} \delta(1, 1') &\equiv \delta(p, p') = \delta_{p, p'}, \\ \delta(2, 2') &\equiv \delta_q(f, f') = \delta_{q; f, f'} = \frac{1}{2(1 + \delta_{\sigma_1 \sigma_2})} \delta_{p_1 + p_2, p'_1 + p'_2} \times \\ &\times \left\{ \delta_{p_1, p'_1} \delta_{k, k'} + \delta_{p_2 p'_1} \delta_{-k + q, k'} \pm \right. \\ &\left. \pm \delta_{p_1 - p_2 + \frac{q}{2}, k'} \delta_{k, p'_1 - p'_2 + \frac{q}{2}} \pm \delta_{p_2 - p_1 + \frac{q}{2}, k'} \delta_{k, p'_2 - p'_1 + \frac{q}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Знак минус в правой части (2.7) соответствует ферми-операторам. В случае бозе-системы в знаменателе следует заменить $\delta_{\sigma_1, \sigma_2}$ на 1. Символы Кронекера, связывающие в формулах (2.6), (2.7) индексы p , связывают и индексы $\mathbf{p}$ и σ . Так, $\delta_{k, k'} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$, но

$$\delta_{p, p'} = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad \delta_{p_1 - p_2 + \frac{q}{2}, k'} = \delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \frac{q}{2}, \mathbf{k}'} \delta_{\sigma_1, \sigma_2}$$

и т.д., $\nu(k) = \nu(|\mathbf{k}|)$, $\nu(p_1 - p_2) = \nu(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|) \delta_{\sigma_1 \sigma_2}$ и т.д. Обобщенные δ -символы $\delta(p, p'), \delta(f, f'), \dots$ обладают симметрией, свойственной операторам $a_q(p), a_q(f), \dots$ (как, например, $a_q(f)$ при замене $p_1 \rightleftharpoons p_2, k \rightarrow -k + q$), и всеми необходимыми свойствами, отраженными в формулах (I.3.12)–(I.3.14).

Ортогонализуя в соответствии с (1.4), (I.3.8) последовательность операторов (2.2):

$$\begin{aligned} A(1) &\equiv A_q(p) = a_q(p), \quad A^+(1') \equiv A_q^+(p') = a_q^+(p'), \\ A(2) &\equiv A_q(f) = a_q(f) - (a_q(f) | a_q^+(\bar{p}')) \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}), \\ A^+(2') &\equiv A_q^+(f') = a_q^+(f') - a_q^+(\bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | a_q^+(f')), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_q(p | p') &= (a_q(p) | a_q^+(p')), \\ \chi_q(f | f') &= (A_q(f) | A_q^+(f')) = \\ &= (a_q(f) | a_q^+(f')) - (a_q(f) | a_q^+(\bar{p}')) \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | a_q^+(f')), \end{aligned} \quad (2.9)$$

для неприводимых (диагональных по номерам $n = 1, 2, \dots$) функций

$$\begin{aligned} G_{q, E}(1 | 1') &\equiv G_{q, E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p')))_E, \\ G_E(2 | 2') &\equiv G_{q, E}(f | f') = ((A_q(f) | A_q^+(f'))_{1, E} = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{1, E}, \dots \end{aligned}$$

будем иметь согласно соотношениям (1.3), (I.3.16), (I.3.18) уравнения

$$\begin{aligned} EG_{q, E}(p | p') &= \chi_q(p | p') + \omega_q(p, \bar{p}) G_{q, E}(\bar{p} | p') + \\ &+ \nu(p | \bar{f}) G_{q, E}(\bar{f} | \bar{f}') \bar{\nu}(\bar{f}' | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q, E}(\bar{p} | p'), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} EG_{q, E}(f | f') &= \chi_q(f | f') + \omega_q(f, \bar{f}) G_{q, E}(\bar{f} | f') + \\ &+ \nu(f | \bar{g}) G_{q, E}(\bar{g} | \bar{g}') \bar{\nu}(\bar{g}' | \bar{f}') \chi_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f}) G_{q, E}(\bar{f} | f'). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения для функций $G_{q,E}(g | g'), \dots$ строятся по такой же схеме. Для последовательности операторов (2.2) одновременно существуют как функции $\chi^{-1}(n | n')$, так и функции $\eta^{-1}[n | n']$ ($\eta[n | n'] = \langle [A[n], A^+[n']]_- \rangle$, см. уравнения (I.4.1)–(I.4.3)). В этом случае мы можем, воспользовавшись формулами (I.4.20), (I.4.9), исключить из функций $\omega(n, n')$ (I.3.18) неизвестные скалярные произведения $(\mathcal{A} | \mathcal{B}^+)$ (1.6), заменив их усредненными коммутаторами $\langle [\mathcal{A}, \mathcal{B}^+]_- \rangle$. В результате будем иметь

$$\omega_q(p, p') = \omega_q[p, p'] - \nu(p | \bar{f})\chi_q(\bar{f} | \bar{f}')\bar{\nu}(\bar{f}' | \bar{p}')\eta_q^{-1}[\bar{p}' | p'], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \omega_q(f, f') &= \omega_q[f, f'] - \nu(f | \bar{g})\chi_q(\bar{g} | \bar{g}')\bar{\nu}(\bar{g}' | \bar{f}')\eta_q^{-1}[\bar{f}' | f'] + \\ &+ \chi_q(f | \bar{f}')\bar{\nu}(\bar{f}' | \bar{p}')\eta_q^{-1}[\bar{p}' | \bar{p}]\nu(\bar{p} | f'), \quad \dots, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\omega_q[p, p'] = \varepsilon_q(p, p') + \nu(p | \bar{f})\langle [a_q(\bar{f}), a_q^+(\bar{p}')] \rangle \eta_q^{-1}[\bar{p}' | p'], \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_q[f, f'] &= \varepsilon_q(f, f') + \nu(f | \bar{g})\langle [a_q(\bar{g}), A_q^+[\bar{f}']] \rangle \eta_q^{-1}[\bar{f}' | f'] - \\ &- \langle [a_q(f), a_q^+(\bar{p}')] \rangle \eta_q^{-1}[\bar{p}' | \bar{p}]\nu(\bar{p} | f'), \quad \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Восприимчивости $\chi_q(p | p'), \chi_q(f | f'), \dots$ удовлетворяют согласно (I.4.16) цепочке уравнений

$$\begin{aligned} \omega_q[p, \bar{p}]\chi_q(\bar{p} | p') - \\ - \nu(p | \bar{f})\chi_q(\bar{f} | \bar{f}')\bar{\nu}(\bar{f}' | \bar{p}')\eta_q^{-1}[\bar{p}' | \bar{p}]\chi_q(\bar{p} | p') = \eta_q[p | p'], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \omega_q[f, \bar{f}]\chi_q(\bar{f} | f') - \\ - \nu(f | \bar{g})\chi_q(\bar{g} | \bar{g}')\bar{\nu}(\bar{g}' | \bar{f}')\eta_q^{-1}[\bar{f}' | \bar{f}]\chi_q(\bar{f} | f') = \eta_q[f | f'], \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\eta_q[p | p'] = \langle [a_q(p), a_q^+(p')]_- \rangle = (n_{p-\frac{q}{2}} - n_{p+\frac{q}{2}})\delta_{p,p'} = n_q(p)\delta_{p,p'}, \quad (2.16')$$

$$\begin{aligned} \eta_q[f | f'] &= \langle [a_q(f), a_q^+(f')]_1 \rangle = \langle [A_q[f], A_q^+[f']]_- \rangle = \\ &= \langle [A_q[f], a_q^+(f')]_- \rangle \approx n_q(f)2(1 + \delta_{\sigma_1, \sigma_2})\delta_q(f, f'). \end{aligned} \quad (2.17')$$

По аналогии с формулами (2.8) имеем

$$A_q[p] = a_q(p), \quad A_q[f] = a_q(f) - \langle [a_q(f), a_q^+(\bar{p}')]_- \rangle \eta_q^{-1}[\bar{p}' | \bar{p}]a_q(\bar{p}).$$

Очевидно, что $\eta_q[p | p'] = \eta_q(p | p')$, но $\eta_q[f | f'] \neq \eta_q(f | f') = \langle [A_q(f), A_q^+(f')]_- \rangle$. Последнее приближенное равенство в (2.17') соответствует нулевому приближению по взаимодействию. Функция $\delta_q(f, f')$ определяется соотношением (2.7), а

$$\begin{aligned} n_q(f) \equiv n_q(p_1, p_2, k) &= n_{p_1+\frac{k-q}{2}}n_{p_2-\frac{k}{2}}\left(1 \pm n_{p_2+\frac{k}{2}}\right)\left(1 \pm n_{p_1-\frac{k-q}{2}}\right) - \\ &- \left(1 \pm n_{p_1+\frac{k-q}{2}}\right)\left(1 \pm n_{p_2-\frac{k}{2}}\right)n_{p_2+\frac{k}{2}}n_{p_1-\frac{k-q}{2}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

и $n_p = \langle a_p^+ a_p \rangle$. Чтобы вычислить средние вида $\langle a_{p_1}^+ \dots a_{p_n}^+ a_{p'_n} \dots a_{p'_1} \rangle$, входящие в правые части выражений для коэффициентов (2.12)–(2.15), следует воспользоваться цепочкой уравнений для обычных коммутаторных (антикоммутаторных) функций Грина (I.2.1), построенных по предлагаемой схеме на основе последовательности операторов $a_p, a_{p_1 - \frac{k}{2}}^+, a_{p_1 + \frac{k}{2}}, a_{-k+p}, \dots$, где $a(1) = a_p$ – одночастичный базисный оператор, удовлетворяющий уравнению движения (2.1).

