Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Итс, Н. А. Славнов, О методе задачи Римана для асимптотического анализа корреляционных функций квантового нелинейного уравнения Шредингера. Случай взаимодействующих фермионов, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 2, 179–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:12:56

© 1999 г.

А. Р. Итс*, Н. А. Славнов†

О МЕТОДЕ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ КВАНТОВОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА. СЛУЧАЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ¹⁾

Мы рассматриваем динамическую температурную корреляционную функцию локальных полей квантового нелинейного уравнения Шредингера с конечной константой связи. Данная корреляционная функция допускает представление в терминах детерминанта Фредгольма. Для анализа асимптотики корреляционной функции при больших временах и расстояниях используется операторнозначная задача Римана, связанная с фредгольмовым детерминантом.

Содержание

1. Введение	180
2. Основные формулы и определения	190
3. Операторнозначная задача Римана	195
4. Отрицательный химический потенциал	199
5. Положительный химический потенциал	205
6. Локализованная задача Римана	212
7. Функция параболического цилиндра с операторнозначным индексом	218
8. Переход к матричной задаче Римана	221
9. Дифференциальные уравнения	231
10. Модифицированный подход. Предварительные обсуждения	235
11. Модифицированный подход. “Сдвинутая” седловая точка	238
12. Заключение	244
Приложение 1. Детерминант Фредгольма	245
Приложение 2. Регуляризованный интегральный оператор	246

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

*Department of Mathematical Sciences IUPUI, Indiana, USA

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе продолжается изучение корреляционных функций квантового нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) вне точки свободных фермионов, которое было начато в работах [1–5].

Мы рассматриваем температурную корреляционную функцию локальных полей квантового НУШ

$$\langle \Psi(0, 0) \Psi^\dagger(x, t) \rangle_T = \frac{\text{tr}(e^{-\frac{H}{T}} \Psi(0, 0) \Psi^\dagger(x, t))}{\text{tr} e^{-\frac{H}{T}}}. \quad (1.1)$$

Здесь $\Psi(x, t)$, $\Psi^\dagger(x, t)$ ($x, t \in \mathbb{R}$) – канонические бозе-поля, удовлетворяющие стандартным одновременным коммутационным соотношениям

$$[\Psi(x, t), \Psi^\dagger(y, t)] = \delta(x - y) \quad (1.2)$$

и действующие в фоксовском пространстве

$$\Psi(x, t)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\Psi^\dagger(x, t) = 0. \quad (1.3)$$

Эволюция поля Ψ по времени t является обычной:

$$\Psi(x, t) = e^{iHt} \Psi(x, 0) e^{-iHt}. \quad (1.4)$$

Гамильтониан H данной модели, входящий в формулы (1.1) и (1.4), имеет вид

$$H = \int dx (\partial_x \Psi^\dagger(x) \partial_x \Psi(x) + c \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \Psi(x) - h \Psi^\dagger(x) \Psi(x)), \quad (1.5)$$

где $0 < c < \infty$ – константа связи и h – химический потенциал. Параметр T в (1.1) – температура.

Квантовое НУШ описывает одномерный бозе-газ с дельтообразным взаимодействием частиц. Основным термодинамическим уравнением этой модели является уравнение Янга–Янга [6] для энергии одночастичного возбуждения $\varepsilon(\lambda)$ в состоянии термодинамического равновесия

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2c}{c^2 + (\lambda - \mu)^2} \ln(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu. \quad (1.6)$$

Функция $\varepsilon(\lambda)$ ведет себя как $\lambda^2 - h$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Она положительна при $\lambda \in \mathbb{R}$, если $h < 0$, и имеет два вещественных корня $\varepsilon(\pm q) = 0$, если $h > 0$.

Следует упомянуть также интегральное уравнение для полной спектральной плотности вакансий в газе $\rho_t(\lambda)$:

$$2\pi\rho_t(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2c}{c^2 + (\lambda - \mu)^2} \vartheta(\mu) \rho_t(\mu) d\mu, \quad (1.7)$$

где

$$\vartheta(\lambda) = \left(1 + \exp \left[\frac{\varepsilon(\lambda)}{T} \right] \right)^{-1} \quad (1.8)$$

– фермиевский вес. Величина $\vartheta(\lambda)\rho_t(\lambda)$ определяет спектральную плотность частиц в газе. В силу свойств функции $\varepsilon(\lambda)$ фермиевский вес $\vartheta(\lambda)$ убывает как $\exp\{-\lambda^2/T\}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

В данной работе мы анализируем поведение корреляционной функции (1.1) на больших расстояниях и временах.

Асимптотическое вычисление корреляционных функций является одной из наиболее сложных аналитических проблем в теории точно решаемых квантовых моделей. В случае нулевой температуры лидирующий член асимптотики для корреляционных функций квантового НУШ может быть найден с помощью конформной теории поля [7]. Предел малых температур также может быть рассмотрен в рамках этого подхода, хотя, строго говоря, возрастающая температура разрушает конформные свойства модели. В настоящей работе мы развиваем метод, основанный на представлении корреляционной функции в терминах детерминанта Фредгольма и позволяющий избежать ограничений, связанных с малой температурой.

Систематическое изложение метода детерминантного представления дано в [8]. Для удобства читателей мы отметим главные особенности данной схемы, а также дадим краткий исторический обзор по поводу асимптотического анализа корреляционных функций.

Метод детерминантного представления основан на замечательном наблюдении, что корреляционные функции $(1+1)$ -мерных точно решаемых квантовых моделей могут быть представлены в терминах детерминантов Фредгольма интегральных операторов V , которые действуют в пространстве $L^2(\Sigma, d\lambda)$ и чьи ядра $V(\lambda_1, \lambda_2)$ имеют следующий специальный вид:

$$V(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sum_{j=1}^N e_j(\lambda_1)f_j(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \sum_j e_j(\lambda)f_j(\lambda) = 0, \quad (1.9)$$

где функции $e_j(\lambda)$, $f_j(\lambda)$ и ориентированный контур интегрирования Σ зависят от рассматриваемой модели. Первое представление такого типа было получено в [9] для одновременных корреляционных функций одномерных непроницаемых бозонов (в (1.5) $c = \infty$). Позднее детерминантные формулы были выведены для множества точно решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля (основные ссылки см. в книге [8]). В частности, для зависящей от времени корреляционной функции одномерных непроницаемых бозонов фредгольмов детерминант был построен в [10]. Результаты работы [9] были обобщены в работе [11] на случай взаимодействующих фермионов (проницаемых бозонов). Детерминантное представление для наиболее общего случая температурной, зависящей от времени корреляционной функции взаимодействующих фермионов (1.1) было найдено в [1].

Детерминантные формулы могут быть использованы при получении дифференциальных уравнений для квантовых корреляционных функций. Эти нелинейные уравнения оказываются *классическими* интегрируемыми системами. Более точно, не зависящие от времени и температуры двухточечные корреляционные функции описываются обычными интегрируемыми дифференциальными уравнениями типа уравнений Пенлеве (см. [12–16]), в то время как температурные, разновременные и многоточечные корреляционные функции оказываются τ -функциями интегрируемых уравнений в частных производных (см. [15, 17–20]). Интересно отметить (см. [21, 22] и раздел 9 настоящей статьи), что если квантовая система является результатом квантования классической интегрируемой системы, как в случае НУШ, то интегрируемые уравнения в частных производных, описывающие корреляционную функцию, принадлежат лежащей в основе классической интегрируемой иерархии.

Детерминантные представления для корреляционных функций также могут быть использованы для изучения их асимптотик. В случае нулевой температуры подробный асимптотический анализ корреляционных функций моделей XXO и непроницаемого бозе-газа был проведен в [16, 17, 23–25]. Для двумерной модели Изинга аналогичные результаты были получены ранее в работе [14] (см. также [26, 27]).

Дальнейшее развитие метода детерминантного представления было достигнуто в ряде работ [18, 28] (см. также [8]). Подход, развитый в [18, 28], основан на применении метода задачи Римана из теории *классических* интегрируемых систем для вычисления асимптотики фредгольмовых детерминантов, описывающих корреляционные функции *квантовых* интегрируемых систем. Метод задачи Римана позволяет распространить упоминавшиеся выше результаты для моделей XXO и непроницаемого бозе-газа со случая нулевой температуры на общий случай конечной температуры (см. [20, 28–30]).

Асимптотическая схема задачи Римана является основным аналитическим инструментом, используемым в настоящей статье. Ниже мы опишем ее основные идеи более подробно.

Задача Римана возникает в теории корреляционных функций благодаря простому, но важному факту, состоящему в том, что ядро резольвенты, соответствующее ядру (1.9), может быть явно записано через решение матричной задачи Римана с матрицей скачка $G(\lambda)$, задаваемой формулой (см. [18, 21, 28])

$$G_{jk}(\lambda) = \delta_{jk} + 2\pi i e_j(\lambda) f_k(\lambda).$$

Точнее, пусть $\chi(\lambda)$ является некоторой $(N \times N)$ -матричнозначной функцией, которая решает следующую *задачу Римана*:

$$\chi(\lambda) \rightarrow I, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad - \text{условие нормировки}; \quad (1.10)$$

$$\chi(\lambda) - \text{аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \Sigma; \quad (1.11)$$

$$\chi_-(\lambda) = \chi_+(\lambda)G(\lambda), \quad \lambda \in \Sigma, \quad - \text{условие скачка}, \quad (1.12)$$

где $\chi_{\pm}(\lambda)$ означают $(\pm)$ -граничные значения функции $\chi(\lambda)$ на Σ , т.е.

$$\chi_{\pm}(\lambda) = \lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} \chi(\lambda'), \quad \lambda' \in (\pm)\text{-стороне контура } \Sigma.$$

Тогда ядро резольвенты $R(\lambda_1, \lambda_2)$, соответствующей ядру (1.9): $1 - R = (1 + V)^{-1}$, дается следующей явной формулой:

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sum_{j=1}^N E_j(\lambda_1) F_j(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (1.13)$$

где

$$E_j(\lambda) = \sum_{k=1}^N (\chi_+(\lambda))_{jk} e_k(\lambda), \quad F_j(\lambda) = \sum_{k=1}^N f_k(\lambda) (\chi_+^{-1}(\lambda))_{kj}.$$

Динамические переменные, т.е. расстояние x и время t , входят в матрицу скачка $G(\lambda)$ посредством преобразования

$$G(\lambda) \rightarrow e^{D(\lambda; x, t)} G(\lambda) e^{-D(\lambda; x, t)}, \quad (1.14)$$

где рациональная по λ и линейная по x, t диагональная матричная функция $D(\lambda; x, t)$ задает дисперсионный закон лежащей в основе классической модели (в том числе $D(\lambda; x, t) = \text{diag}(it\lambda^2 - ix\lambda, -it\lambda^2 + ix\lambda)$ для квантового НУШ). Можно показать (см. [8], а также [31]), что логарифмические производные $\det(1 + V)$ по x и t (а в действительности по любому другому физическому параметру) могут быть явно выражены в терминах резольвенты R . Следовательно, асимптотический анализ первоначального фредгольмова детерминанта сводится к асимптотическому анализу *осциллирующей* задачи Римана (1.10)–(1.12), (1.14).

В теории классических интегрируемых систем задачи Римана вида (1.10)–(1.12), (1.14) дают решения задачи Коши для интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных. В данном контексте развитие подходящего аппарата для асимптотического анализа осциллирующих матричных задач Римана было начато в 1973–1977 г. в работах [32–36]. Оно было в существенном завершено в 1993 г. и результатом его явилось опубликование в 1995 г. работы [37], в которой был предложен нелинейный аналог классического метода перевала для осциллирующих задач Римана (подробный исторический обзор см. в [38]).

Нелинейный метод перевала Дэйфта и Джосу состоит из трех основных шагов (см. [37], а также [38] и [39]):

1. Деформация первоначального контура скачка Σ в контур наискорейшего спуска (для дисперсионного показателя экспоненты $D(\lambda; x, t)$) и получение асимптотического решения вне соответствующих седловых точек.
2. Использование подходящей пары Лакса и определенной модельной задачи Римана при построении параметрикса для решения в окрестности седловых точек.

3. Объединение вышеназванных составляющих в *равномерное* асимптотическое решение, которое дает возможность обосновать всю конструкцию в целом, используя стандартные оценки [40] теории сингулярных интегральных операторов на сложных контурах.

Каждый из этих шагов имеет свой естественный аналог в классическом методе перевала для осциллирующих контурных интегралов, но использует гораздо более сложную технику и анализ. В отличие от классического метода перевала, используемого для асимптотического анализа осциллирующих *интегральных представлений*, нелинейный метод имеет дело со специальным видом осциллирующих (сингулярных) *интегральных уравнений*. Фактически задача Римана (1.10)–(1.12) эквивалентна следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\chi_+(\lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \chi_+(\mu) (I - G(\mu)) \frac{d\mu}{\mu - \lambda_+}. \quad (1.15)$$

Нелинейный метод перевала обеспечивает регулярный способ нахождения подходящего преобразования (которое является крайне нетривиальным и которое практически невозможно увидеть непосредственно!) первоначального сингулярного интегрального уравнения (1.15) к эквивалентному уравнению, которое имеет равномерно малое ядро.

Некоторые основные идеи нелинейного метода перевала (шаги 1 и 2), в том числе и явные решения для модельных задач Римана, восходят к ранним работам [33] и [41]. Эти ранние версии подхода, основанного на задаче Римана, были в свое время успешно применены для асимптотического анализа множества температурных корреляционных функций (см. [20, 28, 29]). Использование нелинейного метода перевала позволяет значительно увеличить возможности первоначальной схемы [18, 28]. В частности, в работе [30] применение нелинейного метода перевала впервые позволило вычислить асимптотику при большом времени автокорреляций поперечной цепочки Изинга в критическом магнитном поле при конечной температуре. Данный метод также позволил получить решения некоторых давно поставленных вопросов в теории случайных матриц и ортогональных полиномов (см. [42–44]).

XXO -магнетик и непроницаемый бозе-газ являются моделями свободных фермионов. Случай взаимодействующих фермионов по нескольким причинам оказывается гораздо более сложным. Во-первых, задачи Римана, которые описывают соответствующий определитель Фредгольма, становятся операторнозначными (ср. [3, 8]): матричные элементы матрицы $G_{j,k}(\lambda)$ превращаются в интегральные операторы $\widehat{G}_{j,k}(\lambda)$, действующие во вспомогательном L_2 -пространстве ($G_{j,k}(\lambda) \rightarrow G_{j,k}(\lambda | u, v)$). Другими словами, возникает бесконечномерная специфика, отсутствующая в задачах о свободных фермионах. Это трансформирует соответствующие пары Лакса и классические дифференциальные уравнения в их неабелевы аналоги и, очевидно, создает новые существенные сложности при асимптотическом анализе. Фактически до сегодняшнего времени была предпринята лишь одна попытка решить операторнозначную задачу Римана [45], связанную с корреляционной функцией XXX -магнетика.