Уравнения (2.10), (2.11) и (2.16), (2.17) представляют собой первые два уравнения бесконечной цепочки соответственно для релаксационных функций Грина (1.5) и восприимчивостей $\chi(n | n')$. Они являются основой построения кинетического уравнения для релаксационной функции Грина $G_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p')))_E$, которая в силу уравнения (I.2.12) связана с вариацией фурье-образа функции Вигнера

$$f_t(p, x) = \frac{1}{N} \sum_q \exp i(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \langle a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}} \rangle_t.$$

Если найдены диагональные по номеру n функции $G_{q,E}(p | p'), G_{q,E}(f | f'), \dots$ и $\chi_q(p | p'), \chi_q(f | f'), \dots$, все другие необходимые функции можно вычислить с помощью соотношений (1.7) или (I.3.33), (I.3.34) и определения неприводимых функций (1.5), например,

$$\begin{aligned} ((A_q(f) | a_q^+(p')))_E &= G_{q,E}(f | \bar{f}') \bar{\nu}(\bar{f}' | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p'), \\ ((a_q(p) | A_q^+(f')))_E &= G_{q,E}(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \nu(\bar{p} | \bar{f}) G_{q,E}(\bar{f} | f') \end{aligned} \quad (2.19)$$

и

$$\begin{aligned} ((A_q(f) | A_q^+(f')))_E &= G_{q,E}(f | f') + G_{q,E}(f | \bar{f}') \bar{\nu}(\bar{f}' | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \times \\ &\times G_{q,E}(\bar{p} | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \nu(\bar{p} | \bar{f}) G_{q,E}(\bar{f} | f') \end{aligned} \quad (2.20)$$

(см. также формулы (I.3.39)–(I.3.41)). Поскольку плотности сохраняющихся величин выражаются через операторы $a_q(p)$ и $a_q(f)$:

$$\begin{aligned} \rho_q &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p a_q(p), \quad J_q^\alpha = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} a_q(p), \quad h_q = h_q^{\text{kin}} + h_q^{\text{int}}, \\ h_q^{\text{kin}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) a_q(p), \quad h_q^{\text{int}} = \frac{1}{2\sqrt{N}V} \sum_{f=(p_1, p_2, k)} \nu(k) a_q(f), \end{aligned} \quad (2.21)$$

то с помощью соотношений (2.19), (2.20) можно получить выражения для функций Грина $((\rho_q | \rho_{-q}))_E, ((h_q | h_{-q}))_E, ((J_q^\alpha | J_{-q}^\beta))_E, ((h_q | \rho_{-q}))_E$ и т.д. через неприводимые функции $G_{q,E}(p | p')$ и $G_{q,E}(f | f')$.

Полученные уравнения применимы при любых взаимодействиях и плотностях. В случае слабо неидеального газа из них легко получаются уже известные результаты. Так, заменяя в уравнении (2.10) функции $G_{q,E}(f | f')$ и $\chi_q(p | p')$ их значениями для идеального газа $G_{q,E}^{\text{id}}(f | f')$ и $\chi_q^{\text{id}}(p | p')$ и полагая $E = i\varepsilon$, получим для $G_{q,E}(p | p')$

линеаризованное кинетическое уравнение. Если взаимодействие нельзя считать малым (например, когда газ малой плотности состоит из молекул типа “твердых шаров” или потенциал сингулярен), то в уравнении (2.10) следует положить $G_{q,E}(f | f') \approx G_{q,E}^{(0)}(f | f')$, где $G_{q,E}^{(0)}(f | f')$ – решение уравнения, получаемого из уравнения (2.11), если пренебречь членами второго порядка по взаимодействию, входящими в (2.11) явно и через $\omega_q(f | f')$ (2.13), (2.15), а в операторе $a_q(g)$ (2.2) в правой части (2.15) произвести все допустимые спаривания. В результате для функции $G_{q,E}^{(0)}(f | f')$ и (в том же приближении) для функции $\chi_q(f | f') \approx \chi_q^{(0)}(f | f')$ (см. (2.17) будем иметь уравнения

$$(E - \omega_q(f))G_{q,E}^{(0)}(f | f') = \chi_q^{(0)}(f | f') + \mathcal{V}_q(f | \bar{f})G_{q,E}^{(0)}(\bar{f} | f'), \quad (2.22)$$

$$\chi_q^{(0)}(f | f')\omega_q(f') + \chi_q^{(0)}(f | \bar{f})\bar{\mathcal{V}}_q(\bar{f} | f') = \eta_q[f | f'], \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_q(f) = \frac{(p_1, -k + q) + (p_2, k)}{m} \pm \frac{1}{V} \sum_p \left\{ \nu \left(p_1 - \frac{k - q}{2} - p \right) + \right. \\ \left. + \nu \left(p_2 + \frac{k}{2} - p \right) - \nu \left(p_2 - \frac{k}{2} - p \right) - \nu \left(p_1 + \frac{k - q}{2} - p \right) \right\} n_p \end{aligned} \quad (2.24)$$

и

$$\mathcal{V}_q(f | f') = \bar{\mathcal{V}}_q(f' | f) = \sum_{j=1}^6 \mathcal{V}_q^{(j)}(p_1, p_2, k | p'_1, p'_2, k'). \quad (2.25)$$

Слагаемые $\mathcal{V}_q^{(j)}(f | f')$ представляют собой потенциалы, получаемые в диаграммной технике путем суммирования бесконечных последовательностей диаграмм. Решения уравнений (2.22), (2.23) с помощью T -матрицы, удовлетворяющей уравнению

$$T_{q,E}(f | f') = \mathcal{V}_q(f | f') + \mathcal{V}_q(f | \bar{f})(E - \omega_q(\bar{f}))^{-1}T_{q,E}(\bar{f} | f'), \quad (2.26)$$

представляются в виде

$$\begin{aligned} G_{q,E}^{(0)}(f | f') = \{ \delta_q(f, \bar{f}) + (E - \omega_q(f))^{-1}T_{q,E}(f | \bar{f}) \} \times \\ \times (E - \omega_q(\bar{f}))^{-1}\chi_{q,E}^{(0)}(\bar{f} | f'), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\chi_q^{(0)}(f | f') = \eta_q[f | \bar{f}]\omega_q^{-1}(\bar{f})\{ \delta_q(\bar{f}, f') - \bar{T}_{q,0}(\bar{f} | f')\omega_q^{-1}(f') \}, \quad (2.28)$$

где $\bar{T}_{q,E}(f | f') = T_{q,E}(f' | f)$. В результате в оператор столкновений уравнения (2.10) войдет перенормированный потенциал

$$\nu_E(p | f) = \nu(p | \bar{f})\{ \delta_q(\bar{f}, f) - (E - \omega_q(\bar{f}))^{-1}T_{q,E}(\bar{f} | f) \}, \quad (2.29)$$

в котором следует положить $E = i\varepsilon$. Уравнение, аналогичное уравнению (2.22), использовалось в работе [5] при выводе кинетических уравнений для систем со взаимодействием типа твердых сфер и с кулоновским взаимодействием.

Полученные в этом разделе соотношения имеют достаточно общий характер, т.к. при их выводе практически не использовалась специфика задачи, принятой в качестве примера. Они могут быть применены для широкого класса физических систем. Следует, однако, отметить, что в случае сильно неидеальных систем, когда надо учитывать не только кинетический, но и потенциальный вклад в оператор плотности энергии (см. (2.21)), уравнения (2.10), (2.11) не очень удобны, т.к., например, при построении уравнений гидродинамики надо учитывать уравнения для функций $G_{q,E}(p | p')$ и $G_{q,E}(f | f')$, принадлежащие различным звеньям цепочки. Поэтому, не останавливаясь на подробном исследовании уравнений (2.10), (2.11) и (2.16), (2.17), перейдем к рассмотрению более эффективного способа решения задачи, основанного на бесконечной цепочке, определяющей уравнения молекулярной гидродинамики [2]. Полученные же выше формулы потребуются нам в дальнейшем.

3. ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ (МОЛЕКУЛЯРНОЙ) ГИДРОДИНАМИКИ

Примем в качестве базисных операторы плотностей сохраняющихся величин ρ_q, J_q^α и h_q (2.21), ортогонализовав их относительно скалярных произведений (1.6), что приводит к замене h_q на $\theta_q = h_q - (h_q | \rho_{-q})(\rho_q | \rho_{-q})^{-1} \rho_q$. В результате будем иметь столбец $A(1)$ и сопряженную строку $A^+(1')$ вида

$$\begin{aligned} A(1) &\equiv A_q = \text{col}(\rho_q, J_q^\alpha, \theta_q), \\ A^+(1') &\equiv A_q^+ = (\rho_{-q}, J_{-q}^\beta, \theta_{-q}) \quad (\alpha, \beta = x, y, z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для матрицы $G_{q,E} = ((A_q | A_q^+))_E$, построенной по правилу умножения “строка на столбец”, будем иметь согласно уравнению (1.3) при $n = 1$ матричное уравнение

$$EG_{q,E} = \chi_q + \{\eta_q + ((i\dot{A}_q | -i\dot{A}_q^+))_{1,E}\} \chi_q^{-1} G_{q,E}, \quad (3.2)$$

где $\eta_q = \langle [A_q, A_q^+]_- \rangle = (i\dot{A}_q | A_q^+)$, $\chi_q = (A_q | A_q^+) = \text{diag}(\chi_q^\rho, \chi_q(\alpha | \beta), \chi_q^\theta)$ — диагональная матрица (вследствие ортогональности операторов в (3.1)), и согласно (1.5) матрица коэффициентов равна

$$((i\dot{A}_q | -i\dot{A}_q^+))_{1,E} = ((i\dot{A}_q | -i\dot{A}_q^+))_E - ((i\dot{A}_q | A_q^+))_E G_{q,E}^{-1} ((A_q | -i\dot{A}_q^+))_E. \quad (3.3)$$

Восприимчивости χ_q^ρ , $\chi_q(\alpha | \beta)$, χ_q^θ и отличные от нуля компоненты матрицы $\eta_q = \langle [A_q, A_q^+]_- \rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_q^\rho &= (\rho_q | \rho_{-q}), \\ \chi_q^\theta &= (\theta_q | \theta_{-q}) = (h_q | h_{-q}) - (h_q | \rho_{-q})(\chi_q^\rho)^{-1}(\rho_q | h_{-q}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\chi_q(\alpha | \beta) = (J_q^\alpha | J_{-q}^\beta) = \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \chi_q^\parallel + \left(\delta_{\alpha,\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \chi_q^\perp, \quad (3.5)$$

где

$$J_q^\alpha = \frac{q_\alpha}{q^2} i\dot{\rho}_q + J_q^{\perp\alpha}, \quad i\dot{\rho}_q = (q, J_q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{m} a_q(p)$$

и, следовательно,

$$\chi_q^\parallel = \frac{1}{q^2} (i\dot{\rho}_q | -i\dot{\rho}_q) = \frac{1}{q^2} \langle [i\dot{\rho}_q, \rho_{-q}] \rangle = \frac{1}{m}, \quad \chi_q^\perp = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_q^\perp | \mathbf{J}_{-q}^\perp) \cong \frac{1}{m},$$

так что

$$\chi_q^{-1}(\alpha | \beta) = \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} m + \left(\delta_{\alpha, \beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) (\chi_q^\perp)^{-1} \quad (3.6)$$

и

$$\begin{aligned} \langle [J_q^\alpha, \rho_{-q}] \rangle &= \langle [\rho_q, J_{-q}^\alpha] \rangle = \frac{q_\alpha}{q^2} \langle [i\dot{\rho}_q, \rho_{-q}] \rangle = \frac{q_\alpha}{m}, \\ \langle [\theta_q, J_{-q}^\alpha] \rangle &= \langle [J_q^\alpha, \theta_{-q}] \rangle = \frac{q_\alpha}{q^2} \langle [i\dot{\rho}_q, \theta_{-q}] \rangle = \frac{q_\alpha}{m} \eta_q^{\theta\dot{\rho}} = \frac{q_\alpha}{m} \eta_q^{\dot{\rho}\theta}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В последнем равенстве введено обозначение, выделяющее главную зависимость $\langle [i\dot{\rho}_q, \theta_{-q}]_- \rangle$ от q при $q \rightarrow 0$.

Запишем уравнение (3.2) в виде системы уравнений, учитывая, что вследствие неприводимости компоненты матрицы (3.3), содержащие оператор $i\dot{\rho}_q$, равны нулю, т.е. $((i\dot{\rho}_q | -i\dot{A}_q^+))_{1,E} = ((i\dot{A}_q | -i\dot{\rho}_{-q}))_{1,E} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} E((\rho_q | A_q^+))_E &= (\rho_q | A_q^+) + ((i\dot{\rho}_q | A_q^+))_E, \\ E((J_q^\alpha | A_q^+))_E &= (J_q^\alpha | A_q^+) + \frac{q_\alpha}{m} (\chi_q^\rho)^{-1} ((\rho_q | A_q^+))_E + \\ &\quad + \frac{q^2}{m} D_q^{\alpha, \bar{\alpha}}(E) ((J_q^{\bar{\alpha}} | A_q^+))_E + \\ &\quad + \frac{q_\alpha}{m} \{ \eta_q^{\dot{\rho}\theta} + \frac{q^2}{m} D_q^{\rho\theta}(E) \} (\chi_q^\theta)^{-1} ((\theta_q | A_q^+))_E, \\ E((\theta_q | A_q^+))_E &= (\theta_q | A_q^+) + \left\{ \eta_q^{\theta\dot{\rho}} + \frac{q^2}{m} D_q^{\theta\rho}(E) \right\} ((i\dot{\rho}_q | A_q^+))_E + \\ &\quad + \frac{q^2}{m} D_q^{\theta\theta}(E) ((\theta_q | A_q^+))_E, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где во втором уравнении черта над $\bar{\alpha}$ означает суммирование по x, y, z и

$$D_q^{\alpha, \beta}(E) = \frac{m}{q^2} ((iJ_q^\alpha | -iJ_{-q}^\beta))_{1,E} = \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} D_q^{\rho\rho}(E) + \left(\delta_{\alpha, \beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) D_q^\perp(E). \quad (3.9)$$

Обобщенные кинетические коэффициенты записываются в виде

$$\begin{aligned} D_q^{\rho\rho}(E) &= \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i^2\ddot{\rho}_q | i^2\ddot{\rho}_{-q}))_{1,E}, \quad D_q^{\rho\theta}(E) = \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i^2\ddot{\rho}_q | -i\dot{\theta}_{-q}))_{1,E}, \\ D_q^{\theta\rho}(E) &= \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i\dot{\theta}_q | i^2\ddot{\rho}_{-q}))_{1,E}, \quad D_q^{\theta\theta}(E) = \frac{m}{q^2} ((i\dot{\theta}_q | -i\dot{\theta}_{-q}))_{1,E} (\chi_q^\theta)^{-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

и

$$D_q^\perp(E) = \frac{1}{2\chi_q^\perp} \frac{m}{q^2} ((i\mathbf{j}_q^\perp \cdot | - i\mathbf{j}_{-q}^\perp))_{1,E}, \quad (3.11)$$

где $i^2\ddot{\rho}_q = (q, i\dot{j}_{-q}) = [[\rho_q, \mathcal{H}]_-, \mathcal{H}]_-$. Уравнения (3.8) представляют собой линеаризованные уравнения молекулярной гидродинамики [2]. Выражения для кинетических коэффициентов (3.10), (3.11) справедливы (в отличие от обычной гидродинамики) при всех значениях E и q . Они связаны с обычными кинетическими коэффициентами соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_l &= \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{mn} = \frac{i}{m} D_{q=0}^{\rho\rho} \quad (E = i\varepsilon), & \mathcal{D}^\theta &= \frac{\varkappa}{c_v} = \frac{i}{m} D_{q=0}^{\theta\theta} \quad (E = i\varepsilon), \\ \nu &= \frac{\eta}{mn} = \frac{i}{m} D_{q=0}^\perp \quad (E = i\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $n = N/V$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вычисление обобщенных кинетических коэффициентов (3.10), (3.11). Для этого воспользуемся уравнениями, полученными из цепочки (1.3), если $n = 2, 3, \dots$. При этом возможны два пути. На первом из них в качестве следующих за (3.8) звеньев можно принять уравнения для неприводимых относительно (3.1) функций, построенных на операторах $a(2) = a_q(p)$ и $a(3) = a_q(f)$ (2.2), через которые выражаются кинетические коэффициенты (3.10), (3.11). Другой путь, обладающий существенными преимуществами по сравнению с первым, основан на использовании в качестве второго звена уравнения для самих кинетических коэффициентов. В этом случае оператор $a(2)$ представляет собой столбец из операторов, т.е. $a(2) \equiv a'_q = \text{col}(iJ_q^\alpha, i\dot{h}_q)$ и

$$\begin{aligned} iJ_q^\alpha &= [J_q^\alpha, \mathcal{H}]_- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{m} a_q(p) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}V} \sum_{f=(p_1, p_2, k)} \nu_q^\alpha(f) a_q(f), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} i\dot{h}_q &= [h_q, \mathcal{H}]_- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{m} a_q(p) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}V} \sum_{f=(p_1, p_2, k)} \nu_q^h(f) a_q(f), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_q^\alpha(f) &= \frac{k_\alpha}{2m} \nu(k) + \frac{-k_\alpha + q_\alpha}{2m} \nu(-k + q), \\ \nu_q^h(f) &= \frac{1}{2} (\nu(k) + \nu(-k + q)) \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{q})}{m} + \frac{1}{2} (\nu(k) - \nu(-k + q)) \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{k})}{m} \end{aligned}$$

(см. (2.21), (2.1)).

Ортогонализуя относительно (3.1) операторы (3.13), (3.14), получим

$$A(2) \equiv A'_q = \text{col}(J_q'^\alpha, \theta'_q), \quad A^+(2') \equiv A_q'^+ = (-J_{-q}'^\beta, -\theta'_{-q}), \quad (3.15)$$

где с учетом соотношений (3.4)–(3.7)

$$\begin{aligned} J_q'^\alpha &= i j_q^\alpha - (i j_q^\alpha | A_q^+) \chi_q^{-1} A_q = i j_q^\alpha - \frac{q_\alpha}{m} (\chi_q^\rho)^{-1} \rho_q - \frac{q_\alpha}{m} \eta_q^{\rho\theta} (\chi_q^\theta)^{-1} \theta_q, \\ \theta'_q &= i \dot{\theta}_q - (i \dot{\theta}_q | A_q^+) \chi_q^{-1} A_q = i \dot{\theta}_q - \eta_q^{\theta\rho} i \dot{\rho}_q. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для матричной, неприводимой относительно A_q функции Грина $G_E(2 | 2') \equiv G'_{q,E} = ((A'_q | A_q'^+))_{1,E} = ((a'_q | a_q'^+))_{1,E}$ будем иметь следующее уравнение:

$$EG'_{q,E} = \chi'_q + \{ \eta'_q + ((i \dot{A}'_q | -i \dot{A}_q'^+))_{2,E} \} \chi_q'^{-1} G'_{q,E}, \quad (3.17)$$

где

$$\chi'_q = \text{diag} \left(\left(\frac{q}{m} \right)^2 \chi'_q(\alpha | \beta), \frac{q^2}{m} \chi_q^{\theta'} \right),$$

а

$$\chi'_q(\alpha | \beta) = \left(\frac{m}{q} \right)^2 (J_q'^\alpha | -J_{-q}'^\beta) = \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \chi_q^{\rho''} + \left(\delta_{\alpha,\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \chi_q^{\prime\perp}, \quad (3.18)$$

$$\chi_q^{\theta'} = \frac{m}{q^2} (\theta'_q | -\theta'_{-q}) = \frac{m}{q^2} \langle [i \dot{\theta}_q, \theta_{-q}]_- \rangle - \eta_q^{\theta\rho} \eta_q^{\rho\theta}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \chi_q^{\rho''} &= \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 (\rho''_q | \rho''_{-q}) = \\ &= \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 \langle [i^2 \ddot{\rho}_q, -i \dot{\rho}_{-q}]_- \rangle - (\chi_q^\rho)^{-1} - \eta_q^{\rho\theta} (\chi_q^\theta)^{-1} \eta_q^{\theta\rho}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

здесь

$$\rho''_q = (\mathbf{q}, \mathbf{J}_q'^\alpha) = i^2 \ddot{\rho}_q - \frac{q^2}{m} (\chi_q^\rho)^{-1} \rho_q - \frac{q^2}{m} \eta_q^{\rho\theta} (\chi_q^\theta)^{-1} \eta_q^{\theta\rho}.$$

Отличные от нуля компоненты матрицы $\eta'_q = \langle [A'_q, A_q'^+]_- \rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned} \langle [J_q'^\alpha, -\theta'_{-q}]_- \rangle &= \frac{q_\alpha}{m} \frac{q^2}{m} \eta_q^{\rho''\theta'}, & \langle [\theta'_q, -J_{-q}'^\beta]_- \rangle &= \frac{q_\beta}{m} \frac{q^2}{m} \eta_q^{\theta'\rho''}, \\ \eta_q^{\rho''\theta'} &= \eta_q^{\theta'\rho''} = \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 \langle [\theta'_q, \rho''_{-q}]_- \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Матричная функция $((i \dot{A}'_q | -i \dot{A}_q'^+))_{2,E} = ((i \dot{a}_q | -i \dot{a}_q'^+))_{2,E}$ неприводима относительно операторов $A(1) = A_q$ и $A(2) = A'_q$.

Выбрав систему координат с осью z , направленной вдоль вектора $\mathbf{q}$, запишем матричное уравнение (3.17) в виде системы уравнений. Для поперечных компонент потока имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ E - \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i^2 \ddot{J}_q^x | i^2 \ddot{J}_{-q}^x))_{2,E} (\chi_q'^{\perp})^{-1} \right\} ((J_q'^x | -J_{-q}'^x))_{1,E} = \\ & = (J_q'^x | -J_{-q}'^x) = \left(\frac{q}{m} \right)^2 \chi_q'^{\perp}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

для продольных компонент –

$$\begin{aligned} & \left\{ E - \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i^3 \ddot{\rho}_q | -i^3 \ddot{\rho}_{-q}))_{2,E} (\chi_q^{\rho''})^{-1} \right\} ((\rho_q'' | A_q'^+))_{1,E} - \\ & - \frac{q^2}{m} \left\{ \eta_q^{\rho''\theta'} + \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i^3 \ddot{\rho}_q | i^2 \ddot{h}_{-q}))_{2,E} \right\} (\chi_q^{\theta'})^{-1} ((\theta_q' | A_q'^+))_{1,E} = (\rho_q'' | A_q'^+), \\ & - \left\{ \eta_q^{\theta'\rho''} + \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 ((i^2 \ddot{h}_q | -i^3 \ddot{\rho}_{-q}))_{2,E} \right\} (\chi_q^{\rho''})^{-1} ((\rho_q'' | A_q'^+))_{1,E} + \\ & + \left\{ E - \frac{m}{q^2} ((i^2 \ddot{h}_q | i^2 \ddot{h}_{-q}))_{2,E} (\chi_q^{\theta'})^{-1} \right\} ((\theta_q' | A_q'^+))_{1,E} = (\theta_q' | A_q'^+), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $A_q'^+ = \rho_{-q}'', \theta_{-q}'$ (см. (3.15)).

Выражения для операторов

$$i^2 \ddot{J}_q^\alpha = [i \dot{J}_q^\alpha, \mathcal{H}]_- \quad (i^3 \ddot{\rho}_q = q_{\bar{\alpha}} \epsilon^2 \ddot{J}_q^{\bar{\alpha}}) \quad \text{и} \quad i^2 \ddot{h}_q = [i \dot{h}_q, \mathcal{H}]_-,$$

получаемые из (3.13), (3.14) с помощью уравнения движения (2.1), имеют (в отличие от (3.13), (3.14)) в правых частях в первых членах дополнительный множитель $(\mathbf{p}, \mathbf{q})/m$, а функции $\nu_q^\alpha(f)$ и $\nu_q^h(f)$ заменяются соответственно на

$$\begin{aligned} \nu_q^\alpha(f) = & \nu(k) \left(\frac{p_{1,\alpha}}{m} \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{m} + \frac{k_\alpha}{m} \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{q})}{m} \right) + \\ & + \left(\nu(k) \frac{k_\alpha}{m} + \nu(-k+q) \frac{-k_\alpha + q_\alpha}{m} \right) \frac{(\mathbf{p}_1, -\mathbf{k} + \mathbf{q})}{m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \nu_q^h(f) = & \nu(k) \left\{ \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{k})}{m} \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{q})}{m} + \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{k^2 - q^2}{8m} \right) \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{m} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\nu(k) - \nu(-k+q)}{2} \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{k})}{m} + \frac{\nu(k) + \nu(-k+q)}{2} \frac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{q})}{m} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{(\mathbf{p}_1, -\mathbf{k} + \mathbf{q})}{m} + \frac{(\mathbf{p}_2, \mathbf{k})}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, в оператор $i^2\ddot{h}_q$ войдет член с $a_q(g)$ (см. (2.2)), вклад которого, однако, не существует в гидродинамическом пределе. Таким образом, как и на упомянутом выше первом пути, мы снова приходим к необходимости вычисления функций Грина, построенных на операторах $a_q(p)$ и $a_q(f)$, но уже входящих не в сами коэффициенты переноса (3.10), (3.11), а в коэффициенты уравнений для них (см. (3.22), (3.23)). Преимущество второго пути состоит в том, что операторы $i^2\ddot{J}_q^x$, $i^3\ddot{\rho}_q$, $i^2\ddot{h}_q$ в отличие от операторов $i\dot{J}_q^x$, $i^2\ddot{\rho}_q$, $i\dot{h}_q$ уже не являются производными квазиинтегралов движения. Поэтому при $q \rightarrow 0$ вклад в коэффициенты уравнений (3.22), (3.23) функций, описывающих свободное движение, выпадает. При непосредственном вычислении надо было бы учитывать оба члена в правых частях уравнений (3.13), (3.14), имеющих различную операторную структуру, т.к. они одинаково зависят от импульса q при $q \rightarrow 0$. Это обстоятельство привело бы к существенному усложнению вычислений.

Подставляя в первое уравнение системы (3.23) $A_q'^+ = \rho_q''$, а во второе $-A_q'^+ = -\theta_q'$, убеждаемся (учитывая различную четность операторов $i^3\ddot{\rho}_q$ и $i^2\ddot{h}_q$), что при $q \rightarrow 0$ в этих уравнениях (в левой их части) можно пренебречь соответственно вторым и первым членами. В результате получим (см. (3.10), (3.11))

$$\begin{aligned} D_q^{\rho\rho}(E) &= \left(\frac{m}{q^2}\right)^2 ((i^2\ddot{\rho}_q | i^2\ddot{\rho}_{-q}))_{1,E} \approx \\ &\approx \frac{\chi_q^{\rho''}}{E - \left(\frac{m}{q^2}\right)^2 ((i^3\ddot{\rho}_q | -i^3\ddot{\rho}_{-q}))_{2,E} (\chi_q^{\rho''})^{-1}} \approx -i\chi^{\rho''}\tau, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} D_q^{\theta\theta}(E) &= \frac{m}{q^2} ((i\dot{h}_q | -i\dot{h}_{-q}))_{1,E} (\chi_q^\theta)^{-1} \approx \\ &\approx \frac{\chi_q^{\theta'}/\chi_q^\theta}{E - \frac{m}{q^2} ((i^2\ddot{h}_q | i^2\ddot{h}_{-q}))_{2,E} (\chi_q^{\theta'})^{-1}} \approx -i\frac{\chi^{\theta'}}{\chi^\theta}\tau' \end{aligned} \quad (3.25)$$

и согласно (3.22)

$$\begin{aligned} D_q^\perp(E) &= \left(\frac{m}{q}\right)^2 ((J_q'^x | -J_{-q}'^x))_{1,E} (m\chi_q^\perp)^{-1} = \\ &= \frac{\chi_q^{\perp'}/m\chi_q^\perp}{E - \left(\frac{m}{q}\right)^2 ((i^2\ddot{J}_q^x | i^2\ddot{J}_{-q}^x))_{2,E} (\chi_q^{\perp'})^{-1}} \approx -i\frac{\chi^{\perp'}}{m\chi^\perp}\tau''. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Последние приближенные равенства в правых частях соотношений (3.24)–(3.26) представляют собой предельные значения при $q \rightarrow 0$, $E = i\varepsilon \rightarrow 0$ и являются, по существу, определениями времен релаксации τ , τ' и τ'' . Для “перекрестных” кинетических коэффициентов с учетом равенств (3.24), (3.25) имеем при $q \rightarrow 0$

$$D_q^{\rho\theta}(E) \cong - \left\{ \eta_q^{\rho''\theta'} + \left(\frac{m}{q^2}\right)^2 ((i^3\ddot{\rho}_q | i^2\ddot{h}_{-q}))_{2,E=i\varepsilon} \right\} \tau\tau' \quad (3.27)$$

и аналогичное выражение для $D_q^{\theta\rho}(E)$.