Вторая сложность является более тонкой, чем первая, она связана с наличием еще одних бесконечномерных объектов в задачах о взаимодействующих фермионах, которые на этот раз имеют квантово-полевою природу. Дело в том, что вне точки свободных фермионов корреляционные функции не могут быть непосредственно представлены в детерминантном виде. Из-за существования нетривиальной S -матрицы, для того чтобы получить такое представление, необходимо вводить вспомогательные квантовые операторы – дуальные поля Корепина [46]. В результате полученные детерминанты зависят от этих вспомогательных операторов и корреляционные функции равны вакуумному ожиданию детерминантов Фредгольма во вспомогательном фокковском пространстве. В частности, для корреляционной функции (1.1) имеет место следующее равенство (ср. с [1]):

$$\langle \Psi(0, 0) \Psi^\dagger(x, t) \rangle_T = \text{const} \cdot e^{-iht} (0 | \mathcal{B}([\psi, \phi_A, \phi_D], x, t) | 0), \quad (1.16)$$

где фактор const зависит только от температуры, константы связи и химического потенциала, а $\mathcal{B}$ является оператором, действующим во вспомогательном фокковском пространстве с вакуумным вектором $|0\rangle$ (не следует путать вспомогательный вакуумный вектор $|0\rangle$ с вектором $|0\rangle$ в (1.3)). Этот оператор включает в себя определитель Фредгольма, который функционально зависит от трех квантовых операторов (дуальных полей) $\psi(\lambda)$, $\phi_A(\lambda)$ и $\phi_D(\lambda)$. Точное определение квантового оператора $\mathcal{B}$ дано в приложении 1. Дуальные поля $\psi(\lambda)$, $\phi_A(\lambda)$, $\phi_D(\lambda)$ определены в разделе 2 формулами (2.22), (2.23). Операторнозначные задачи Римана позволяют вычислить фредгольмовы детерминанты, но не их вакуумные средние. Две бесконечномерные составляющие, т.е. операторная природа задачи Римана и наличие квантовых дуальных полей, совершенно не связаны между собой. Поэтому, для того чтобы найти асимптотическое поведение корреляционной функции взаимодействующих фермионов при больших временах и расстояниях, необходимо быть уверенным, что асимптотика вакуумного среднего значения равна среднему значению от асимптотики. В работе [4] было показано, что наивный асимптотический анализ фредгольмовых детерминантов, содержащих дуальные поля, не дает удовлетворительного результата, т.е. асимптотика не является равномерной по отношению к усреднению дуальных полей. Таким образом, возникает задача – получить асимптотическое описание детерминанта, связанного с коррелятором (1.1), которое было бы устойчивым по отношению к процедуре усреднения дуальных полей. Данная проблема также рассматривается в настоящей статье.

Опишем теперь содержание работы.

В разделе 2, следуя работам [1–3], мы приводим основные формулы и определения, касающиеся детерминантного представления вне точки свободных фермионов и метода задачи Римана для асимптотического анализа корреляционной функции (1.1).

В разделе 3, следуя [3], мы формулируем центральный объект нашего анализа – операторнозначную задачу Римана, связанную с корреляционной функцией (1.1) (см. (3.16) и (3.11) ниже). Контур скачка Σ задачи Римана совпадает с вещественной осью, а соответствующий оператор скачка $\hat{G}(\lambda)$ может быть реализован как матрица 2×2 , чи

матричные элементы $\hat{G}_{jk}(\lambda)$ суть интегральные операторы во вспомогательном пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Главное свойство данной задачи Римана состоит в том, что операторы $\hat{G}_{jk}(\lambda)$ имеют следующую специальную структуру:

$$\hat{G}_{jk}(\lambda) = \hat{i}\delta_{jk} + |j\rangle(G_{jk}(\lambda) - \delta_{jk})\langle k|, \quad j, k = 1, 2, \quad (1.17)$$

где $\hat{i}$ – единичный оператор в $L_2(-\infty, \infty)$, т.е. его ядро – дельта-функция: $\hat{i}(u, v) = \delta(u - v)$. Символы $|j\rangle \equiv |j, u\rangle$ и $\langle k| \equiv \langle k, v|$ означают некоторые элементы $L_2(-\infty, \infty)$ (см. определение (3.9) ниже), удовлетворяющие нормировке

$$\langle 1|1\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle 1, u|1, u\rangle du = \langle 2|2\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle 2, u|2, u\rangle du = 1. \quad (1.18)$$

Числовая матрица $G(\lambda)$ в (1.17) тесно связана с матрицей скачка непроницаемого бозе-газа, являющегося, как мы уже отмечали, моделью свободных фермионов (ср. [29]).

Формулы, аналогичные (1.17), существуют также и для других корреляционных функций взаимодействующих фермионов, они имеют весьма важное алгебраическое значение. Фактически, как можно легко проверить, формулы (1.17) и (1.18) определяют представление

$$G \mapsto \hat{G} \equiv \hat{A}(G) \quad (1.19)$$

группы $Gl(2, C)$ в группу фредгольмовых обратимых операторов на пространстве $L_2((-\infty, \infty), C^2)$. Можно также показать [47], что представление (1.19) сохраняет детерминант, т.е.

$$\det G = \det \hat{G}. \quad (1.20)$$

Связь (1.19) между операторами скачка в моделях взаимодействующих фермионов и их свободнофермионными аналогами впервые была отмечена Корепиным. Ее достоинства были проверены при асимптотическом анализе корреляторов [45, 47]. Отображение (1.19) играет центральную роль в следующих разделах, где мы развиваем операторнозначную версию нелинейного метода перевала Дэйфта и Джоу.

Основным препятствием на пути использования всех преимуществ подхода, основанного на интерпретации соотношения (1.17) как представления группы, является то, что векторы $|j\rangle$ и $\langle k|$ *зависят от параметра* λ , т.е. $|j\rangle \equiv |j, u, \lambda\rangle$ и $\langle k| \equiv \langle k, v, \lambda|$ (см. ниже (3.9)). Более того, они становятся сингулярными при комплексных λ . Поэтому нельзя решить операторную задачу Римана, просто применяя представление (1.19) к решению соответствующей матричной (свободнофермионной) задачи Римана. Тем не менее это представление помогает выполнить первый шаг нелинейного метода перевала (деформацию контура) и вычислить лидирующий член асимптотического решения задачи Римана. Это сделано в разделах 4 и 5, где мы следуем методу работы [45]. Лидирующий член асимптотики, который мы находим, совпадает с тем, который был найден ранее в [4] при помощи непосредственного анализа фредгольмова детерминанта.

Целью разделов 6–8 является вычисление поправок порядка $t^{-1/2}$. Это второй шаг нелинейного метода перевала. В случае свободных фермионов (см. [38] и [39]) данный

шаг состоит в сведении деформированной задачи Римана к модельной проблеме, связанной с седловой точкой. Модельная задача потом может быть решена явно в терминах функций параболического цилиндра (см. снова [38] и [39], а также [41]). В нашем случае модельная задача является операторнозначной версией классической модельной проблемы. Фактически оператор скачка модельной проблемы есть образ некоторой матрицы, тесно связанной с соответствующей свободнофермионной модельной матрицей скачка посредством *модифицированного* отображения $\hat{\mathcal{A}}_0$. Последнее является представлением $\hat{\mathcal{A}}$ с векторами $|j\rangle$ и $\langle k|$, замененными на их значения в седловой точке λ_0 ,

$$|j, u\rangle = |j, u, \lambda_0\rangle, \quad \langle k, v| = \langle k, v, \lambda_0|. \quad (1.21)$$

Представление $\hat{\mathcal{A}}_0$ не зависит от λ и, следовательно, может быть использовано для преобразования решения матричной модельной задачи, соответствующей свободным фермионам, в решение операторной модельной задачи. Хотя данное преобразование не является достаточно прямым, оно позволяет в конце концов (см. разделы 7 и 8) решить модельную задачу Римана явно (вернее, с точностью до обращения некоторого интегрального оператора, не зависящего от λ , x и t). При достижении этого результата важную роль играет “операторноиндексное” обобщение $D_{\hat{\nu}}(\xi)$ классических функций параболического цилиндра $D_{\nu}(\xi)$,

$$D_{\hat{\nu}}(\xi) = D_0(\xi)(i - |j\rangle\langle j|) + |j\rangle\langle j|D_{\nu}(\xi), \quad \hat{\nu} = \nu|j\rangle\langle j|. \quad (1.22)$$

Поправка порядка $t^{-1/2}$ является главным пороговым этапом в асимптотическом анализе температурных корреляционных функций (ср. [29]). После его завершения в принципе возможно получить полное асимптотическое разложение, используя только элементарные алгебраические выкладки, а именно просто подставляя надлежащий асимптотический ряд в нелинейное дифференциальное уравнение, связанное с рассматриваемой корреляционной функцией. В нашем случае этим нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных является уже отмечавшаяся выше неабелева версия классического НУШ (см. ниже (2.21)). В разделе 9 мы используем это неабелево НУШ для точного вычисления нескольких поправок, следующих за поправкой порядка $t^{-1/2}$, и для вычисления предэкспоненциального фактора в асимптотике фредгольмова детерминанта. Неабелево НУШ также позволяет нам извлечь некоторую ценную информацию о полном асимптотическом разложении. В разделе 10 мы анализируем эту информацию и приходим к выводу, что, для того чтобы сделать полученное асимптотическое разложение устойчивым по отношению к усреднению дуальных полей, необходима определенная модификация нашей конструкции. Данная модификация касается уравнения, определяющего седловую точку λ_0 , и она проводится в разделе 11.

В качестве **основного результата** данной статьи мы предлагаем следующие асимптотические формулы для квантового оператора $\mathcal{B}$, входящего в правую часть уравне-

ния (1.16):

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C_-(\phi_D, \phi_A \mid \lambda_0, T, h, c)(2t)^{-\frac{(\nu(\Lambda)+1)^2}{2}} e^{\psi(\Lambda)+it\Lambda^2-ix\Lambda} \times \\ & \times \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x-2\lambda t + i\psi'(\lambda)) \operatorname{sign}(\Lambda-\lambda) \times \right. \\ & \times \ln\{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda-\Lambda)})\} d\lambda\left.\right\} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(t)}{t}\right)\right), \quad (1.23) \\ & t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{2t} \equiv \lambda_0 = O(1), \end{aligned}$$

для случая отрицательного химического потенциала h и

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C_+(\phi_D, \phi_A \mid \lambda_0, T, h, c)(2t)^{-\frac{\nu^2(\Lambda)}{2}} e^{\psi(\Lambda_1)+it\Lambda_1^2-ix\Lambda_1} \times \\ & \times \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (x-2\lambda t + i\psi'(\lambda)) \operatorname{sign}(\Lambda - \Re\lambda) \times \right. \\ & \times \ln\{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\Re\lambda-\Lambda)})\} d\lambda\left.\right\} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right), \quad (1.24) \\ & t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{2t} \equiv \lambda_0 = O(1), \end{aligned}$$

для случая положительного химического потенциала h .

Необходимо сделать несколько замечаний по поводу обозначений, используемых в формулах (1.23), (1.24), а также о смысле самих формул:

1. Функция $\vartheta(\lambda)$ является фермиевским весом (1.8).
2. Дуальное поле $\phi(\lambda)$ равно разности $\phi_A(\lambda) - \phi_D(\lambda)$.
3. Показатель степени $\nu(\Lambda)$ определяется формулой

$$\nu(\Lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \ln[(1 - \vartheta(\Lambda)(1 + e^{-\phi(\Lambda)}))(1 - \vartheta(\Lambda)(1 + e^{\phi(\Lambda)}))].$$

4. Λ_1 и Λ суть корни уравнений

$$1 - \vartheta(\Lambda_1)(1 + e^{-\phi(\Lambda_1)}) = 0, \quad h > 0, \quad (1.25)$$

и

$$\Lambda = \lambda_0 + \frac{i}{2t} \psi'(\Lambda), \quad (1.26)$$

соответственно. Так как Λ не обязательно является вещественным, то интегралы в (1.23), (1.24) следует понимать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\operatorname{sign}(\Lambda - \lambda), \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\Lambda} F(1, \lambda) d\lambda + \int_{\Lambda}^{\infty} F(-1, \lambda) d\lambda. \quad (1.27)$$

5. Неопределенные множители $C_{\pm}(\phi_A, \phi_D \mid \lambda_0, T, h, c)$ – функционалы дуальных полей ϕ_A, ϕ_D и функции температуры T , химического потенциала h и константы связи c . Они не зависят от дуального поля ψ и зависят от расстояния x и времени t только через отношение $\lambda_0 = x/2t$.

6. Все коммутационные соотношения для дуальных полей $\phi_A(\lambda)$, $\phi_D(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ тривиальны (см. (2.24) ниже). Поэтому при выводе формул (1.23) и (1.24) мы трактуем дуальные поля как некоторые комплекснозначные функции, аналитические в полосе $|\Im \lambda| < c/2$; функции $\exp \phi_{A,D}$ и $\exp \psi$ предполагаются ограниченными в данной полосе. Предполагается также, что уравнение (1.25) не имеет вещественных решений при $h < 0$, но имеет ровно два действительных корня Λ_1 и Λ_2 при $h > 0$. Более того, мы считаем, что

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Lambda \quad (1.28)$$

и что те же неравенства в случае $h > 0$ справедливы для корней функции $1 - \vartheta(\lambda) \times (1 + e^{\phi(\lambda)})$. Данные предположения обоснованы в разделах 2, 3 и 5. Соответственно контур интегрирования Γ в формуле (1.24) выбирается так, как это показано ниже на рис. 2, поэтому интеграл в (1.24) становится осмысленным.

7. Точка Λ , играющая роль “сдвинутой” седловой точки, определена уравнением (1.26) как корень, стремящийся к λ_0 при $t \rightarrow \infty$. Другими словами, $\Lambda - \lambda_0 = \mathcal{O}(t^{-1})$. Тем не менее мы не заменяем Λ на λ_0 в асимптотических формулах (1.23), (1.24). Как объяснено в разделах 10 и 11, для того чтобы сделать асимптотику оператора $\mathcal{B}$ совместной с усреднением по дуальным полям, нам нужно проследить наличие дуального поля ψ во всех поправках к лидирующим членам, выписанным в формулах (1.23), (1.24). Фактически нам нужно добиться того, чтобы все поправки имели порядок $\mathcal{O}(\psi^m/t^n)$ с $0 < m < n$. Если совершить замену $\Lambda \mapsto \lambda_0$, то мы получим поправки порядка $\mathcal{O}(\psi^m/t^n)$ с $m \geq n$, которые дают положительные степени t после усреднения в (1.16) (более подробно см. в разделах 10 и 11). Другими словами, когда мы принимаем во внимание операторную природу уравнения (1.26), необходимо иметь в виду, что, несмотря на то что фактор $i/2t$ является малым, величина $\psi'(\lambda)$ есть неограниченный оператор.

8. Из-за операторной природы дуальных полей $\phi_A(\lambda)$, $\phi_D(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ правые части формул (1.23) и (1.24) имеют, строго говоря, символический смысл. Для того чтобы вычислить средние значения величин, представленных в (1.23), (1.24), необходим метод усреднения функционалов, зависящих от дуальных полей, который был развит в работе [5]. Результаты этих вычислений, которые завершили бы анализ лидирующего члена асимптотики корреляционной функции (1.1), будут представлены в последующих публикациях.

Завершая введение, мы хотели бы подчеркнуть, что в настоящей работе мы не занимаемся проблемами, связанными с третьим шагом нелинейного метода перевала, т.е. вопросами строгого обоснования асимптотических формул (1.23), (1.24). Некоторые из этих вопросов, включающие строгую постановку и общую теорию операторнозначных задач Римана, возникающих в моделях взаимодействующих фермионов, все еще исследуются. Цель настоящей статьи – продемонстрировать, что с помощью операторно-

значной задачи Римана можно проводить эффективный асимптотический анализ разновременных, температурных корреляционных функций взаимодействующих фермионов, основанный на детерминантном представлении для корреляторов.

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Данный раздел содержит основные определения и обозначения, которые используются в этой статье. Читатель может найти подробности в работах [1, 3]. Здесь мы ограничиваемся только самыми необходимыми формулами.

Рассмотрим операторы следующего вида:

$$\hat{A} \equiv \hat{A}(u, v) = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11}(u, v) & \hat{A}_{12}(u, v) \\ \hat{A}_{21}(u, v) & \hat{A}_{22}(u, v) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Элементами этой (2×2) -матрицы являются интегральные ядра $A_{jk}(u, v)$, действующие на функции из пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Мы будем отмечать эти операторы (так же как и их матричные элементы) “шляпкой” и называть “хэт-операторами”. Часто мы также будем использовать равенство

$$\widehat{M} \equiv \widehat{M}(u, v),$$

для того чтобы указать, что $\widehat{M}(u, v)$ является ядром оператора $\widehat{M}$.

Произведение двух операторов данного вида определяется как

$$(\hat{A}\hat{B})_{jk}(u, v) = \sum_{l=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{jl}(u, w) \widehat{B}_{lk}(w, v) dw. \quad (2.2)$$

Будут рассматриваться также произведения отдельных матричных элементов

$$(\hat{A}_{jk} \widehat{B}_{lm})(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{jk}(u, w) \widehat{B}_{lm}(w, v) dw. \quad (2.3)$$

Определение следа хэт-оператора стандартно:

$$\text{Tr } \hat{A} = \text{tr } \hat{A}_{11} + \text{tr } \hat{A}_{22} = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}_{11}(u, u) + \hat{A}_{22}(u, u)) du, \quad (2.4)$$

где

$$\text{tr } \hat{A}_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{jk}(u, u) du. \quad (2.5)$$

Главным объектом исследования является операторнозначная задача Римана. Здесь мы даем ее общую формулировку.

Задача Римана состоит в следующем: требуется найти хэт-оператор $\hat{\chi}(\lambda)$, зависящий от комплексного параметра λ и удовлетворяющий следующим условиям (ср. (1.10)–(1.12)):

$$\hat{\chi}(\lambda) \rightarrow \hat{I}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad - \text{условие нормировки}; \quad (2.6a)$$

$$\hat{\chi}(\lambda) - \text{аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \mathbb{R}; \quad (2.7a)$$

$$\hat{\chi}_-(\lambda) = \hat{\chi}_+(\lambda) \hat{G}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad - \text{условие скачка}. \quad (2.8a)$$

Здесь $\hat{I}$ – единичный хэт-оператор

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(u - v). \quad (2.9)$$

Операторы $\hat{\chi}_{\pm}(\lambda)$ суть граничные значения функции $\hat{\chi}(\lambda)$ соответственно слева (из верхней полуплоскости) и справа (из нижней полуплоскости) от вещественной оси (ср. опять с (1.10)–(1.12)). $\hat{G}(\lambda)$ – заданный оператор. Частный выбор этого оператора, который соответствует корреляционной функции (1.1), будет подробно описан в следующем разделе.

Следуя традиции, мы называем оператор $\hat{G}(\lambda)$ “матрицей скачка”, хотя эта матрица, очевидно, является бесконечномерной. Мы надеемся, что такая терминология не вызовет недоразумений.

Несмотря на то что задача Римана (2.6a)–(2.8a) выглядит как (2×2) -матричная задача, здесь мы имеем дело с бесконечномерными интегральными операторами. Более подробно условие скачка (2.8a) может быть записано в виде

$$\hat{\chi}_{jk}(\lambda|u, v) = \sum_{l=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_{jl+}(\lambda|u, w) \hat{G}_{lk}(\lambda|w, v) dw, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Аналитичность оператора $\hat{\chi}(\lambda)$ понимается как аналитичность по λ его ядра $\hat{\chi}(\lambda|u, v)$. Все пределы и разложения оператора $\hat{\chi}(\lambda) \equiv \hat{\chi}(\lambda|u, v)$ предполагаются равномерными по u и v . Мы не будем далее вдаваться в детали постановки задачи Римана (2.6a)–(2.8a). Как уже указывалось во введении, мы не обсуждаем общую теорию операторнозначных задач Римана. В дальнейшем мы будем предполагать, что для всех задач Римана, с которыми мы столкнемся, существует единственное решение и что оно удовлетворяет всем естественным свойствам. Например, мы будем предполагать, что если $\hat{G}(\lambda)$ – фредгольмов оператор, т.е. существует детерминант $\det \hat{G}(\lambda)$, то и $\hat{\chi}(\lambda)$ – тоже фредгольмов оператор, а его детерминант $\det \hat{\chi}(\lambda)$ является решением следующей *скалярной* задачи Римана:

$$\det \hat{\chi}(\lambda) \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad (2.11)$$

$$\det \hat{\chi}(\lambda) - \text{аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \mathbb{R}; \quad (2.12)$$

$$\det \hat{\chi}_-(\lambda) = \det \hat{\chi}_+(\lambda) \det \hat{G}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

В частности, это означает, что функция $\det \hat{\chi}(\lambda)$ дается явной формулой

$$\det \hat{\chi}(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \ln \det \hat{G}(\mu) \right\} \quad (2.14)$$

при выполнении условия нулевого индекса

$$\arg \det \hat{G}(\lambda) \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \pm \infty. \quad (2.15)$$

Центральную роль будет играть асимптотическое разложение решения задачи Римана при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\hat{\chi}(\lambda) = \hat{I} + \frac{\hat{b}}{\lambda} + \frac{\hat{c}}{\lambda^2} + \dots \quad (2.16)$$

Первые два коэффициента этого разложения $\hat{b}$ и $\hat{c}$ позволяют восстановить детерминант Фредгольма (т.е. τ -функцию, соответствующую решению $\hat{\chi}(\lambda)$), который, в свою очередь, непосредственно связан с корреляционной функцией локальных полей (1.1). Эта корреляционная функция может быть представлена в виде

$$\langle \Psi(0, 0) \Psi^\dagger(x, t) \rangle_T = \text{const} \cdot e^{-iht} (0 | \mathcal{B}([\psi, \phi_A, \phi_D], x, t) | 0). \quad (2.17)$$

В этой формуле выделены фактор $\exp\{-iht\}$, который тривиально зависит от времени t , и константа, которая не зависит от x и t . Строго говоря, эта “константа” зависит от температуры, константы связи и химического потенциала. Наиболее важный объект в (2.17) – оператор $\mathcal{B}([\psi, \phi_A, \phi_D], x, t)$, который, в частности, включает в себя детерминант Фредгольма и который к тому же является оператором во вспомогательном фоковском пространстве. Этот оператор является функцией от x и t и функционально зависит от трех квантовых операторов (дуальных полей) $\psi(\lambda)$, $\phi_A(\lambda)$ и $\phi_D(\lambda)$. Последние действуют во вспомогательном фоковском пространстве с вакуумным вектором $|0\rangle$ и дуальным вектором $\langle 0|$ (напомним, что не следует путать $|0\rangle$ с $|0\rangle\rangle$). Таким образом, корреляционная функция пропорциональна вакуумному ожиданию оператора $\mathcal{B}$. Детальное определение и свойства дуальных полей будут даны в этом разделе позднее. Сначала мы хотели бы сосредоточить внимание на соотношении между оператором $\mathcal{B}$ и операторнозначной задачей Римана.

В работах [1, 2] было найдено следующее представление для $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}([\psi, \phi_A, \phi_D], x, t) = \det(\tilde{I} + \tilde{V}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_{12}(u, v) du dv. \quad (2.18)$$

Мы называем (2.18) “детерминантным представлением”, т.к. правая часть этой формулы пропорциональна определителю Фредгольма линейного интегрального оператора $\tilde{I} + \tilde{V}$. Подробное описание этого интегрального оператора дано в приложении 1.

Результаты работы [3] позволяют выразить определитель Фредгольма и множитель $\hat{b}_{12}(u, v)$ через решение операторнозначной задачи Римана (2.6a)–(2.8a) с определенной

матрицей скачка $\widehat{G}(\lambda)$. Фактически оператор $\hat{b}_{12}$ в (2.18) является соответствующим матричным элементом коэффициента $\hat{b}$ в асимптотическом разложении (2.16). Логарифмические производные от $\det(\tilde{I} + \tilde{V})$ по расстоянию x и времени t также могут быть записаны в терминах коэффициентов $\hat{b}$ и $\hat{c}$ из (2.16):

$$\begin{aligned}\partial_x \log \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= i \operatorname{tr} \hat{b}_{11}, \\ \partial_t \log \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= i \operatorname{tr}(\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Вторые логарифмические производные зависят только от матричных элементов $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$:

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_x \log \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= -\operatorname{tr}(\hat{b}_{12} \hat{b}_{21}), \\ \partial_t \partial_x \log \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= i \operatorname{tr}(\partial_x \hat{b}_{12} \cdot \hat{b}_{21} - \partial_x \hat{b}_{21} \cdot \hat{b}_{12}).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Наконец, последние два оператора удовлетворяют неабелеву обобщению классического НУШ

$$\begin{aligned}-i \partial_t \hat{b}_{12} &= -\partial_x^2 \hat{b}_{12} + 2 \hat{b}_{12} \hat{b}_{21} \hat{b}_{12}, \\ i \partial_t \hat{b}_{21} &= -\partial_x^2 \hat{b}_{21} + 2 \hat{b}_{21} \hat{b}_{12} \hat{b}_{21}.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Напомним, что произведения операторов $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$ в правых частях уравнений (2.20) и (2.21) следует понимать в смысле (2.2).

Таким образом, мы описали оператор $\mathcal{B}$ в терминах решения операторнозначной задачи Римана (2.6a)–(2.8a) (явное выражение для матрицы скачка $\widehat{G}(\lambda)$ будет дано в следующем разделе). Уравнения (2.19) определяют $\mathcal{B}$ с точностью до постоянного множителя. Уравнения (2.20), (2.21) помогут проанализировать высшие поправки к главным асимптотикам операторов $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$.

Вернемся теперь к вспомогательным квантовым операторам – дуальным полям. Данные операторы $\psi(\lambda)$, $\phi_D(\lambda)$ и $\phi_A(\lambda)$ (первоначально последние два поля обозначались как $\phi_{D_1}(\lambda)$ и $\phi_{A_2}(\lambda)$) были введены в [1] для уничтожения двухчастичного рассеяния и сведения модели к свободнофермионной. Как мы уже отмечали, они действуют во вспомогательном фоковском пространстве. Каждое из этих полей может быть представлено в виде суммы повышающей и понижающей частей:

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda) &= q_A(\lambda) + p_D(\lambda), \\ \phi_D(\lambda) &= q_D(\lambda) + p_A(\lambda), \\ \psi(\lambda) &= q_\psi(\lambda) + p_\psi(\lambda).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Здесь $p(\lambda)$ является понижающей частью дуального поля: $p(\lambda)|0\rangle = 0$; $q(\lambda)$ – повышающая часть: $0|q(\lambda) = 0$.

Единственными ненулевыми коммутационными соотношениями являются

$$\begin{aligned}[p_A(\lambda), q_\psi(\mu)] &= [p_\psi(\lambda), q_A(\mu)] = \ln h(\mu, \lambda), \\ [p_D(\lambda), q_\psi(\mu)] &= [p_\psi(\lambda), q_D(\mu)] = \ln h(\lambda, \mu), \\ [p_\psi(\lambda), q_\psi(\mu)] &= \ln[h(\lambda, \mu)h(\mu, \lambda)],\end{aligned}\quad (2.23)$$

где

$$h(\lambda, \mu) = \frac{\lambda - \mu + ic}{ic}.$$

Напомним, что c — константа связи в формуле (1.5). Из соотношений (2.23) немедленно следует, что все дуальные поля принадлежат абелевой подалгебре

$$[\psi(\lambda), \psi(\mu)] = [\psi(\lambda), \phi_a(\mu)] = [\phi_b(\lambda), \phi_a(\mu)] = 0, \quad (2.24)$$

где $a, b = A, D$. В силу свойства (2.24) фредгольмов детерминант $\det(\tilde{I} + \tilde{V})$ является хорошо определенным.

Детерминант Фредгольма $\det(\tilde{I} + \tilde{V})$ и фактор $\hat{b}_{12}$ в представлении (2.18) функционально зависят от дуальных полей. Следовательно, $\mathcal{B}$ является оператором во вспомогательном фоксовском пространстве (см. явные формулы в (П1.3)–(П1.5) приложения 1). Из соотношений (2.19), (2.20) можно сделать вывод, что решение соответствующей задачи Римана, а также матрица скачка должны зависеть от этих вспомогательных операторов. В следующем разделе мы увидим, что матрица скачка $\hat{G}(\lambda)$ действительно зависит от дуальных полей. Поэтому она является оператором во вспомогательном фоксовском пространстве.

Однако мы хотели бы подчеркнуть, что операторная природа задачи Римана (2.6a)–(2.8a) *не связана* с тем, что $\hat{\chi}(\lambda)$ и $\hat{G}(\lambda)$ зависят от дуальных полей. Даже если заменить все дуальные поля некоторыми комплексными функциями, задача Римана (2.6a)–(2.8a) все равно остается операторнозначной, т.к. элементы матриц $\hat{\chi}(\lambda)$ и $\hat{G}(\lambda)$ являются интегральными ядрами. Иными словами, $\hat{\chi}(\lambda)$ и $\hat{G}(\lambda)$ — хэт-операторы независимо от квантовой природы дуальных полей. В то же время оператор $\mathcal{B}$ становится числом при замене дуальных полей классическими функциями.

Вычисление асимптотики корреляционной функции (1.1) состоит из двух этапов. На первой стадии следует решить операторнозначную задачу Римана (2.6a)–(2.8a), чтобы найти явное выражение для оператора $\mathcal{B}$. Вторая стадия состоит в усреднении полученного результата по вспомогательному вакууму. На этих двух стадиях роль дуальных полей существенно различна. В то время как усреднение главным образом основано на операторных свойствах дуальных полей, на первой стадии гораздо более важны аналитические свойства последних. При решении задачи Римана (2.6a)–(2.8a) можно рассматривать дуальные поля как некоторые классические функции, голоморфные в окрестности вещественной оси. В самом деле, все эти вспомогательные операторы коммутируют друг с другом, а их матричные элементы являются голоморфными функциями, если их аргументы принадлежат полосе $|\Im \lambda| < c/2$.