Времена релаксации, определяемые соотношениями (3.24)–(3.27), выражаются через неприводимую относительно A_q и A'_q функцию Грина $((a_q(f) | a_q^+(f'))_{2,E})$, т.к. вклады свободного движения по указанной выше причине в пределе $q \rightarrow 0$, $E \rightarrow 0$ выпадают. Так, например, для величины $1/\tau''$, исходя из соотношения (3.26), будем иметь (полагаем $\nu(k) \cong U$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau''} &= i \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\chi_q^+} \frac{m}{q^2} ((i^2 \ddot{J}_q^x | i^2 \ddot{J}_{-q}^x))_{2,E} = \\ &= i \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\chi_q^+} \frac{U^2}{NV^2} \sum_{f,f'} \frac{p_{1x} k_z + k_x p_{1z}}{m} \times \\ &\quad \times \frac{p'_{1x} k'_z + k'_x p'_{1,z}}{m} ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{2,E}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Входящие в коэффициенты уравнений (3.8), (3.22), (3.23) статические корреляционные функции выражаются через функции $(a_q(p) | a_q^+(p'))$, $(a_q(p) | a_q^+(f'))$, $(a_q(f) | a_q^+(f'))$ и могут быть найдены из цепочки уравнений (2.16), (2.17).

Уравнения (3.8), (3.22), (3.23), являющиеся точными, были получены в работе [3]. В работе [4] эти уравнения подробно исследованы в случае слабо неидеального газа. При этом кинетические коэффициенты (3.12), получаемые путем прямого вычисления предельных значений корреляционных функций в знаменателях выражений (3.24), (3.26) в приближении идеального газа, совпадают с результатами кинетической теории, основанной на решении уравнения Больцмана методом Чепмена–Энскога [6]. Для самих же корреляционных функций получаются выражения, пригодные как в гидродинамической области значений E и q , так и вне ее.

В статье [7] был использован близкий к работе [3] метод численного расчета временных корреляционных функций классической системы со взаимодействием Леннард-Джонса между частицами для отдельных приведенных значений волнового вектора и времени. В рамках метода Мори в работе [7] использовалась система уравнений для компонент матрицы размерности 5×5 , что эквивалентно применению базисного столбца, включающего как A_q (3.1), так и A'_q (3.15).

Последующие разделы данной работы посвящены разработке методов построения цепочки уравнений для функций возрастающей степени неприводимости, когда в качестве исходных приняты уравнения молекулярной гидродинамики (3.8), (3.22), (3.23), а также построению на основе такой цепочки функций распределения, пригодных для вычисления различных моментов, в том числе и отличных от гидродинамических. Таким путем мы достигаем полноты описания исследуемой системы, присущей кинетическому уравнению.

4. ТРЕТЬЕ И ЧЕТВЕРТОЕ УРАВНЕНИЯ ЦЕПОЧКИ

В качестве следующих за (3.2) и (3.17) звеньев цепочки примем уравнения для функций, построенных на операторах (2.2), через которые выражаются коэффициенты урав-

нений (3.22)–(3.26), определяющих кинетические коэффициенты. Только теперь это будут операторы третьего и последующих звеньев $a(3) = a_q(p)$, $a(4) = a_q(f)$, $a(5) = a_q(g), \dots$. Построенные на них функции

$$\begin{aligned} G_E(3 | 3') &= G_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{2,E}, \\ G_E(4 | 4') &= G_{q,E}(f | f') = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{3,E} \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

будут неприводимы относительно операторов A_q (3.1) и A'_q (3.15), ...

Уравнения для этих функций внешне схожи с уравнениями (2.10), (2.11) для функций

$$\tilde{G}_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_E, \quad \tilde{G}_{q,E}(f | f') = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{\tilde{1},E}, \quad \dots$$

Последние функции, чтобы отличить их от функций (4.1), будем помечать тильдой (индекс $\tilde{1}$ означает в этом случае неприводимость относительно оператора $a_q(p)$). Уравнения для функций (4.1) обладают существенными дополнительными свойствами, обусловленными неприводимостью.

Уравнение для функции $G_{q,E}(p | p')$. В соответствии с принятой схемой вычислений ортогонализуем оператор $a(3) = a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$ относительно столбцов A_q (3.1) и A'_q (3.15), положив

$$\begin{aligned} A(3) &\equiv A_q(p) = a_q(p) - (a_q(p) | A_q^+) \chi_q^{-1} A_q - (a_q(p) | A_q'^+) \chi_q'^{-1} A_q' = \\ &= a_q(p) - (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q - (a_q(p) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}_q' = \\ &= \delta_q(p, \bar{p}) \tilde{A}_q(\bar{p}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$A^+(3') \equiv A_q^+(p') = \tilde{A}_q^+(\bar{p}) \bar{\delta}_q(\bar{p}, p'), \quad (4.3)$$

где

$$\tilde{\chi}_q = (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+), \quad \tilde{\chi}_q' = (\tilde{A}_q' | \tilde{A}_q'^+), \quad \tilde{A}_q(p) = a_q(p) - (a_q(p) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}_q'$$

и

$$\begin{aligned} \delta_q(p, p') &= \delta_{p,p'} - (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | p'), \\ \bar{\delta}_q(p, p') &= \delta_{p,p'} - \tilde{\chi}_q^{-1} (p | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} (\tilde{A}_q | a_q^+(p')), \end{aligned} \quad (4.4)$$

а

$$\tilde{\chi}_q(p | p') = (a_q(p) | a_q^+(p')) \quad (\text{см. } \chi_q(p | p') \text{ (2.9)})$$

и

$$(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q') = (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q'^+) = 0.$$

Во втором равенстве формулы (4.2) произведено перераспределение операторов между A_q и A'_q . В столбце $\tilde{A}_q = \text{col}(\rho_q, J_q^\alpha)$ оставлены операторы, выражающиеся только через оператор $a_q(p)$ (см. (2.21)), а оператор θ_q перенесен из столбца A_q в столбец

$\tilde{A}' = \text{col}(\theta_q, J_q'^\alpha, \theta_q')$. При этом $\tilde{\chi}_q$ и $\tilde{\chi}_q'$ остались диагональными матрицами с компонентами из χ_q и χ_q' .

Оператор $A_q(p)$ (4.2) обладает очевидными свойствами: $(A_q(p) | A_q^+) = (A_q(p) | A_q'^+) = 0$. С учетом соотношений (2.21) также имеем

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p A_q(p) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} A_q(p) = 0$$

или $(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_q(\bar{p}) = 0,$ (4.5)

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p^2}{2m} A_q(p) = -h_q^{\text{int}} + (h_q^{\text{int}} | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q + (h_q^{\text{int}} | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}_q'. \quad (4.6)$$

Для выражений

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{m} A_q(p), \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{m} A_q(p)$$

будем иметь равенства, аналогичные соотношению (4.6) с заменой h_q^{int} соответственно на $(i\dot{J}_q^\alpha)^{\text{int}}$ и $(i\dot{h}_q)^{\text{int}}$, равных последним членам в правых частях равенств (3.13) и (3.14).

Аналогичными свойствами обладают функции

$$G_{q,E}(p | p') = ((A_q(p) | A_q^+(p'))_{2,E} = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{2,E},$$

$$\chi_q(p | p') = (A_q(p) | A_q^+(p')) = \lim_{E \rightarrow \infty} EG_{q,E}(p | p').$$

Существенное отличие цепочки уравнений для молекулярной гидродинамики от цепочки для кинетического уравнения, рассмотренной во втором разделе, состоит в том, что вследствие условий (4.5) обратные матрицы $\chi_q^{-1}(p | p')$ и $G_{q,E}^{-1}(p | p')$, существование которых является необходимым условием для построения уравнений в рамках предлагаемой методики, в обычном смысле не существуют. Действительно, если бы имело место равенство $\chi_q(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \delta_{p,p'_1}$, то, умножив его сначала на 1, а потом на p_α/m и суммируя, мы получили бы в соответствии с соотношением (4.5) слева нуль, а справа величину, отличную от нуля. Однако для соблюдения необходимых условий построения уравнений (см. (I.3.11)–(I.3.14)) нам достаточно, чтобы они выполнялись в пространстве, ортогональном всем предыдущим операторам. Поэтому можно определить обратную матрицу $\chi_q^{-1}(p | p')$ с помощью соотношений

$$\chi_q(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \delta_q(p, p'), \quad \chi_q^{-1}(p | \bar{p}) \chi_q(\bar{p} | p') = \bar{\delta}_q(p, p'). \quad (4.7)$$

В пространстве, ортогональном A_q и A_q' , символы $\delta_q(p | p')$ и $\bar{\delta}_q(p | p')$ (4.4) действуют как обычные символы Кронекера, т.е.

$$\delta_q(p, \bar{p}) \delta_q(\bar{p}, p') = \delta_{p,\bar{p}} \delta_q(\bar{p}, p') = \delta_q(p, p'), \quad \bar{\delta}_q(p, \bar{p}) \bar{\delta}_q(\bar{p}, p') = \bar{\delta}_q(p, p'),$$

$$\delta_q(p, \bar{p}) A_q(\bar{p}) = \delta_{p,\bar{p}} A_q(\bar{p}) = A_q(p), \quad A_q^+(\bar{p}) \bar{\delta}_q(\bar{p}, p') = A_q^+(\bar{p}) \delta_{\bar{p},p'} = A_q^+(p'), \quad (4.8)$$

т.к.

$$(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \delta_q(\bar{p} | p') = 0, \quad (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_q(\bar{p}) = 0$$

(см. (4.5)). Соотношения, аналогичные равенствам (4.7), будут также иметь место для функций $G_{q,E}(p | p')$ и $G_{q,E}^{-1}(p | p')$.