Однако такая трактовка дуальных полей приводит к проблеме, которую мы вкратце затронули во введении. Дело в том, что операторнозначная задача Римана, рассматриваемая в этой статье, может быть решена только асимптотически для больших времен t и расстояний x . Поэтому мы получаем только асимптотическое решение и, следовательно, находим только асимптотику оператора $\mathcal{B}$. Строго говоря, необходимо быть уверенным в том, что вакуумное ожидание от асимптотики равно асимптотике от вакуумного

ожидания. В противном случае поправки к асимптотическому выражению для $\mathcal{B}$ могут дать неисчезающий вклад в среднее $(0|\mathcal{B}|0)$.

Ниже (в разделе 11) мы увидим, что существует множество различных асимптотических разложений для оператора $\mathcal{B}$, которые оказываются эквивалентными, если мы трактуем дуальные поля как комплексные функции. Все они дают нам один и тот же результат для вакуумного ожидания тогда и только тогда, когда мы учитываем асимптотические ряды полностью. Однако, если ограничиться лидирующим членом асимптотики и конечным набором поправок, то эти асимптотические ряды дают разные результаты для среднего $(0|\mathcal{B}|0)$. В разделе 11 мы предложим алгоритм для выбора асимптотического разложения, являющегося совместным с процедурой усреднения дуальных полей.

В заключение мы формулируем нашу точку зрения на дуальные поля следующим образом. Дуальные поля рассматриваются как комплексные функции, голоморфные в конечной окрестности вещественной оси. Более того, т.к. матричные элементы операторов $\exp \phi_a(\lambda)$ и $\exp \psi(\lambda)$ являются рациональными функциями λ , то операторы $\exp \phi_a(\lambda)$ и $\exp \psi(\lambda)$ можно рассматривать как рациональные функции λ , ограниченные в полосе $|\Im \lambda| < c/2$. Это позволяет решить операторнозначную задачу Римана для больших времен и расстояний путем деформации исходного контура в новые контуры на комплексной плоскости. В то же время мы не забываем о квантовой природе этих вспомогательных операторов. Поэтому мы не ограничиваемся только лидирующим членом асимптотики для оператора $\mathcal{B}$. Особое внимание уделяется поправкам и их поведению после усреднения по вспомогательному вакууму. Все эти вопросы более подробно рассматриваются в разделах 10, 11, где будет показано, как можно усовершенствовать процедуру решения задачи Римана, чтобы получить правильный результат для асимптотики вакуумного среднего значения.

3. ОПЕРАТОРНОЗНАЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА

Операторнозначная задача Римана, описывающая температурную корреляционную функцию локальных полей (1.1), была сформулирована в работе [3]. Мы уже представили общий вид этой задачи в предыдущем разделе. Здесь дается явное выражение для матрицы скачка и объясняются все необходимые определения и обозначения.

Согласно [3] рассматриваемая задача Римана заключается в поиске хэт-оператора $\hat{\chi}(\lambda)$, обладающего свойствами:

$$\hat{\chi}(\lambda) \rightarrow \hat{I}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad (3.16')$$

$$\hat{\chi}(\lambda) - \text{аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \mathbb{R}; \quad (3.16'')$$

$$\hat{\chi}_-(\lambda) = \hat{\chi}_+(\lambda) \hat{G}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.16''')$$

где операторнозначные элементы матрицы скачка $\widehat{G}(\lambda)$ определены формулами

$$\begin{aligned}\widehat{G}_{11}(\lambda|u, v) &= \delta(u - v) - Z(v, \lambda)\delta(u - \lambda)\vartheta(\lambda)e^{\phi_D(\lambda)}, \\ \widehat{G}_{12}(\lambda|u, v) &= 2\pi i(\vartheta(\lambda) - 1)\delta(u - \lambda)\delta(v - \lambda)e^{\psi(\lambda) + \tau(\lambda)}, \\ \widehat{G}_{21}(\lambda|u, v) &= -\frac{i}{2\pi}Z(u, \lambda)Z(v, \lambda)\vartheta(\lambda)e^{\phi_A(\lambda) + \phi_D(\lambda) - \psi(\lambda) - \tau(\lambda)}, \\ \widehat{G}_{22}(\lambda|u, v) &= \delta(u - v) - Z(u, \lambda)\delta(v - \lambda)\vartheta(\lambda)e^{\phi_A(\lambda)}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Здесь $\phi_A(\lambda)$, $\phi_D(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ – дуальные поля (2.22). Напомним, что начиная с этого раздела мы рассматриваем операторы $\exp \phi_A(\lambda)$, $\exp \phi_D(\lambda)$ и $\exp \psi(\lambda)$ как классические функции, которые являются рациональными и ограниченными в конечной полосе ($|\Im \lambda| < c/2$) около вещественной оси. Более того, мы будем предполагать следующие свойства симметрии для функций $\psi(\lambda)$ и $\phi(\lambda) \equiv \phi_A(\lambda) - \phi_D(\lambda)$ (см. аргументы, приведенные в конце этого раздела):

$$\psi(\lambda) = \bar{\psi}(\bar{\lambda})\tag{3.3}$$

и

$$\phi(\lambda) = -\bar{\phi}(\bar{\lambda}).\tag{3.4}$$

Функция $Z(\lambda, \mu)$ имеет вид

$$Z(\lambda, \mu) = \frac{e^{-\phi_D(\lambda)}}{h(\mu, \lambda)} + \frac{e^{-\phi_A(\lambda)}}{h(\lambda, \mu)},\tag{3.5}$$

где $h(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu + ic)/ic$ была введена в формулах (2.23). Фермиевский вес $\vartheta(\lambda)$ был определен в (1.8), он является быстроубывающей функцией при $\lambda \rightarrow \infty$. Единственный объект, зависящий от времени t и расстояния x , – функция $\tau(\lambda) \equiv \tau(\lambda; x, t)$, определяемая уравнением

$$\tau(\lambda) = it\lambda^2 - ix\lambda\tag{3.6}$$

и представляющая собой дисперсионный закон лежащей в основе классической модели.

В настоящей работе мы изучаем асимптотическое поведение решения задачи Римана (3.16) при больших временах и расстояниях. Более точно, мы рассматриваем случай, когда $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$, в то время как их отношение остается фиксированным:

$$\frac{x}{2t} \equiv \lambda_0 = O(1).$$

Поэтому удобно вместо переменных t и x ввести новые независимые переменные t и λ_0 . Тогда функция $\tau(\lambda)$ приобретает вид

$$\tau(\lambda) = it(\lambda - \lambda_0)^2 - it\lambda_0^2.\tag{3.7}$$

Поскольку матрица скачка $\widehat{G}(\lambda)$ (3.2) зависит от дельта-функций, чьи аргументы содержат параметр λ , то условие скачка (3.16''') следует понимать в слабом смысле. Дабы избежать усложнений, вызванных присутствием обобщенных функций, зависящих

от комплексного параметра, мы сделаем следующую регуляризацию матрицы скачка (3.2).

Пусть

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon(u - \lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\epsilon}}, \\ \mathcal{N}_\epsilon(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z^2(u, \lambda) \delta_\epsilon(u - \lambda) du\end{aligned}\quad (3.8)$$

и

$$\begin{aligned}|1\rangle &\equiv |1, u\rangle = \frac{\delta_\epsilon(u - \lambda) Z(u, \lambda)}{\sqrt{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda) Z(\lambda, \lambda)}}, & \langle 1| &\equiv \langle 1, v| = \sqrt{\frac{Z(\lambda, \lambda)}{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda)}} Z(v, \lambda), \\ |2\rangle &\equiv |2, u\rangle = \sqrt{\frac{Z(\lambda, \lambda)}{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda)}} Z(u, \lambda), & \langle 2| &\equiv \langle 2, v| = \frac{\delta_\epsilon(v - \lambda) Z(v, \lambda)}{\sqrt{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda) Z(\lambda, \lambda)}}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Очевидно, что

$$\langle 1|1\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle 1, u|1, u\rangle du = \langle 2|2\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle 2, u|2, u\rangle du = 1. \quad (3.10)$$

Кроме того, благодаря симметрии (3.4) можно видеть, что $\mathcal{N}_\epsilon(\lambda)$ не имеет нулей на вещественной оси.

Определим элементы регуляризованной матрицы скачка формулами

$$\begin{aligned}\widehat{G}_{11}(\lambda) &= \hat{i} - \vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_D(\lambda)} |1\rangle \langle 1|, \\ \widehat{G}_{12}(\lambda) &= 2\pi i (\vartheta(\lambda) - 1) Z(\lambda, \lambda) e^{\psi(\lambda) + \tau(\lambda)} |1\rangle \langle 2|, \\ \widehat{G}_{21}(\lambda) &= -\frac{i}{2\pi} \vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_A(\lambda) + \phi_D(\lambda) - \psi(\lambda) - \tau(\lambda)} |2\rangle \langle 1|, \\ \widehat{G}_{22}(\lambda) &= \hat{i} - \vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_A(\lambda)} |2\rangle \langle 2|,\end{aligned}\quad (3.11)$$

где $\hat{i} \equiv \delta(u - v)$. Легко видеть, что в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ матрица скачка (3.11) превращается в (3.2).

Задача Римана (3.1б) с регуляризованной матрицей скачка соответствует новому регуляризованному оператору $\mathcal{B}$. В частности, фредгольмов детерминант $\det(\tilde{I} + \tilde{V})$ должен быть заменен на $\det(\tilde{I} + \tilde{V}_\epsilon)$ (см. приложение 2). Новое регуляризованное ядро $\tilde{V}_\epsilon$, как и исходное ядро $\tilde{V}$, несингулярно, и предел $\tilde{V}_\epsilon \rightarrow \tilde{V}$, $\epsilon \rightarrow 0$, хорошо определен. Замечательно, что соотношения (2.19)–(2.21) остаются справедливыми для регуляризованных объектов при *конечных* значениях ϵ (а не только в пределе $\epsilon \rightarrow 0$!). В последующей части статьи мы будем работать только с регуляризованным оператором $\tilde{V}_\epsilon$ и обозначать его как $\tilde{V}$, опуская индекс ϵ . Предполагается также, что предел большого времени коммутирует с пределом $\epsilon \rightarrow 0$. Косвенным обоснованием этого предположения является еще одно особое свойство регуляризации, которое будет обнаружено позднее: первый лидирующий член, который выводится для регуляризованного фредгольмова детерминанта, *не зависит от ϵ* .

Как и в работе [3] (при предположениях, сделанных в предыдущем разделе об общей теории операторнозначных задач Римана, с которыми мы имеем дело), из разрешимости задачи Римана (3.16), (3.11) следует единственность решения. Более того, используя свойство представления (1.20) и уравнение (2.14), мы заключаем, что решение $\hat{\chi}(\lambda)$ задачи Римана (3.16) с матрицей скачка (3.11) удовлетворяет уравнению

$$\det \hat{\chi}(\lambda) = 1 \quad \text{для всех } \lambda. \quad (3.12)$$

Возможность асимптотического решения задачи Римана (3.16), (3.11) при $t \rightarrow \infty$ основана на присутствии в матрице скачка быстроосциллирующих экспонент $e^{\pm \tau(\lambda)}$. В следующем разделе мы начнем асимптотический анализ решения задачи Римана (3.16), (3.11), используя операторнозначное обобщение нелинейного метода перевала, предложенного в [37] для осциллирующих матричнозначных задач Римана.

Мы заканчиваем данный раздел одним важным замечанием.

В модели квантового НУШ имеются две различные фазы, соответствующие случаям положительного и отрицательного химического потенциала h в гамильтониане (1.5). В частности, основное состояние модели при $h < 0$ совпадает с голым фоковским вакуумом, в то время как при $h > 0$ основное состояние является морем Дирака [48]. При конечной температуре разница не столь существенна, но тем не менее можно было бы ожидать, что асимптотика корреляционной функции различна в этих двух случаях. Так как данная асимптотика определяется решением задачи Римана (3.16), то свойства матрицы скачка (3.11) должны быть разными при $h > 0$ и $h < 0$. Данный факт действительно имеет место в пределе свободных фермионов [29], он связан с нулями диагональных элементов матрицы скачка. Вне точки свободных фермионов следует рассматривать нули детерминантов элементов $\hat{G}_{11}$ и $\hat{G}_{22}$. Так как оба эти оператора являются суммой единичного оператора и одномерного проектора, то легко видеть, что

$$\begin{aligned} \det \hat{G}_{11}(\lambda) &= 1 - \vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_D(\lambda)} = \frac{e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} - e^{-\phi(\lambda)}}{e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} + 1}, \\ \det \hat{G}_{22}(\lambda) &= 1 - \vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_A(\lambda)} = \frac{e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} - e^{\phi(\lambda)}}{e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} + 1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В точке свободных фермионов (константа связи c стремится к бесконечности) можно положить в этих формулах дуальные поля равными нулю, т.к. в силу коммутационных соотношений (2.23) вакуумное ожидание в этом пределе тривиально. Как мы уже отмечали во введении, решение уравнения Янга–Янга (1.6) $\varepsilon(\lambda)$ положительно при $h < 0$, и $\varepsilon(\lambda)$ имеет два вещественных корня при $h > 0$. Поэтому детерминанты операторов $\hat{G}_{11}$ и $\hat{G}_{22}$ обладают теми же свойствами.

Вне точки свободных фермионов, для того чтобы ответить на вопрос, имеют ли детерминанты операторов $\hat{G}_{11}$ и $\hat{G}_{22}$ нули на вещественной оси, необходимо знать свойства функции $\exp\{\varepsilon(\lambda)/T\} - \exp\{\pm \phi(\lambda)\}$. Эти свойства должны естественным образом

отражать свойства оператора $\exp\{\varepsilon(\lambda)/T\} - \exp\{\pm\phi(\lambda)\}$ (здесь мы на короткое время вспоминаем о квантовой природе дуальных полей). В работе [1] было показано, что дуальные поля могут быть выражены через канонические бозе-поля. С помощью этих представлений можно, в частности, доказать, что $\psi^\dagger(\bar{\lambda}) = \psi(\lambda)$ и $\phi^\dagger(\bar{\lambda}) = -\phi(\lambda)$. Поэтому мы требуем, чтобы соответствующие классические функции обладали аналогичными свойствами (3.3), (3.4). Оператор $\exp\{\pm\phi(\lambda)\}$, очевидно, является унитарным оператором со спектром, принадлежащим единичному кругу. Имеются серьезные причины считать, что все точки единичного круга относятся к спектру этого оператора (хотя этот факт и не был строго доказан). Поэтому, если $h < 0$ и, следовательно, $\varepsilon(\lambda) > 0$, то мы заключаем, что спектр оператора $\exp\{\varepsilon(\lambda)/T\} - \exp\{\pm\phi_A(\lambda)\}$ не содержит нулевой точки:

$$0 \notin \sigma\left(e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} - e^{\pm\phi(\lambda)}\right), \quad h < 0. \quad (3.14)$$

И наоборот, для $h > 0$ функция $\varepsilon(\lambda)$ имеет два вещественных корня, следовательно,

$$0 \in \sigma\left(e^{\frac{\varepsilon(\lambda)}{T}} - e^{\pm\phi(\lambda)}\right), \quad h > 0. \quad (3.15)$$

Таким образом, принимая во внимание (3.14), (3.15), мы потребуем, чтобы классическая функция $\phi(\lambda) = \phi_A(\lambda) - \phi_D(\lambda)$ была такова, что детерминанты операторов $\hat{G}_{11}$ и $\hat{G}_{22}$ не имели бы вещественных нулей при $h < 0$ и чтобы они оба имели по два вещественных корня при $h > 0$.

4. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

В этом разделе мы начинаем асимптотический анализ задачи Римана (3.1б) с матрицей скачка (3.11). Мы отсылаем читателя к работам [38] и [39], в которых представлен нелинейный метод перевала для классического НУШ, чтобы убедиться в том, что все наши основные операторные конструкции имеют свои матричные аналоги. В частности, в этом и следующих разделах мы совершаем первый шаг данного метода, т.е. приводим матрицу скачка к должному верхне- и нижнетреугольному виду с последующей деформацией вещественной оси в контуры наискорейшего спуска для экспонент $\pm\tau(\lambda)$. Все рассуждения этого раздела очень близки к рассуждениям из работы [45].

Начнем со случая отрицательного химического потенциала. Пусть, как и ранее, λ_0 означает седловую точку функции $\tau(\lambda)$, т.е. (см. (3.6), (3.7))

$$\lambda_0 = \frac{x}{2t}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим следующую подстановку:

$$\hat{\chi}(\lambda) = \hat{\Phi}(\lambda)\hat{\mathcal{R}}(\lambda), \quad (4.2)$$

где $\hat{\Phi}(\lambda)$ – новая неизвестная операторнозначная матрица, а $\hat{\mathcal{R}}(\lambda)$ является диагональным хэт-оператором

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{\varrho}(\lambda) & 0 \\ 0 & (\hat{\varrho}^T(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Здесь $\hat{\varrho}(\lambda)$ – решение задачи Римана:

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}(\lambda) &\rightarrow \hat{i} \equiv \delta(u - v), \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ \hat{\varrho}(\lambda) &\text{ – аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \mathbb{R}; \\ \hat{\varrho}_-(\lambda) &= \hat{\varrho}_+(\lambda)(\theta(\lambda_0 - \lambda)\hat{G}_{11} + \theta(\lambda - \lambda_0)(\hat{G}_{22}^T)^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{4.4в}$$

и ядро $\hat{\varrho}(\lambda|u, v)$ интегрируемо в точке $\lambda = \lambda_0$ (ср. с функцией $\delta(\lambda)$ в [38, 39]). Задача Римана (4.4в) выглядит как скалярная, однако следует помнить, что $\hat{\varrho}(\lambda) \equiv \hat{\varrho}(\lambda|u, v)$ и $\hat{G}_{jk}(\lambda) \equiv \hat{G}_{jk}(\lambda|u, v)$ суть интегральные операторы. Символы $\hat{\varrho}^T(\lambda)$, так же как и $\hat{G}_{22}^T(\lambda)$, означают транспонирование операторов: $\hat{\varrho}^T(\lambda|u, v) = \hat{\varrho}(\lambda|v, u)$ и $\hat{G}_{22}^T(\lambda|u, v) = \hat{G}_{22}(\lambda|v, u)$, соответственно; $\theta(\lambda)$ – функция Хэвисайда

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}\tag{4.5}$$

Так как оператор скачка в (4.4в) имеет разрыв в точке $\lambda = \lambda_0$, мы наложим дополнительное условие интегрируемости решения задачи Римана (4.4в) (ср. со стандартными условиями [40] теории факторизации матричных функций). Напомним также, что мы рассматриваем случай, когда $\det \hat{G}_{11}$ и $\det \hat{G}_{22}$ не равны нулю на вещественной оси, и, следовательно, оператор скачка $\theta(\lambda_0 - \lambda)\hat{G}_{11}(\lambda) + \theta(\lambda - \lambda_0)(\hat{G}_{22}^T(\lambda))^{-1}$ хорошо определен.

Итак, мы получаем новую задачу Римана для $\hat{\Phi}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\lambda) &\rightarrow \hat{I}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ \hat{\Phi}(\lambda) &\text{ – аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \mathbb{R}; \\ \hat{\Phi}_-(\lambda) &= \hat{\Phi}_+(\lambda)\hat{G}_{\Phi}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{4.6г}$$

где

$$\hat{G}_{\Phi}(\lambda) = \hat{\mathcal{R}}_+(\lambda)\hat{G}(\lambda)\hat{\mathcal{R}}_-^{-1}(\lambda).\tag{4.7}$$

Коэффициенты $\hat{b}$ и $\hat{c}$ асимптотического разложения первоначального оператора $\hat{\chi}(\lambda)$ (задачи Римана (3.1б)) легко могут быть выражены через асимптотические разложения операторов $\hat{\Phi}(\lambda)$ и $\hat{\varrho}(\lambda)$:

$$\hat{\Phi} = \hat{I} + \frac{\hat{\Phi}_0}{\lambda} + \frac{\hat{\Phi}_1}{\lambda^2} + \dots,\tag{4.8}$$

$$\hat{\varrho} = \hat{i} + \frac{\hat{\varrho}_0}{\lambda} + \frac{\hat{\varrho}_1}{\lambda^2} + \dots.\tag{4.9}$$

В частности, легко видеть, что

$$\begin{aligned}\hat{b}_{11} &= (\hat{\Phi}_0)_{11} + \hat{\varrho}_0, \\ \hat{c}_{22} - \hat{c}_{11} &= (\hat{\Phi}_1)_{22} - (\hat{\Phi}_1)_{11} - (\hat{\Phi}_0)_{22}\hat{\varrho}_0^T - (\hat{\Phi}_0)_{11}\hat{\varrho}_0 - \hat{\varrho}_1 - \hat{\varrho}_1^T + (\hat{\varrho}_0^T)^2.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Рассмотрим функцию $\Delta(\lambda) = \det \hat{\rho}(\lambda)$. Подчеркнем, что $\Delta(\lambda)$ является именно функцией, а не оператором. Важную роль будет играть асимптотическое разложение этой функции при $\lambda \rightarrow \infty$. Это разложение удобно записать в экспоненциальной форме

$$\Delta = \exp \left\{ \frac{\Delta_0}{\lambda} + \frac{\Delta_1}{\lambda^2} + \dots \right\}. \quad (4.11)$$

Для того чтобы найти первые логарифмические производные определителя Фредгольма, нам нужно знать только следы операторов $\hat{b}_{11}$ и $\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}$ (см. (2.19)). Поэтому, беря следы в (4.10), мы приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{b}_{11} &= \text{tr}(\hat{\Phi}_0)_{11} + \Delta_0, \\ \text{tr}(\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}) &= \text{tr}[(\hat{\Phi}_1)_{22} - (\hat{\Phi}_1)_{11} - (\hat{\Phi}_0)_{22}\hat{\rho}_0^T - (\hat{\Phi}_0)_{11}\hat{\rho}_0] - 2\Delta_1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Рассмотрим теперь матрицу скачка $\hat{G}_\Phi$. С помощью соотношений

$$(|1\rangle\langle 1|)^T = |2\rangle\langle 2|, \quad (|k\rangle\langle j|)^T = |k\rangle\langle j|, \quad k \neq j, \quad (4.13)$$

и

$$(|k\rangle\langle j|)(|j\rangle\langle l|) = |k\rangle\langle l|, \quad k, j, l = 1, 2, \quad (4.14)$$

можно легко проверить, что

$$\begin{aligned} \hat{G}_{22} - \hat{G}_{21}(\hat{G}_{11})^{-1}\hat{G}_{12} &= (\hat{G}_{11}^T)^{-1}, \\ \hat{G}_{11} - \hat{G}_{12}(\hat{G}_{22})^{-1}\hat{G}_{21} &= (\hat{G}_{22}^T)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В силу этих свойств матрица скачка $\hat{G}_\Phi$ имеет вид

$$\hat{G}_\Phi = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{P}e^\tau \\ \hat{Q}e^{-\tau} & \hat{i} + \hat{Q}\hat{P} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \lambda < \lambda_0, \quad (4.16)$$

где

$$\hat{Q}e^{-\tau} = (\hat{\rho}_+^T)^{-1}\hat{G}_{21}(\hat{G}_{11})^{-1}\hat{\rho}_+^{-1}, \quad (4.17)$$

$$\hat{P}e^\tau = \hat{\rho}_-(\hat{G}_{11})^{-1}\hat{G}_{12}\hat{\rho}_-^T, \quad (4.18)$$

и

$$\hat{G}_\Phi = \begin{pmatrix} \hat{i} + \hat{\tilde{P}}\hat{\tilde{Q}} & \hat{\tilde{P}}e^\tau \\ \hat{\tilde{Q}}e^{-\tau} & \hat{i} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \lambda > \lambda_0, \quad (4.19)$$

где

$$\hat{\tilde{Q}}e^{-\tau} = (\hat{\rho}_-^T)^{-1}(\hat{G}_{22})^{-1}\hat{G}_{21}\hat{\rho}_-^{-1}, \quad (4.20)$$

$$\hat{\tilde{P}}e^\tau = \hat{\rho}_+\hat{G}_{12}(\hat{G}_{22})^{-1}\hat{\rho}_+^T. \quad (4.21)$$

Поэтому матрица скачка может быть факторизована следующим образом:

$$\begin{aligned}\widehat{G}_\Phi &= \widehat{M}_+ \widehat{M}_- & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \widehat{G}_\Phi &= \widehat{N}_+ \widehat{N}_- & \text{при } \lambda > \lambda_0,\end{aligned}\quad (4.22)$$

где

$$\widehat{M}_+ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \widehat{Q}e^{-\tau} & i \end{pmatrix}, \quad \widehat{M}_- = \begin{pmatrix} i & \widehat{P}e^\tau \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\widehat{N}_+ = \begin{pmatrix} i & \widehat{P}e^\tau \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \widehat{N}_- = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \widehat{Q}e^{-\tau} & i \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Заметим, что $\widehat{Q}$ и $\widehat{P}$ могут быть аналитически продолжены в окрестность действительной оси в верхнюю полуплоскость. Аналогично $\widehat{\bar{Q}}$ и $\widehat{\bar{P}}$ могут быть продолжены в некоторую полосу в нижней полуплоскости.

Рис. 1. Контур для новой задачи Римана.

Рассмотрим новый контур, который показан на рис. 1. Данный контур состоит из четырех ветвей C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , начинающихся в седловой точке λ_0 (стрелки указывают положительное направление). Ветви C_j и действительная ось являются границами четырех полубесконечных “клиньев” Ω_j ($j = 1, \dots, 4$). Матрицы $N_\pm$ могут быть аналитически продолжены соответственно в клинья Ω_1 и Ω_4 , матрицы $M_\pm$ – в клинья Ω_2 и Ω_3 .

Определим хэт-оператор $\widehat{U}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\widehat{U} &= \widehat{\Phi}, & \lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4, \\ \widehat{U} &= \widehat{\Phi} \widehat{N}_+, & \lambda \in \Omega_1, \\ \widehat{U} &= \widehat{\Phi} \widehat{M}_+, & \lambda \in \Omega_2, \\ \widehat{U} &= \widehat{\Phi} \widehat{M}_-^{-1}, & \lambda \in \Omega_3, \\ \widehat{U} &= \widehat{\Phi} \widehat{N}_-^{-1}, & \lambda \in \Omega_4\end{aligned}\quad (4.25)$$

(см. рис. 1). Тогда $\widehat{U}$ не имеет скачка на вещественной оси, зато имеет скачки на новом контуре $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Теперь для хэт-оператора $\widehat{U}$ может быть сформулирована следующая задача Римана:

$$\widehat{U}(\lambda) \rightarrow \hat{I}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad (4.26д')$$

$$\widehat{U}(\lambda) - \text{аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin C; \quad (4.26д'')$$

$$\widehat{U}_- = \widehat{U}_+ \widehat{N}_+, \quad \lambda \in C_1, \quad (4.26д''')$$

$$\widehat{U}_- = \widehat{U}_+ \widehat{M}_+, \quad \lambda \in C_2, \quad (4.27д)$$

$$\widehat{U}_- = \widehat{U}_+ \widehat{M}_-, \quad \lambda \in C_3, \quad (4.28д)$$

$$\widehat{U}_- = \widehat{U}_+ \widehat{N}_-, \quad \lambda \in C_4, \quad (4.29д)$$

где $\widehat{U}_{\pm}$ суть граничные значения $\widehat{U}$ соответственно справа и слева от контура C .