В соответствии с равенствами (4.2), (4.3) получаем

$$\chi_q(p | p') = (A_q(p) | A_q^+(p')) = \delta_q(p, \bar{p}) \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_q(p | \bar{p}) \bar{\delta}_q(\bar{p}, p'), \quad (4.9)$$

где

$$\tilde{\chi}_q(p | p') = (\tilde{A}_q(p) | \tilde{A}_q^+(p')) = \tilde{\chi}_q(p | p') - (a_q(p) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1}(\tilde{A}_q' | a_q^+(p')). \quad (4.10)$$

При условии, что матрица $\tilde{\chi}_q(p | p') = (a_q(p) | a_q^+(p'))$ имеет обратную, т.е. $\tilde{\chi}_q(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') = \delta_{p,p'}$, обратная матрица $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_q^{-1}(p | p') &= \tilde{\chi}_q^{-1}(p | p') + \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q'^+) \times \\ &\times (\tilde{\chi}_q'^{\text{int}})^{-1}(\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p'), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\tilde{\chi}_q'^{\text{int}} = \tilde{\chi}_q' - (\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q'^+) = (\tilde{A}_q'^{\text{int}} | (\tilde{A}_q'^{\text{int}})^+), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_q'^{\text{int}} &= \tilde{A}_q' - (\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) = \\ &= (\tilde{A}_q')^{\text{int}} - ((\tilde{A}_q')^{\text{int}} | a_q(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) \end{aligned} \quad (4.12')$$

и $(\tilde{A}_q')^{\text{int}}$ — зависящая от взаимодействия часть операторов, входящих в $\tilde{A}_q'$.

Используя соотношения (4.10)–(4.12), легко убедиться, что

$$\tilde{\chi}_q(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') = \delta_{p,p'} \quad (4.13)$$

и, следовательно, обратная матрица, удовлетворяющая соотношениям (4.7), имеет вид

$$\chi_q^{-1}(p | p') = \bar{\delta}_q(p, \bar{p}) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \delta_q(\bar{p}, p'). \quad (4.14)$$

Умножая первое из соотношений (4.7) на 1 и p_α/m , а второе — на 1 и p'_α/m и суммируя их соответственно по p и p' , получим в согласии с равенствами (4.5) нули как в левой, так и в правой частях соотношений.

Выполнение всех необходимых условий позволяет сразу же написать уравнение для неприводимой функции $G_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{2,E}$ в стандартной форме

$$\begin{aligned} EG_{q,E}(p | p') &- \left\{ \langle [A_q(p), A_q^+(\bar{p}')]_- \rangle + ((i\dot{A}_q(p) | -i\dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{3,E} \right\} \times \\ &\times \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p') = \chi_q(p | p'). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Воспользовавшись соотношениями (4.9) и (4.2), (4.3), (4.8), из которых следует, что $G_{q,E}(p | p') = \delta_q(p | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p')$, перепишем уравнение (4.15) в виде

$$\delta_q(p, \bar{p}) \left\{ EG_{q,E}(\bar{p} | p') - \left(\langle [\tilde{A}_q(\bar{p}), \tilde{A}_q^+(\bar{p}')]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_q(\bar{p}) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(\bar{p}'))_{3,E} \right) \times \right. \\ \left. \times \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p') - \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') \right\} = 0, \quad (4.16)$$

где мы воспользовались тем, что (см. (4.8), (4.14))

$$\bar{\delta}_q(p, \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p') = \bar{\delta}_q(p, \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p') = \\ = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p})\delta_q(\bar{p}, \bar{p}')G_{q,E}(\bar{p}' | p') = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p').$$

Поскольку $\delta_q(p | \bar{p})(a_q(p) | \tilde{A}_q^+) = 0$, то уравнение (4.16) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$EG_{q,E}(p | p') - \left\{ \langle [\tilde{A}_q(p), \tilde{A}_q^+(\bar{p}')]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_q(p) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(\bar{p}'))_{3,E} \right\} \times \\ \times \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_q(p | p') + (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \cdot F_{q,E}(p'), \quad (4.17)$$

где $F_{q,E}(p')$ — двухкомпонентный столбец, определяемый из условий, следующих из равенств (4.5):

$$(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p})G_{q,E}(\bar{p} | p') = 0. \quad (4.18)$$

Уравнение движения для оператора $\tilde{A}_q(p)$ (см. (4.2)) имеет вид

$$i\dot{\tilde{A}}_q(p) = ia_q(p) - (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} i\dot{\tilde{A}}_q' = i\dot{a}_q(p) - (a_q(p) | \theta_{-q})(\chi_q^\theta)^{-1} i\dot{\theta}_q - \\ - (a_q(p) | -J_{-q}^{\bar{\beta}}) \left(\frac{m}{q} \right)^2 \chi_q'^{-1} (\bar{\beta} | \bar{\alpha}) iJ_q'^{\bar{\alpha}} - \\ - (a_q(p) | -\theta_{-q}') \frac{m}{q^2} (\chi_q^{\theta'})^{-1} i\dot{\theta}_q'. \quad (4.19)$$

В функцию $\langle [\tilde{A}_q(p), \tilde{A}_q^+(p')]_- \rangle = (i\dot{\tilde{A}}_q(p) | \tilde{A}_q^+(p'))$ войдут все операторы из правой части уравнения (4.19). В “массовый оператор” $((i\dot{\tilde{A}}_q(p) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(p'))_{3,E})$, неприводимый относительно столбцов A_q , A_q' и $A_q(p)$, войдут только те части операторов, которые зависят от взаимодействия и выражаются через операторы $a_q(f)$ и $a_q(g)$.

В отличие от уравнения (2.10), гидродинамические моды из уравнения (4.17) исключены.

Уравнение для функции $G_{q,E}(f | f')$ (см. (4.1)). В этом случае

$$a(4) = a_q(f) = a_{p_1 + \frac{k-q}{2}}^+ a_{p_2 - \frac{k}{2}}^+ a_{p_2 + \frac{k}{2}} a_{p_1 - \frac{k-q}{2}}$$

($a(2)$ в (2.2)). В результате ортогонализации оператора $a_q(f)$ будем иметь

$$A_q(f) = a_q(f) - (a_q(f) | A_q^+) \chi_q^{-1} A_q - (a_q(f) | A_q'^+) \chi_q'^{-1} A_q' - \\ - (a_q(f) | A_q^+(\bar{p}')) \chi_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) A_q(\bar{p}). \quad (4.20)$$

Подставляя в правую часть формулы (4.20) выражение для $\chi_q^{-1}(p | p')$ (4.14) и используя соотношения (4.2), (4.8), (4.11), (4.12), представим оператор $A_q(f)$ в виде

$$A_q(f) = \tilde{A}_q(f) - (a_q(f) | (\tilde{A}_q'^{\text{int}})^+) (\tilde{\chi}_q'^{\text{int}})^{-1} \tilde{A}_q'^{\text{int}}, \quad (4.21)$$

где

$$\tilde{A}_q(f) = a_q(f) - (a_q(f) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) \quad (4.22)$$

и $\tilde{\chi}_q(p | p') = (a_q(p) | a_q^+(p'))$. В трехкомпонентном столбце $\tilde{A}_q'^{\text{int}}$ (4.12') ортогональность компонент, присущая столбцу $\tilde{A}_q' = \text{col}(\theta_q, J_q^\alpha, \theta_q')$, нарушена. Ее можно легко восстановить, преобразовав $\tilde{A}_q'^{\text{int}}$ в столбец $\tilde{\tilde{A}}_q'$ с ортогональными компонентами, что сведется к замене второй компоненты $J_q'^{\alpha \text{ int}}$ столбца $\tilde{A}_q'^{\text{int}}$ (4.12') на

$$\tilde{\tilde{J}}_q^\alpha = J_q'^{\alpha \text{ int}} - (J_q'^{\alpha \text{ int}} | \theta_q^{\text{int}}) (\chi_q^{\text{int}})^{-1} \theta_q^{\text{int}},$$

где

$$\theta_q^{\text{int}} = \theta_q - (\theta_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) = h_q^{\text{int}} - (h_q^{\text{int}} | a_q(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}).$$