Легко видеть, что все матрицы скачка в формулах (4.26д)–(4.29д) имеют вид

$$\hat{I} + o(e^{-t^{2\delta}}) \quad \text{при} \quad |\lambda - \lambda_0| > t^{-1/2+\delta}, \quad (4.30)$$

где δ – произвольное малое положительное число. Таким образом, мы можем положить $\widehat{N}_{\pm} = \widehat{M}_{\pm} \approx \hat{I}$ с точностью до экспоненциально малых поправок для всех $\lambda \in C$, за исключением малой окрестности седловой точки. Формально, апеллируя к интегральному уравнению (1.15), записанному для контура C и операторнозначной функции $\widehat{U}_+$ (ср. с *неформальными* аргументами [39] для обычного матричного случая), мы заключаем, что

$$\widehat{U} \approx \hat{I} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\Phi} \approx \hat{I} \quad \Rightarrow \quad \hat{\chi} \approx \widehat{\mathcal{R}} \quad (4.31)$$

и, следовательно, коэффициенты асимптотического разложения $\widehat{\Phi}_0$ и $\widehat{\Phi}_1$ асимптотически равны нулю:

$$\widehat{\Phi}_0, \widehat{\Phi}_1 \approx 0. \quad (4.32)$$

Таким образом, аналогично выводам работы [45] следы операторов $\hat{b}_{11}$ и $\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}$ асимптотически зависят только от коэффициентов разложения (4.11) функции $\Delta(\lambda)$ (см. (4.12)):

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{b}_{11} &= \Delta_0 + o(1), \\ \text{tr } (\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}) &= -2\Delta_1 + o(1). \end{aligned} \quad (4.33)$$

С другой стороны, несложно найти $\Delta(\lambda)$, т.к. из задачи Римана (4.4в) для оператора $\hat{\rho}(\lambda)$ вытекает следующая скалярная задача Римана для его детерминанта $\Delta(\lambda)$ (ср. (2.11)–(2.13)):

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &\rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ \Delta(\lambda) &- \text{аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \mathbb{R}; \\ \Delta_-(\lambda) &= \Delta_+(\lambda) \det(\theta(\lambda_0 - \lambda) \widehat{G}_{11} + \theta(\lambda - \lambda_0) (\widehat{G}_{22}^T)^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.34е)$$

Используя то, что оба оператора $\widehat{G}_{11}$ и $\widehat{G}_{22}$ являются суммой единичного оператора $\hat{i}$ и одномерного проектора, мы находим

$$(\widehat{G}_{22}^T)^{-1} = \hat{i} + \frac{Z(\lambda, \lambda) \vartheta(\lambda) e^{\phi_A(\lambda)}}{1 - Z(\lambda, \lambda) \vartheta(\lambda) e^{\phi_A(\lambda)}} |1\rangle\langle 1| \quad (4.35)$$

и (ср. (1.20))

$$\begin{aligned} \det(\theta(\lambda_0 - \lambda) \widehat{G}_{11}(\lambda) + \theta(\lambda - \lambda_0) (\widehat{G}_{22}^T(\lambda))^{-1}) = \\ = (1 - \vartheta(\lambda) (1 + e^{\phi(\lambda) \text{sign}(\lambda - \lambda_0)}))^{\text{sign}(\lambda_0 - \lambda)}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $\text{sign}(\lambda) = \theta(\lambda) - \theta(-\lambda)$ — знаковая функция и $\phi(\lambda) = \phi_A(\lambda) - \phi_D(\lambda)$. Итак, из (2.14) следует, что решение задачи Римана (4.34е) дается явной формулой

$$\Delta = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \text{sign}(\lambda_0 - \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu) (1 + e^{\phi(\mu) \text{sign}(\mu - \lambda_0)})) \right\}, \quad (4.37)$$

и, следовательно,

$$\Delta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \text{sign}(\lambda_0 - \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu) (1 + e^{\phi(\mu) \text{sign}(\mu - \lambda_0)})), \quad (4.38)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mu d\mu \text{sign}(\lambda_0 - \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu) (1 + e^{\phi(\mu) \text{sign}(\mu - \lambda_0)})). \quad (4.39)$$

Логарифмические производные детерминанта Фредгольма по переменным t и λ_0 равны

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \partial_{\lambda_0} \ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= i \text{tr} \hat{b}_{11} = i \Delta_0 + o(1), \\ \left(\partial_t - \frac{\lambda_0}{t} \partial_{\lambda_0} \right) \ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= i \text{tr}(\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}) = -2i \Delta_1 + o(1). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Интегрируя эти соотношения по t и λ_0 , мы приходим к формуле

$$\ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu |x - 2\mu t| \ln(1 - \vartheta(\mu) (1 + e^{\phi(\mu) \text{sign}(\mu - \lambda_0)})) + \mathcal{O}(\ln t), \quad (4.41)$$

где $x = 2t\lambda_0$, $t \rightarrow \infty$. Замечательно, что лидирующий член в правой части формулы (4.41) не зависит от параметра регуляризации ϵ . Следует также отметить, что формула (4.41) для асимптотики фредгольмова детерминанта в точности совпадает с формулой, полученной в [4] с помощью независимых и более прямых методов. Данный факт частично обосновывает наши в основном формальные манипуляции с операторнозначными задачами Римана.

5. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

В случае положительного химического потенциала метод факторизации, рассмотренный в разделе 4, не применим непосредственно к матрице скачка (3.11). Действительно, теперь детерминанты операторов $\widehat{G}_{11}(\lambda)$ и $\widehat{G}_{22}(\lambda)$ имеют нули на вещественной оси, и скалярная задача Римана (4.34e) для функции $\Delta(\lambda) = \det \widehat{q}(\lambda)$ некорректно поставлена. Не существует также и факторизации (4.22), ибо операторы $\widehat{Q}$, $\widehat{P}$, $\widehat{\bar{P}}$ и $\widehat{\bar{Q}}$ имеют сингулярности на вещественной оси (см. (4.17)–(4.21)).

В данной ситуации можно воспользоваться методом, аналогичным тому, который был предложен для предела свободных фермионов в [29]. Во-первых, необходимо уточнить положение нулей детерминантов относительно седловой точки λ_0 . Обозначим нули функции

$$\det \widehat{G}_{11}(\lambda) = 1 - \vartheta(\lambda)Z(\lambda, \lambda)e^{\phi_D(\lambda)} = 1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{-\phi(\lambda)}),$$

$$\phi(\lambda) = \phi_A(\lambda) - \phi_D(\lambda),$$

через Λ_j , $j = 1, 2$, $\Lambda_1 < \Lambda_2$. Мы остановимся на случае

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < \lambda_0,$$

предполагая в то же время, что нули детерминанта $\det \widehat{G}_{22}(\lambda)$ лежат слева от λ_0 (см. аргументы в конце раздела 3). Все другие возможные случаи положения корней могут быть рассмотрены аналогичным образом. Более того, как и в случае свободных фермионов [29], разница в расположении корней на действительной оси не оказывает влияния на конечный результат для асимптотики. Важным, однако, является предположение, что ни один из корней не расположен вблизи седловой точки.

Во-вторых, заметим, что интегральный оператор $\tilde{I} + \tilde{V}$ может быть продолжен в окрестность вещественной оси, следовательно, можно слегка деформировать контур интегрирования в этой окрестности. Определитель Фредгольма, очевидно, не зависит от такой деформации.

Рис. 2. Деформированный контур.

Деформированный контур Γ изображен на рис. 2. Позднее мы увидим, что данный выбор деформации контура гарантирует разрешимость скалярной задачи (4.34е) для функции $\Delta(\lambda)$.

Как и в случае отрицательного химического потенциала, сделаем подстановку

$$\hat{\chi}(\lambda) = \hat{\Phi}(\lambda)\hat{\mathcal{R}}(\lambda), \quad (5.1)$$

где, как и прежде, $\hat{\mathcal{R}}(\lambda)$ является диагональным хэт-оператором

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{\varrho}(\lambda) & 0 \\ 0 & (\hat{\varrho}^T(\lambda))^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

и $\hat{\varrho}(\lambda)$ удовлетворяет задаче Римана:

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}(\lambda) &\rightarrow \hat{i}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ \hat{\varrho}(\lambda) &\text{ — аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \Gamma; \\ \hat{\varrho}_-(\lambda) &= \hat{\varrho}_+(\lambda)(\theta(\lambda_0 - \lambda)\hat{G}_{11} + \theta(\lambda - \lambda_0)(\hat{G}_{22}^T)^{-1}), \quad \lambda \in \Gamma. \end{aligned} \quad (5.3\text{ж})$$

Разница между задачей Римана (4.4в), рассмотренной в предыдущем разделе, и задачей Римана (5.3ж) состоит в том, что последняя сформулирована на контуре Γ вместо вещественной оси. Аналогично обе задачи Римана: операторнозначная для $\hat{\Phi}(\lambda)$ и скалярная для $\Delta(\lambda) = \det \hat{\varrho}(\lambda)$, тоже формулируются теперь на контуре Γ . В силу выбора контура Γ функция

$$\arg \det(\theta(\lambda_0 - \lambda)\hat{G}_{11}(\lambda) + \theta(\lambda - \lambda_0)(\hat{G}_{22}^T)^{-1}(\lambda))$$

может быть определена так, чтобы она являлась непрерывной для всех $\lambda \neq \lambda_0$ и стремилась к нулю при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Другими словами, задача Римана для Δ не имеет индекса и, следовательно, корректно поставлена. Используя снова общую формулу (2.14) (с заменой вещественной оси на контур Γ), мы имеем

$$\Delta = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \operatorname{sign}(\lambda_0 - \Re \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \operatorname{sign}(\Re \mu - \lambda_0)})) \right\} \quad (5.4)$$

(ср. (4.37)).

Матрица скачка $\hat{G}_{\Phi}$ дается теми же формулами (4.16)–(4.21), как и ранее. Операторы $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ имеют сингулярности в точках $\Lambda_{1,2}$, и, следовательно, мы сталкиваемся с невозможностью аналитического продолжения операторных матриц $\hat{M}_+$ и $\hat{M}_-$ (сингулярности матриц $\hat{N}_{\pm}$ несущественны, ибо предполагается, что нули функции $\det \hat{G}_{22}$ лежат слева от λ_0). Поэтому, прежде чем факторизовать матрицу скачка для $\hat{\Phi}$, мы сделаем еще одну подстановку (ср. [29]):

$$\hat{\Phi}(\lambda) = (\lambda \hat{I} + \hat{\Pi})\hat{\Phi}^{(0)}(\lambda) \begin{pmatrix} (\lambda - \Lambda_2)\hat{i} & 0 \\ 0 & (\lambda - \Lambda_1)\hat{i} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.5)$$

Здесь $\widehat{\Pi}$ – оператор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} (\Lambda_2 \hat{I} + \widehat{\Pi}) \widehat{\Phi}^{(0)}(\Lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0, \\ (\Lambda_1 \hat{I} + \widehat{\Pi}) \widehat{\Phi}^{(0)}(\Lambda_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Задача Римана для оператора $\widehat{\Phi}^{(0)}(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}^{(0)}(\lambda) &\rightarrow \hat{I}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ \widehat{\Phi}^{(0)}(\lambda) &\text{ – аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin \Gamma; \\ \widehat{\Phi}_-^{(0)}(\lambda) &= \widehat{\Phi}_+^{(0)}(\lambda) \widehat{G}_s(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где матрицы скачка $\widehat{G}_s$ и $\widehat{G}_\Phi$ (4.7) связаны соотношением

$$\widehat{G}_s(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - \Lambda_2)\hat{i} & 0 \\ 0 & (\lambda - \Lambda_1)\hat{i} \end{pmatrix}^{-1} \widehat{G}_\Phi(\lambda) \begin{pmatrix} (\lambda - \Lambda_2)\hat{i} & 0 \\ 0 & (\lambda - \Lambda_1)\hat{i} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Разумеется, теперь для $\widehat{G}_\Phi$ следует выбирать оператор $\hat{Q}$, удовлетворяющий задаче Римана (5.3ж).

Вследствие того что корни Λ_1 и Λ_2 (так же, как и корни $\det \widehat{G}_{22}(\lambda)$) меньше λ_0 , факторизация матрицы $\widehat{G}_s$ в области справа от седловой точки дает нам матрицы $\widehat{N}_\pm$, чья аналитичность в соответствующих полуплоскостях очевидна. Что же касается области $\lambda < \lambda_0$, то в ней матрица $\widehat{G}_s$ имеет вид

$$\widehat{G}_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \widehat{P}^{(1)}e^\tau \\ \widehat{Q}^{(1)}e^{-\tau} & \hat{i} + \widehat{Q}^{(1)}\widehat{P}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Здесь

$$\widehat{P}^{(1)}(\lambda) = \widehat{P}(\lambda) \left(\frac{\lambda - \Lambda_1}{\lambda - \Lambda_2} \right), \quad \widehat{Q}^{(1)}(\lambda) = \widehat{Q}(\lambda) \left(\frac{\lambda - \Lambda_2}{\lambda - \Lambda_1} \right), \quad (5.10)$$

и операторы $\widehat{Q}$ и $\widehat{P}$ даются формулами (4.17) и (4.18). Таким образом, матрица скачка $\widehat{G}_s$ может быть факторизована в области $\lambda < \lambda_0$ следующим образом:

$$\widehat{G}_s = \widehat{M}_+ \widehat{M}_-, \quad (5.11)$$

где

$$\widehat{M}_+ = \begin{pmatrix} \hat{i} & 0 \\ \widehat{Q}^{(1)}e^{-\tau} & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad \widehat{M}_- = \begin{pmatrix} \hat{i} & \widehat{P}^{(1)}e^\tau \\ 0 & \hat{i} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

С помощью явных формул (3.11) для операторов $\widehat{G}_{jk}$ можно записать

$$Q^{(1)}(\lambda) = q^{(1)}(\lambda) (\hat{\varrho}_+^T)^{-1}(\lambda) |2\rangle \langle 1| \hat{\varrho}_+^{-1}(\lambda), \quad (5.13)$$

$$P^{(1)}(\lambda) = p^{(1)}(\lambda) \hat{\varrho}_-(\lambda) |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_-^T(\lambda), \quad (5.14)$$

где

$$p^{(1)}(\lambda) = \frac{2\pi i Z(\lambda, \lambda) (\vartheta(\lambda) - 1) e^{\psi(\lambda)}}{1 - Z(\lambda, \lambda) \vartheta(\lambda) e^{\phi_D(\lambda)}} \left(\frac{\lambda - \Lambda_1}{\lambda - \Lambda_2} \right), \quad (5.15)$$

$$q^{(1)}(\lambda) = \frac{\vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_A(\lambda) + \phi_D(\lambda) - \psi(\lambda)}}{2\pi i (1 - Z(\lambda, \lambda) \vartheta(\lambda) e^{\phi_D(\lambda)})} \left(\frac{\lambda - \Lambda_2}{\lambda - \Lambda_1} \right). \quad (5.16)$$

Заметим, что знаменатель в этих формулах является в точности детерминантом оператора $\widehat{G}_{11}$:

$$\det \widehat{G}_{11}(\lambda) = 1 - Z(\lambda, \lambda) \vartheta(\lambda) e^{\phi_D(\lambda)}, \quad (5.17)$$

и он имеет нули при $\lambda = \Lambda_{1,2}$. Однако легко видеть, что $p^{(1)}(\lambda)$ не имеет полюса в точке $\lambda = \Lambda_1$, так же как и $q^{(1)}(\lambda)$ не имеет полюса в точке $\lambda = \Lambda_2$. Таким образом, функция $p^{(1)}(\lambda)$ (и, следовательно, матрица $\widehat{M}_-$) может быть аналитически продолжена в некоторую окрестность вещественной оси в нижней полуплоскости. Аналогично матрица $\widehat{M}_+$ может быть продолжена в некоторую окрестность вещественной оси в верхней полуплоскости. Следовательно, мы снова приходим к контуру рис. 1.

Дальнейшие рассуждения абсолютно тождественны тем, которые проводились в предыдущем разделе. Вводя хэт-оператор $\widehat{U}(\lambda)$ при помощи формул (4.25) (с заменой $\widehat{\Phi}$ на $\widehat{\Phi}^{(0)}$), мы заключаем, что все матрицы скачка, связанные с $\widehat{U}(\lambda)$, экспоненциально малы для больших значений t на контуре C (см. рис. 1) вне окрестности λ_0 . Поэтому мы снова получаем, что

$$\widehat{U} \approx \widehat{I}. \quad (5.18)$$

Однако, в отличие от предыдущего случая, для того чтобы найти исходное решение $\widehat{\chi}$, нам нужно принять во внимание вклад хэт-оператора $\widehat{\Pi}$ (5.5).