При этом вместо $\tilde{\chi}_q'^{\text{int}}$ (4.12) получим диагональную матрицу $\tilde{\tilde{\chi}}_q = (\tilde{\tilde{A}}_q | \tilde{\tilde{A}}_q^+)$ и в (4.21) будем иметь

$$(\tilde{A}_q'^{\text{int}})^+ (\tilde{\chi}_q'^{\text{int}})^{-1} \tilde{A}_q'^{\text{int}} = \tilde{\tilde{A}}_q^+ \tilde{\tilde{\chi}}_q^{-1} \tilde{\tilde{A}}_q. \quad (4.23)$$

Аналогично формулам (4.2), (4.3) запишем $A_q(f)$ (4.21) и $A_q^+(f')$ в виде

$$A_q(f) = \delta_q(f, \bar{f}) \tilde{A}_q(\bar{f}), \quad A_q^+(f) = \tilde{A}_q^+(\bar{f}) \bar{\delta}_q(\bar{f}, f), \quad (4.24)$$

где с учетом равенства (4.23) имеем

$$\delta_q(f, f') = \delta_{q;f,f'} - (a_q(f) | \tilde{\tilde{A}}_q^+) \tilde{\tilde{\chi}}_q^{-1} (\tilde{\tilde{A}}_q | \tilde{A}_q^+(\bar{f}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{f}' | f'), \\ \bar{\delta}_q(f, f') = \delta_{q;f,f'} - \tilde{\chi}_q^{-1} (f | \bar{f}) (\tilde{A}_q(\bar{f}) | \tilde{\tilde{A}}_q^+) \tilde{\tilde{\chi}}_q^{-1} (\tilde{\tilde{A}}_q | a_q^+(f')) \quad (4.25)$$

и

$$\tilde{\chi}_q(f | f') = (\tilde{A}_q(f) | \tilde{A}_q^+(f')) = (a_q(f) | a_q^+(f')) - \\ - (a_q(f) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | a_q^+(f')), \quad (4.26)$$

$\delta_{q;f,f'}$ – комбинация символов Кронекера (2.7) и обратная матрица $\chi_q^{-1}(f | f')$ определяется соотношениями

$$\tilde{\chi}_q(f | \bar{f}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | f') = \tilde{\chi}_q^{-1}(f | \bar{f}) \tilde{\chi}_q(\bar{f} | f') = \delta_{q;f,f'}. \quad (4.27)$$

Оператор $A_q(f)$ (4.21), (4.24) обладает очевидным свойством (см. соотношения (2.21), (3.13), (3.14))

$$\frac{1}{2\sqrt{N}V} \sum_f \nu(k) A_q(f) = \frac{1}{\sqrt{N}V} \sum_f \nu_q^\alpha(f) A_q(f) = \frac{1}{\sqrt{N}V} \sum_f \nu_q^h(f) A_q(f) = 0 \quad (4.28)$$

или $(\tilde{A}_q'^{\text{int}} | \tilde{A}_q^+(\bar{f}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f}) A_q(\bar{f}) = 0$. С учетом соотношений (4.23), (4.21) имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+(\bar{f}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f}) A_q(\bar{f}) &= \tilde{A}_q - (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q'^{\text{int}}) (\tilde{\chi}_q'^{\text{int}})^{-1} A_q'^{\text{int}} = \\ &= \tilde{A}_q - (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q = 0. \end{aligned} \quad (4.28')$$

Последнее равенство аналогично свойству (4.5) оператора $A_q(p)$. Как и в случае с матрицей $\chi_q(p | p')$ (4.9), (4.14), находим

$$\begin{aligned} \chi_q(f | f') &= \delta_q(f, \bar{f}) \tilde{\chi}_q(\bar{f} | f') = \tilde{\chi}_q(f | \bar{f}) \bar{\delta}_q(\bar{f}, f') = \\ &= \tilde{\chi}_q(f | f') - (\tilde{A}_q(f) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1}(\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+(f')), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\chi_q^{-1}(f | f') = \bar{\delta}_q(f, \bar{f}) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f} | f') = \tilde{\chi}_q^{-1}(f | \bar{f}) \bar{\delta}_q(\bar{f}, f'), \quad (4.30)$$

$$\chi_q(f | \bar{f}') \chi_q^{-1}(\bar{f}' | f') = \delta_q(f, f'), \quad \chi_q^{-1}(f | \bar{f}) \chi_q(\bar{f} | f') = \bar{\delta}_q(f, f') \quad (4.31)$$

при условии выполнения соотношения (4.27). Действуя на обе части, например, первого из соотношений (4.31) оператором $(\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+(\bar{f}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | f)$ (см. (4.28')), получаем с учетом равенств (4.28), (4.25) нуль в обеих частях равенства. В пространстве, ортогональном A_q , A_q' и $A_q(p)$, матрицы $\delta_q(f | f')$ и $\bar{\delta}_q(f | f')$ эквивалентны $\delta_{q;f,f'}$ и все необходимые свойства (I.3.11)–(I.3.14) выполняются. Поэтому по аналогии с уравнением (4.17) можно сразу написать для функции $G_{q,E}(f | f') = ((A_q(f) | A_q^+(f'))_{3,E} = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{3,E}$ уравнение

$$\begin{aligned} EG_{q,E}(f | f') &- \left\{ \langle [\tilde{A}_q(f), \tilde{A}_q^+(\bar{f}')]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_q(f) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(\bar{f}'))_{4,E} \right\} \times \\ &\times \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f}) G_{q,E}(\bar{f} | f') = \\ &= \tilde{\chi}_q(f | f') + (a_q(f) | \tilde{A}_q^+) \cdot F_{q,E}(f'), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где трехкомпонентный столбец $F_{q,E}(f')$ определяется из условия

$$(\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+(\bar{f}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f}) G_{q,E}(\bar{f} | f') = 0, \quad (4.33)$$

вытекающего из соотношений (4.5) или из неприводимости функции $G_{q,E}(f | f')$.

В уравнении (4.32) величины $\tilde{A}_q(f)$ (4.22) и $\tilde{\chi}_q(f | f')$ те же, что и $A_q(f)$ (2.8) и $\chi_q(f | f')$ (2.9) во втором разделе, а “массовый оператор” имеет вид

$$((i\dot{\tilde{A}}_q(f) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(f'))_{4,E} = \nu(f | \bar{g})G_{q,E}(\bar{g} | \bar{g}')\bar{\nu}(\bar{g}' | f'), \quad (4.34)$$

где

$$G_{q,E}(g | g') = ((a_q(g) | a_q^+(g'))_{4,E} = ((a_q(g) | a_q^+(g'))_{\tilde{2},E}. \quad (4.35)$$

Индекс $\tilde{2}$ в последнем из равенств (4.35) означает неприводимость функции относительно $a_q(p)$ и $a_q(f)$. Равенство (4.35) достаточно очевидно, т.к. при этом обеспечивается неприводимость относительно A_q , A'_q , $A_q(p)$ и $A_q(f)$. Его можно получить также с помощью непосредственных вычислений. Таким образом, уравнение (4.32) отличается от (2.11) только членом с $F_{q,E}(f')$. Уравнения для $G_{q,E}(g | g')$ и последующих функций будут те же, что и в цепочке, рассмотренной во втором разделе.

Отмечая тильдой решение уравнения (2.11) $\tilde{G}_{q,E}(f | f') = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{\tilde{1},E}$, где индекс $\tilde{1}$ означает неприводимость относительно $a_q(p)$, запишем уравнение (4.32) в виде

$$\tilde{\chi}_q(f | \bar{f}')\tilde{G}_{q,E}^{-1}(\bar{f}' | \bar{f})G_{q,E}(\bar{f} | f') = \tilde{\chi}_q(f | f') + (a_q(f) | \tilde{A}_q^+) \cdot F_{q,E}(f'), \quad (4.36)$$

из которого с учетом условия (4.33) получаем

$$\begin{aligned} G_{q,E}(f | f') &= \tilde{G}_{q,E}(f | f') - \tilde{G}_{q,E}(f | \bar{f}')\tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f})(a_q(\bar{f}) | \tilde{A}_q^+) \times \\ &\times \tilde{G}_{q,E}^{-1}(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{f}'))\tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f})\tilde{G}_{q,E}(\bar{f} | f') = \\ &= \tilde{G}_{q,E}(f | f') - ((a_q(f) | \tilde{A}_q^+)_{\tilde{1},E}\tilde{G}_{q,E}^{-1}((\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{f}'))_{\tilde{1},E}), \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $\tilde{G}_{q,E} = ((\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+)_{\tilde{1},E}$. При $E \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{E \rightarrow \infty} EG_{q,E}(f | f') = \chi_q(f | f')$$

(см. (4.29)). Функция $G_{q,E}(f | f') = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{3,E}$ (4.37) войдет в кинетические коэффициенты (3.24)–(3.28). Однако прежде необходимо понизить степень ее неприводимости.

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРИВОДИМЫХ ФУНКЦИЙ

Построенная в предыдущих разделах цепочка уравнений (3.2), (3.17), (4.17), (4.32) определяет неприводимые, диагональные относительно соответствующих операторов функции Грина $G_{q,E}$, $G'_{q,E}$, $G_{q,E}(p | p')$, $G_{q,E}(f | f')$, Считая эти функции известными, с помощью формулы (1.7) (см. также (I.3.33)), (I.3.34)) мы можем выразить через них любую интересующую нас функцию с пониженной или снятой неприводимостью, диагональную или недиагональную. В качестве примера построим функции

$((A_q(p) | a_q^+(f'))_{2,E}, ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{2,E}$, через которые выражаются кинетические коэффициенты (3.24)–(3.28), и функцию $((a_q(p) | a_q^+(p'))_E$, пропорциональную вариации вигнеровской функции распределения.