Система уравнений (5.6) дает

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_{11} &= -\Lambda_1 \widehat{i} + \Lambda_{12} \widehat{\Phi}_{11}^{(0)}(\Lambda_2) \widehat{D}, \\ \widehat{\Pi}_{12} &= \Lambda_{21} \widehat{\Phi}_{11}^{(0)}(\Lambda_2) \widehat{D} \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1) (\widehat{\Phi}_{22}^{(0)}(\Lambda_1))^{-1}, \\ \widehat{\Pi}_{21} &= \Lambda_{12} \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2) \widehat{D}, \\ \widehat{\Pi}_{22} &= -\Lambda_1 \widehat{i} + \Lambda_{21} \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2) \widehat{D} \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1) (\widehat{\Phi}_{22}^{(0)}(\Lambda_1))^{-1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $\Lambda_{jk} = \Lambda_j - \Lambda_k$ и

$$\widehat{D} = [\widehat{\Phi}_{11}^{(0)}(\Lambda_2) - \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1) (\widehat{\Phi}_{22}^{(0)}(\Lambda_1))^{-1} \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2)]^{-1}. \quad (5.20)$$

Решение $\widehat{\Phi}^{(0)}(\lambda)$ задачи Римана (5.7з) асимптотически равно $\widehat{M}_+^{-1}$ и $\widehat{M}_-$ в областях Ω_2 и Ω_3 , соответственно. Следовательно, имеем

$$\widehat{\Phi}^{(0)}(\Lambda_1) \approx \widehat{M}_-(\Lambda_1) = \begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{P}^{(1)}(\Lambda_1) e^{\tau(\Lambda_1)} \\ 0 & \widehat{i} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\widehat{\Phi}^{(0)}(\Lambda_2) \approx \widehat{M}_+^{-1}(\Lambda_2) = \begin{pmatrix} \widehat{i} & 0 \\ -\widehat{Q}^{(1)}(\Lambda_2) e^{-\tau(\Lambda_2)} & \widehat{i} \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_{11}^{(0)}(\Lambda_1), \widehat{\Phi}_{11}^{(0)}(\Lambda_2), \widehat{\Phi}_{22}^{(0)}(\Lambda_1), \widehat{\Phi}_{22}^{(0)}(\Lambda_2) &\approx \hat{i}, \\ \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_1), \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_2) &\approx 0, \\ \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2) &\approx -\widehat{Q}^{(1)}(\Lambda_2)e^{-\tau(\Lambda_2)}, \\ \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1) &\approx \widehat{P}^{(1)}(\Lambda_1)e^{\tau(\Lambda_1)}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Поэтому можно заменить уравнения (5.19) на следующие:

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_{11} &\approx -\Lambda_1 \hat{i} + \Lambda_{12} \widehat{D}, & \widehat{\Pi}_{12} &\approx \Lambda_{21} \widehat{D} \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1), \\ \widehat{\Pi}_{21} &\approx \Lambda_{12} \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2) \widehat{D}, & \widehat{\Pi}_{22} &\approx -\Lambda_1 \hat{i} + \Lambda_{21} \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2) \widehat{D} \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1)\end{aligned}\tag{5.24}$$

и

$$\widehat{D} \approx [\hat{i} - \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1) \widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2)]^{-1}.\tag{5.25}$$

Определим новые векторы

$$\begin{aligned}|1\rangle &= \frac{\delta_\epsilon(u - \Lambda_i) Z(u, \Lambda_i)}{\sqrt{\mathcal{N}_\epsilon(\Lambda_i) Z(\Lambda_i, \Lambda_i)}}, & \langle 1| &= \sqrt{\frac{Z(\Lambda_i, \Lambda_i)}{\mathcal{N}_\epsilon(\Lambda_i)}} Z(v, \Lambda_i), \\ |2\rangle &= \sqrt{\frac{Z(\Lambda_i, \Lambda_i)}{\mathcal{N}_\epsilon(\Lambda_i)}} Z(u, \Lambda_i), & \langle 2| &= \frac{\delta_\epsilon(v - \Lambda_i) Z(v, \Lambda_i)}{\sqrt{\mathcal{N}_\epsilon(\Lambda_i) Z(\Lambda_i, \Lambda_i)}},\end{aligned}\tag{5.26}$$

где $i = 1, 2$, и введем две величины:

$$\alpha = \langle 1| \varrho_+^{-1}(\Lambda_2) \varrho_-(\Lambda_1) |1\rangle,\tag{5.27}$$

$$\beta = \langle 2| \varrho_-^T(\Lambda_1) (\varrho_+^T(\Lambda_2))^{-1} |2\rangle.\tag{5.28}$$

Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_{21}^{(0)}(\Lambda_2) &\approx -q^{(1)}(\Lambda_2) e^{-\tau(\Lambda_2)} (\hat{\varrho}_+^T(\Lambda_2))^{-1} |2\rangle \langle 1| \hat{\varrho}_+^{-1}(\Lambda_2), \\ \widehat{\Phi}_{12}^{(0)}(\Lambda_1) &\approx p^{(1)}(\Lambda_1) e^{\tau(\Lambda_1)} \hat{\varrho}_-(\Lambda_1) |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_-^T(\Lambda_1)\end{aligned}\tag{5.29}$$

и, следовательно,

$$\widehat{D} \approx \hat{i} - \frac{\beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}}{1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}} \varrho_-(\Lambda_1) |1\rangle \langle 1| \varrho_+^{-1}(\Lambda_2),\tag{5.30}$$

$$\widehat{\Pi}_{11} \approx -\Lambda_2 \hat{i} + \frac{\Lambda_{21} \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}}{1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}} \varrho_-(\Lambda_1) |1\rangle \langle 1| \varrho_+^{-1}(\Lambda_2),\tag{5.31}$$

$$\widehat{\Pi}_{12} \approx \frac{\Lambda_{21} p^{(1)}(\Lambda_1) e^{\tau(\Lambda_1)}}{1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}} \varrho_-(\Lambda_1) |1\rangle \langle 2| \varrho_-^T(\Lambda_1).\tag{5.32}$$

Введем теперь коэффициенты асимптотического разложения

$$\widehat{\Phi}^{(0)}(\lambda) = \hat{I} + \frac{1}{\lambda} \widehat{B}^{(0)} + \frac{1}{\lambda^2} \widehat{C}^{(0)} + \dots \quad (5.33)$$

Так как $\widehat{\Phi}^{(0)} \approx \hat{I}$ для комплексных λ , мы получаем, что $\widehat{B}^{(0)}, \widehat{C}^{(0)} \approx 0$. Используя разложение (5.33) и разложение (4.9) для функции $\hat{\varrho}$, мы находим следующие асимптотические представления для операторов $\hat{b}_{kj}$ и $\hat{c}_{kj}$:

$$\hat{b}_{11} = \widehat{\Pi}_{11} + \hat{\varrho}_0 + \Lambda_2 \hat{i} + o(1), \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_{22} - \hat{c}_{11} = & (\Lambda_1 \hat{i} + \widehat{\Pi}_{22})(\Lambda_1 \hat{i} - \hat{\varrho}_0^T) - \\ & - (\Lambda_2 \hat{i} + \widehat{\Pi}_{11})(\Lambda_2 \hat{i} + \hat{\varrho}_0) - \hat{\varrho}_1 - \hat{\varrho}_1^T + (\hat{\varrho}_0^T)^2 + o(1) \end{aligned} \quad (5.35)$$

и

$$\hat{b}_{12} = \widehat{\Pi}_{12} + o(1). \quad (5.36)$$

Логарифмические производные детерминанта Фредгольма по x и t (т.е. λ_0 и t) равны соответственно следам операторов (5.34) и (5.35). Рассмотрим более подробно первую из них. Из (5.31) и (5.34) имеем

$$\hat{b}_{11} = \hat{\varrho}_0 + \frac{\beta \Lambda_{21} p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}}{1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) Q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}} \hat{\varrho}_- (\Lambda_1) |1\rangle \langle 1| \hat{\varrho}_+^{-1}(\Lambda_2) + o(1), \quad (5.37)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{b}_{11} &= \text{tr } \hat{\varrho}_0 + \frac{\alpha \beta \Lambda_{21} p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}}{1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}} + o(1) = \\ &= \text{tr } \hat{\varrho}_0 - i \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}) + o(1). \end{aligned} \quad (5.38)$$

След оператора $\hat{\varrho}_0$, как и прежде, равен первому коэффициенту асимптотического разложения его детерминанта Δ_0 (см. (4.11)), который в силу (5.4) равен

$$\Delta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\mu \text{sign}(\lambda_0 - \Re \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \text{sign}(\Re \mu - \lambda_0)})). \quad (5.39)$$

По сравнению с (4.38) разница состоит в том, что интеграл берется по деформированному контуру Γ , а не по вещественной оси.

Аналогично можно найти след оператора $\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}$. Мы опускаем здесь детали этих вычислений; они достаточно очевидны, хотя и весьма длинные. Конечная формула для лидирующего члена асимптотики фредгольмова детерминанта имеет вид

$$\begin{aligned} \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= (1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\mu |x - 2\mu t| \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \text{sign}(\Re \mu - \lambda_0)})) \right\}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Символ $|x - 2\mu t|$ следует понимать в смысле

$$|x - 2\mu t| \equiv (x - 2\mu t) \operatorname{sign}(\Re \mu - \lambda_0).$$

Мы хотели бы обратить внимание на разницу между случаями положительного и отрицательного химического потенциала. В последнем случае детерминанты операторов $\hat{G}_{11}$ и $\hat{G}_{22}$:

$$\det \hat{G}_{11(22)}(\lambda) = 1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{-(+)\phi(\lambda)}), \quad (5.41)$$

не имеют нулей на вещественной оси и на ней выполняется условие нулевого индекса

$$\arg \det(\theta(\lambda_0 - \lambda)\hat{G}_{11}(\lambda) + \theta(\lambda - \lambda_0)(\hat{G}_{22}^T)^{-1}(\lambda)) \rightarrow 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Таким образом, интеграл в (4.41) хорошо определен. В случае положительного химического потенциала $\det \hat{G}_{11}$ имеет действительные корни, поэтому, для того чтобы удовлетворить условию (5.42), следует выбирать контур интегрирования более аккуратно. Мы видели, что это означает замену вещественной оси на контур Γ .

Второе важное различие состоит в том, что в случае отрицательного химического потенциала решение задачи Римана (3.16) является диагональным (4.31). Поэтому коэффициент $\hat{b}_{12}$ асимптотически равен нулю (в следующем разделе мы увидим, что в действительности $\hat{b}_{12} = \mathcal{O}(t^{-1/2})$). Это означает, что в случае отрицательного химического потенциала точность, которой мы достигли, недостаточна для вычисления полной комбинации

$$\int du dv \hat{b}_{12} \cdot \det(\tilde{I} + \tilde{V}),$$

которая описывает корреляционную функцию. И наоборот, в случае положительного химического потенциала получается ненулевое значение для $\hat{b}_{12}$ уже в лидирующем члене асимптотики

$$\hat{b}_{12} = \frac{\Lambda_{21} p^{(1)}(\Lambda_1) e^{\tau(\Lambda_1)}}{1 + \alpha \beta p^{(1)}(\Lambda_1) q^{(1)}(\Lambda_2) e^{\tau(\Lambda_1) - \tau(\Lambda_2)}} \hat{\rho}_-(\Lambda_1) |1\rangle \langle 2| \hat{\rho}_-^T(\Lambda_1) + o(1). \quad (5.43)$$

Заметим, что предэкспоненциальный множитель в (5.40) сокращает знаменатель в (5.43), так что мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \Lambda_{21} p^{(1)}(\Lambda_1) e^{\tau(\Lambda_1)} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \hat{\rho}_-(\Lambda_1) |1\rangle \langle 2| \hat{\rho}_-^T(\Lambda_1) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\mu |x - 2\mu t| \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \operatorname{sign}(\Re \mu - \lambda_0)})) \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Как уже было отмечено, разная асимптотика для случаев отрицательного и положительного химического потенциала имеет глубокие физические корни. Это различие становится особенно важным в низкотемпературном пределе.

6. ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА

Оценки, сделанные в предыдущих разделах, недостаточны для всестороннего анализа корреляционной функции (1.1). В частности, мы видели, что в случае отрицательного химического потенциала лидирующий член асимптотики решения задачи Римана (3.16) является диагональным, поэтому мы не можем найти множитель $\hat{b}_{12}$, который необходим для изучения корреляционной функции. Для того чтобы улучшить оценки, полученные выше, необходимо выполнить следующий шаг нелинейного метода перевала, т.е. рассмотреть задачу Римана в окрестности седловой точки – так называемую локализованную задачу Римана. Полагая $\hat{U} \approx \hat{I}$ в (4.31), мы пренебрегаем вкладом окрестности $|\lambda - \lambda_0| < t^{-1/2}$. Теперь же данный вопрос рассматривается более подробно. Разница между случаями положительного и отрицательного химического потенциала теперь уже не является столь существенной, поэтому для простоты мы сконцентрируем внимание только на отрицательном химическом потенциале.

Так как окрестность седловой точки $|\lambda - \lambda_0| < t^{-1/2}$ мала при большом t , то можно было бы заменить матрицы скачка $\hat{N}_{\pm}(\lambda)$ и $\hat{M}_{\pm}(\lambda)$ на их значения в точке λ_0 : $\hat{N}_{\pm}(\lambda_0)$ и $\hat{M}_{\pm}(\lambda_0)$. Однако $\hat{N}_{\pm}(\lambda)$ и $\hat{M}_{\pm}(\lambda)$ хорошо определены только в окрестности λ_0 , но не в самой седловой точке. В самом деле, все они зависят от оператора $\hat{\varrho}$ (см. (4.17), (4.18), (4.20), (4.21), (4.23) и (4.24)). В свою очередь, $\hat{\varrho}$ удовлетворяет задаче Римана (4.4в) с оператором скачка, имеющим разрыв в седловой точке. Напомним условие скачка для граничных значений оператора $\hat{\varrho}$:

$$\hat{\varrho}_- = \hat{\varrho}_+ \hat{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

где

$$\hat{D} = \theta(\lambda_0 - \lambda) \hat{G}_{11} + \theta(\lambda - \lambda_0) (\hat{G}_{22}^T)^{-1}. \quad (6.2)$$

Легко видеть, что

$$\hat{D}_l \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0} \hat{D}(\lambda) \neq \hat{D}_r \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} \hat{D}(\lambda). \quad (6.3)$$

Таким образом, решение $\hat{\varrho}$ задачи Римана (4.4в) имеет точку ветвления в $\lambda = \lambda_0$.