Полагая в (1.7) $n = 3$ и $B^+ = a_q^+(f')$, будем иметь

$$\begin{aligned} & ((A_q(p) | a_q^+(f'))_{2,E} = \\ & = G_{q,E}(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \left\{ (A_q(\bar{p}) | a_q^+(f')) + ((i\dot{A}_q(\bar{p}) | a_q^+(f'))_{3,E} \right\} = \\ & = G_{q,E}(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \left\{ (A_q(\bar{p}) | a_q^+(f')) + U_q(\bar{p} | \bar{f}) G_{q,E}(\bar{f} | f') \right\}, \quad (5.1) \end{aligned}$$

где $U_q(p | f) = (i\dot{A}_q(p) | A_q^+(\bar{f}')) \chi_q^{-1}(\bar{f}' | f)$. Учитывая определение неприводимых функций (1.5), (1.3.23), формулу (5.1) и ей сопряженную, получим

$$\begin{aligned} & ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{2,E} = G_{q,E}(f | f') + \\ & + \left\{ (a_q(f) | A_q^+(\bar{p}')) + G_{q,E}(\bar{f} | \bar{f}') \overline{U}_q(\bar{f}' | \bar{p}') \right\} \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \times \\ & \times G_{q,E}(\bar{p} | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \left\{ (A_q(\bar{p}) | a_q^+(f')) + U_q(\bar{p} | \bar{f}) G_{q,E}(\bar{f} | f') \right\}. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Аналогично находим функцию распределения

$$\begin{aligned} & ((a_q(p) | a_q^+(p'))_E = G_{q,E}(p | p') + \left\{ (a_q(p) | A_q'^+) + G_{q,E}(p | \bar{p}') \overline{U}_{q,E}(\bar{p}') \right\} \times \\ & \times \chi_q'^{-1} G'_{q,E} \chi_q'^{-1} \left\{ (A_q' | a_q^+(p')) + U_{q,E}(\bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p') \right\} + \\ & + \left\{ (a_q(p) | A_q^+) + \left((a_q(p) | A_q'^+) + G_{q,E}(p | \bar{p}') \overline{U}_{q,E}(\bar{p}') \right) \chi_q'^{-1} G'_{q,E} \overline{U}_q \right\} \chi_q^{-1} G_{q,E} \times \\ & \times \chi_q^{-1} \left\{ (A_q | a_q^+(p')) + U_q G'_{q,E} \chi_q'^{-1} \left((A_q' | a_q^+(p')) + U_{q,E}(\bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p') \right) \right\}, \quad (5.3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_{q,E}(p) & = U_q(p) + \left\{ U_q(f) + U_q(\bar{g}) G_{q,E}(\bar{g} | \bar{g}') \overline{U}_q(\bar{g}' | \bar{f}') \chi_q^{-1}(\bar{f}' | \bar{f}) \right\} \times \\ & \times G_{q,E}(\bar{f} | \bar{f}') \overline{U}_q(\bar{f}' | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | p'), \quad (5.4) \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} U_q & = (i\dot{A}_q | A_q'^+) \chi_q'^{-1}, \\ U_q(n) & = (i\dot{A}_q | A^+(\bar{n}')) \chi_q^{-1}(\bar{n}' | n) \quad (n = 3, 4, 5), \\ U(n | n+1) & = (i\dot{A}(n) | A^+(\overline{n+1})) \chi^{-1}(\overline{n+1} | n+1) \quad (n = 3, 4). \end{aligned}$$

Используя соотношения (5.3), (4.5), (4.18), легко убедиться, что

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \times \\ & \times ((a_q(p) | a_q^+(\bar{p}'))_E \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) = ((\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+))_E, \quad (5.5) \end{aligned}$$

где матрица $((\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+))_E$ составлена из функций Грина, построенных на операторах ρ_q и J_q^α , являющихся решением уравнений молекулярной гидродинамики (3.8). Снизив двукратно степень неприводимости функции (5.2), мы можем убедиться в подобной согласованности и относительно решений уравнений (3.8) для функций Грина с оператором плотности энергии h_q .

Подставляя функцию (5.2) в выражения для кинетических коэффициентов, мы придем к тому, что все интересующие нас величины будут выражены через неприводимые диагональные функции $G_{q,E}$, $G'_{q,E}$, $G_{q,E}(p | p')$, $G_{q,E}(f | f')$, ..., удовлетворяющие бесконечной цепочке уравнений. Эта цепочка отличается от цепочки, рассмотренной во втором разделе, тем, что в уравнениях для функций $G_{q,E}(p | p')$ и $G_{q,E}(f | f')$ уже не содержатся уравнения гидродинамики, учтенные в (3.2), (3.17) – первых двух звеньях цепочки. Поэтому для решения уравнений, которым удовлетворяют эти функции, мы можем воспользоваться методом итераций, пренебрегая в нулевом приближении членами с коэффициентами, выражающимися через функции Грина более высокого порядка, которые к тому же по сравнению с остальными членами явно пропорциональны второй степени взаимодействия (см. (4.17), (4.32)). При этом цепочка уравнений распадается на отдельные, не связанные друг с другом уравнения. Для функции $G_{q,E}(f | f')$, через которую с учетом (5.2) выражаются кинетические коэффициенты, таким нулевым приближением будет функция, получаемая из (4.37) заменой функций $\tilde{G}_{q,E}(f | f')$ и $\tilde{\chi}_q(f | f')$ на функции $G_{q,E}^{(0)}(f | f')$ и $\chi_q^{(0)}(f | f')$, определяемые уравнениями (2.22), (2.23), (2.26)–(2.28). Функция $G_{q,E}^{(0)}(f | f')$ дает основной вклад в кинетические коэффициенты, вычисляемые в рамках метода Чепмена–Энскога. Второй член в правой части (4.37), дающий дополнительный вклад, имеет вид дроби, числитель и знаменатель которой пропорциональны квадрату взаимодействия и не зависят от его интенсивности. Второй член в правой части равенства (5.2), возникший в результате понижения степени неприводимости, зависит также и от функции $G_{q,E}^{(0)}(p | p')$.

Детальный анализ полученных соотношений в случае конкретных потенциалов взаимодействия выходит за рамки этой статьи.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные формулы полностью решают (в рамках линейной теории) задачу построения функций распределения и линеаризованной молекулярной гидродинамики. Основная особенность метода, изложенного в трех последних разделах, состоит в том, что “главными уравнениями” являются уравнения молекулярной гидродинамики. Этим предлагаемый метод отличается от традиционного, когда за основу берется кинетическое уравнение (по существу, само являющееся приближенным), а уравнения гидродинамики получаются как следствие его решения.

Метод, основанный на применении молекулярной гидродинамики, обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционным методом.

1. Используя его, мы избавляемся от трудностей построения уравнений для моментов функции распределения, когда $h_q^{\text{int}} \neq 0$. При этом мы имеем уравнения для плотнос-

тей сохраняющихся величин, пригодные не только в гидродинамической области значений E и q , но и вне ее (см. [3, 4]).

2. Согласно формуле (5.3) функция $((a_q(p) | a_q^+(p')))_E$ и другие подобные функции $((a_q(p) | a_q^+(f))_E, ((a_q(f) | a_q^+(f'))_E, \dots)$ представляются в виде функционалов неприводимых функций, в том числе и функций Грина плотностей сохраняющихся величин. В результате во временном представлении они явно выражаются в виде сумм членов, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю в соответствии с иерархией времен релаксации (кинетических, гидродинамических) и определяемых полюсами функций $G_{q,E}(f | f')$, $G_{q,E}(p | p')$, $G'_{q,E}$, $G_{q,E}$.

3. Применяемый в работе метод выходит за рамки обычной теории возмущений и является, по существу, методом последовательных приближений по степени учета высших корреляций.

Выбор в качестве третьего, четвертого и т.д. звеньев уравнений (4.17), (4.32) для функций $G_{q,E}(p | p')$, $G_{q,E}(f | f')$, $\dots$ не является единственным. Дело в том, что если в правых частях уравнений (3.13), (3.14), а также в выражениях для $i^2 \ddot{J}_q^\alpha$ и $i^2 \ddot{h}_q$ произвести суммирование по p_1 и p_2 , то они выразятся через произведения операторов $\rho_k \rho_{-k+q}$, $\rho_k J_{-k+q}^\alpha$, $J_k^\alpha J_{-k+q}^\beta$, $\rho_k h_{-k+q}$, которые сами являются квазиинтегралами движения. Приняв в качестве третьего звена цепочки уравнения для функций Грина, построенных на этих операторах, мы учтем взаимодействие гидродинамических мод.

Очевидно, что изложенный в данной работе метод может быть применен и к другим физическим системам, в которых возможно выделение “медленных” и “быстрых” переменных.

Список литературы

- [1] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 105.
- [2] J. P. Boon, S. Yip. Molecular Hydrodynamics. N. Y.: Mc Grow-Hill Inc., 1980.
- [3] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1985. Т. 63. № 3. С. 440.
- [4] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1990. Т. 85. № 1. С. 124; № 2. С. 258.
- [5] H. W. Wyld, Jr., B. D. Fried. Ann. Phys. 1963. V. 23. P. 374.
- [6] С. Чепмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.
- [7] I. M. de Schepper, E. G. D. Cohen, C. Buin et al. Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 271.

Поступила в редакцию 11.VI.1998 г.,
после доработки 2.IX.1998 г.