Явное выражение для оператора скачка $\hat{D}$ (6.2) дано в (3.11). Оно имеет следующую структуру:

$$\hat{D} = \theta(\lambda_0 - \lambda) (\hat{i} + f_1(\lambda) \hat{\omega}) + \theta(\lambda - \lambda_0) (\hat{i} + f_2(\lambda) \hat{\omega}). \quad (6.4)$$

Здесь $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= -\vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_D(\lambda)}, \\ f_2(\lambda) &= \frac{\vartheta(\lambda) Z(\lambda, \lambda) e^{\phi_A(\lambda)}}{1 - Z(\lambda, \lambda) \vartheta(\lambda) e^{\phi_A(\lambda)}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

и

$$\hat{\omega}(\lambda) \equiv \hat{\omega}(\lambda|u, v) = |1\rangle\langle 1|. \quad (6.6)$$

В дальнейшем оператор $\widehat{\omega}$ будет играть важную роль. Рассмотрим некоторые свойства этого оператора. Очевидно, что $\widehat{\omega}$ – одномерный проектор со следом, равным 1, следовательно,

$$\widehat{\omega}^n = \widehat{\omega}. \quad (6.7)$$

Определив операторнозначную функцию $(\lambda - \lambda_0)^{\xi \widehat{\omega}}$, где ξ – некоторое число, как формальный ряд Тейлора по $\widehat{\omega}$, мы получим

$$(\lambda - \lambda_0)^{\xi \widehat{\omega}} = \widehat{i} + \widehat{\omega}((\lambda - \lambda_0)^\xi - 1). \quad (6.8)$$

Формула (6.8) будет рассматриваться в качестве неформального определения операторнозначной функции $(\lambda - \lambda_0)^{\xi \widehat{\omega}}$. Предположим также, что ветвь этой функции $(\lambda - \lambda_0)^\xi$ фиксируется условием

$$-\pi < \arg(\lambda - \lambda_0) < \pi. \quad (6.9)$$

Легко проверить следующие свойства:

$$((\lambda - \lambda_0)^{\xi \widehat{\omega}})^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-\xi \widehat{\omega}} = \widehat{i} + \widehat{\omega}((\lambda - \lambda_0)^{-\xi} - 1), \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0)_+^{\xi \widehat{\omega}} (\lambda - \lambda_0)_-^{-\xi \widehat{\omega}} &= \widehat{i} + \theta(\lambda_0 - \lambda) \widehat{\omega} (e^{2\pi i \xi} - 1) = \\ &= \theta(\lambda_0 - \lambda) e^{2\pi i \xi \widehat{\omega}} + \theta(\lambda - \lambda_0) \widehat{i}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Положим

$$\widehat{\varrho}(\lambda) = \widehat{\varrho}^{(c)}(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^{is \widehat{\omega}_0}, \quad (6.12)$$

где $\widehat{\omega}_0 = \widehat{\omega}(\lambda_0)$ и s – некоторый комплексный параметр. Тогда условие скачка для $\widehat{\varrho}^{(c)}$ принимает вид

$$\widehat{\varrho}_-^{(c)} = \widehat{\varrho}_+^{(c)} \widehat{\mathcal{D}}_0, \quad (6.13)$$

где

$$\widehat{\mathcal{D}}_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)_+^{is \widehat{\omega}_0} \widehat{\mathcal{D}}(\lambda) (\lambda - \lambda_0)_-^{-is \widehat{\omega}_0}. \quad (6.14)$$

Мы хотим, чтобы формула (6.12) задавала характер сингулярности оператора $\widehat{\varrho}(\lambda)$ в седловой точке λ_0 , т.е. чтобы $(\pm)$ -значения фактора $\widehat{\varrho}^{(c)}(\lambda)$ были непрерывными в λ_0 . Для того чтобы обеспечить это свойство, потребуем, чтобы $\widehat{\mathcal{D}}_0(\lambda)$ не имел разрыва в точке λ_0 (ср. с анализом обычных задач Римана около точек разрыва коэффициентов скачка [40]). Заметим, что предельные значения в седловой точке оператора $\widehat{\mathcal{D}}(\lambda)$ ($\widehat{\mathcal{D}}_l$ и $\widehat{\mathcal{D}}_r$) коммутируют с $(\lambda - \lambda_0)^{is \widehat{\omega}_0}$. Таким образом, используя (6.11), мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0} \widehat{\mathcal{D}}_0(\lambda) &= e^{-2\pi i s \widehat{\omega}_0} (\widehat{i} + f_1(\lambda_0) \widehat{\omega}_0), \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} \widehat{\mathcal{D}}_0(\lambda) &= \widehat{i} + f_2(\lambda_0) \widehat{\omega}_0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Приравнявая друг другу правые части в (6.15), находим

$$s = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + f_1(\lambda_0)}{1 + f_2(\lambda_0)} \quad (6.16)$$

Рис. 3. Контур и матрицы скачка в окрестности седловой точки.

или, используя (6.5),

$$s = \frac{1}{2\pi} \ln[(1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_D(\lambda_0)})(1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_A(\lambda_0)})], \quad (6.17)$$

где

$$\vartheta_0 = \vartheta(\lambda_0), \quad Z_0 = Z(\lambda_0, \lambda_0). \quad (6.18)$$

Итак, мы нашли поведение оператора $\hat{\varrho}$ в седловой точке. Оно дается формулой (6.12), где $\hat{\varrho}^{(c)}$ имеет пределы, когда λ стремится к λ_0 из верхней и нижней полуплоскостей; оператор $\hat{\omega}$ определен в (6.6), s дается формулой (6.17).

Вернемся теперь к задаче Римана (4.26д)–(4.29д) для хэт-оператора $\widehat{U}$. Мы рассматриваем эту задачу в окрестности точки λ_0 . Соответствующий контур скачка изображен на рис. 3. Он состоит из четырех ветвей. Можно продолжить контур на рис. 3 из окрестности $|\lambda - \lambda_0| < t^{-1/2}$ в бесконечность и рассмотреть новую задачу Римана с условиями скачка на двух бесконечных осях. Такая замена, разумеется, дает ненулевой вклад в решение, однако этот вклад экспоненциально мал из-за присутствия множителей $e^{\pm\tau}$ в матрицах скачка (ср. с классическим анализом осциллирующих интегралов).

Введем символ $\widehat{\mathcal{W}}$, который будет обозначать матрицы M_+ , M_- , N_+ или N_- для соответствующих ветвей контура. Вследствие того что функции $\hat{\varrho}_{\pm}^{(c)}(\lambda)$ непрерывны в λ_0 , мы заменяем $\widehat{\mathcal{W}}$ на $\widehat{\mathcal{W}}_0 = \{\widehat{M}_{\pm}^{(0)}, \widehat{N}_{\pm}^{(0)}\}$, где

$$\widehat{M}_+^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & 0 \\ (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1}(\lambda - \lambda_0)^{-is\hat{\omega}_0^T} \cdot \widehat{Q}^{(0)} \cdot (\lambda - \lambda_0)^{-is\hat{\omega}_0} (\hat{\varrho}_0^{(c)})^{-1} e^{-\tau} & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

$$\widehat{N}_-^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & 0 \\ (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1}(\lambda - \lambda_0)^{-is\hat{\omega}_0^T} \cdot \widehat{Q}^{(0)} \cdot (\lambda - \lambda_0)^{-is\hat{\omega}_0} (\hat{\varrho}_0^{(c)})^{-1} e^{-\tau} & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\widehat{M}_-^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{\varrho}_0^{(c)}(\lambda - \lambda_0)^{is\hat{\omega}_0} \cdot \widehat{P}^{(0)} \cdot (\lambda - \lambda_0)^{is\hat{\omega}_0^T} \hat{\varrho}_0^{(c)T} e^{\tau} \\ 0 & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\widehat{N}_+^{(0)} = \begin{pmatrix} i & \hat{\varrho}_0^{(c)}(\lambda - \lambda_0)^{is\hat{\omega}_0} \cdot \widehat{\widetilde{P}}^{(0)} \cdot (\lambda - \lambda_0)^{is\hat{\omega}_0^T} \hat{\varrho}_0^{(c)T} e^\tau \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Здесь $\hat{\varrho}_0^{(c)} = \hat{\varrho}^{(c)}(\lambda_0)$ и

$$\widehat{Q}^{(0)} e^{-\tau(\lambda_0)} = \widehat{G}_{21}(\lambda_0) (\widehat{G}_{11}(\lambda_0))^{-1}, \quad \widehat{P}^{(0)} e^{\tau(\lambda_0)} = (\widehat{G}_{11}(\lambda_0))^{-1} \widehat{G}_{12}(\lambda_0), \quad (6.23)$$

$$\widehat{\widetilde{Q}}^{(0)} e^{-\tau(\lambda_0)} = (\widehat{G}_{22}(\lambda_0))^{-1} \widehat{G}_{21}(\lambda_0), \quad \widehat{\widetilde{P}}^{(0)} e^{\tau(\lambda_0)} = \widehat{G}_{12}(\lambda_0) (\widehat{G}_{22}(\lambda_0))^{-1}. \quad (6.24)$$

Строго говоря, к функции $\hat{\varrho}_0^{(c)}$, появляющейся в матрицах $\widehat{M}_+^{(0)}$, $\widehat{N}_+^{(0)}$, необходимо добавить индекс плюс, а к функции $\hat{\varrho}_0^{(c)}$, возникающей в матрицах $\widehat{M}_-^{(0)}$, $\widehat{N}_-^{(0)}$, — индекс минус. В случае, если данное различие не является важным, мы обычно будем опускать эти индексы, дабы избежать громоздких обозначений.

Основываясь на опыте классического НУШ (см. [38] и [39]), мы ожидаем, что замена $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_0$ позволит нам удержать члены порядка $t^{-1/2}$ в асимптотическом решении исходной операторнозначной задачи Римана. Эти слагаемые, как уже было объяснено во введении, являются наиболее важными для всестороннего асимптотического анализа корреляционной функции (1.1).

Заменяя $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_0$, мы приблизили точное решение $\widehat{U}(\lambda)$ операторнозначной функцией $\widehat{U}^{(0)}(\lambda)$, которая является решением следующей локализованной задачи Римана (ср. снова [38] и [39]):

$$\begin{aligned} \widehat{U}^{(0)}(\lambda) &\rightarrow \hat{I}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \\ \widehat{U}^{(0)}(\lambda) &\text{ — аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin C; \\ \widehat{U}_-^{(0)} &= \widehat{U}_+^{(0)} \widehat{\mathcal{W}}_0, \quad \lambda \in C, \end{aligned} \quad (6.25и)$$

где C — контур, изображенный на рис. 3. В данном и следующих разделах мы построим явное решение этой задачи.

Совершая подстановку

$$\widehat{U}^{(0)} = \widehat{\Psi} \widehat{S}, \quad (6.26)$$

где

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_0)^{-is\hat{\omega}_0} (\hat{\varrho}_0^{(c)})^{-1} e^{-\tau(\lambda)/2} & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_0)^{is\hat{\omega}_0^T} \hat{\varrho}_0^{(c)T} e^{\tau(\lambda)/2} \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

мы получаем новую задачу Римана для хэт-оператора $\widehat{\Psi}$:

$$\widehat{\Psi}(\lambda) \rightarrow \widehat{S}^{-1}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad (6.28к')$$

$$\widehat{\Psi}(\lambda) \text{ — аналитическая функция } \lambda \text{ при } \lambda \notin C \cup R; \quad (6.28к'')$$

$$\widehat{\Psi}_- = \widehat{\Psi}_+ \widehat{\mathcal{W}}_\Psi, \quad \lambda \in C, \quad (6.28к''')$$

где

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\Psi} = \widehat{S}\widehat{\mathcal{W}}_0\widehat{S}^{-1} = \{\widehat{M}_{\pm, \Psi}^{(0)}, \widehat{N}_{\pm, \Psi}^{(0)}\} \quad (6.29)$$

и

$$\widehat{M}_{+, \Psi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & 0 \\ \widehat{Q}^{(0)} & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad \widehat{N}_{-, \Psi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \widehat{\hat{Q}}^{(0)} & 0 \\ \widehat{Q}^{(0)} & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

$$\widehat{M}_{-, \Psi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \widehat{P}^{(0)} \\ 0 & \hat{i} \end{pmatrix}, \quad \widehat{N}_{+, \Psi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \widehat{\widehat{P}}^{(0)} \\ 0 & \hat{i} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Так как хэт-оператор $\widehat{S}$ зависит от $(\lambda - \lambda_0)^{is\widehat{\omega}_0}$ и $\widehat{\varrho}_0^{(c)}$, то $\widehat{\Psi}$ имеет дополнительные скачки на вещественной оси

$$\widehat{\Psi}_- = \widehat{\Psi}_+ \widehat{K}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (6.32)$$

где

$$\widehat{K} \equiv \widehat{K}_+ = \begin{pmatrix} \hat{i} + f_1(\lambda_0)\widehat{\omega}_0 & 0 \\ 0 & (\hat{i} + f_1(\lambda_0)\widehat{\omega}_0^T)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda < \lambda_0, \quad (6.33)$$

$$\widehat{K} \equiv \widehat{K}_- = \begin{pmatrix} \hat{i} + f_2(\lambda_0)\widehat{\omega}_0 & 0 \\ 0 & (\hat{i} + f_2(\lambda_0)\widehat{\omega}_0^T)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > \lambda_0. \quad (6.34)$$

Функции $f_{1,2}(\lambda)$ определены в (6.5).

Удобно сделать следующую замену переменной λ :

$$\lambda \rightarrow z: \lambda - \lambda_0 = ze^{i\frac{\pi}{4}},$$

так что

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} z^{-is\widehat{\omega}_0} e^{\frac{\pi s\widehat{\omega}_0}{4}} (\widehat{\varrho}_0^{(c)})^{-1} e^{\frac{tz^2}{2} + \frac{it\lambda_0^2}{2}} & 0 \\ 0 & z^{is\widehat{\omega}_0^T} e^{-\frac{\pi s\widehat{\omega}_0^T}{4}} \widehat{\varrho}_0^{(c)T} e^{-\frac{tz^2}{2} - \frac{it\lambda_0^2}{2}} \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Заметим, что матрицы $\widehat{\mathcal{W}}_{\Psi}$ и $\widehat{K}$ не зависят от λ , следовательно, они не изменяются.

Пусть $\hat{\kappa}$ – первый коэффициент асимптотического разложения оператора $\widehat{U}^{(0)}$:

$$\widehat{U}^{(0)} = \hat{I} + \frac{\hat{\kappa}}{\lambda} + \dots \quad (6.36)$$

Тогда асимптотика оператора $\widehat{\Psi}$ дается выражением

$$\widehat{\Psi} = \left(\hat{I} + \frac{\hat{\kappa}}{z} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \dots \right) \widehat{S}^{-1}. \quad (6.37)$$

Вследствие того что все матрицы скачка не зависят от z , мы заключаем, что $(\partial_z \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1}$ является голоморфной функцией в конечной комплексной плоскости. Асимптотика этой “логарифмической производной” $(\partial_z \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1}$ может быть найдена из равенства

$$(\partial_z \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1} = (\partial_z \hat{U}^{(0)})\hat{U}^{(0)-1} - \hat{U}^{(0)}\hat{S}^{-1}\partial_z \hat{S}\hat{U}^{(0)-1}. \quad (6.38)$$

Легко видеть, что

$$\hat{S}^{-1}\partial_z \hat{S} = \begin{pmatrix} tz\hat{i} - \frac{is}{z}\hat{\omega}_0 & 0 \\ 0 & -tz\hat{i} + \frac{is}{z}\hat{\omega}_0^T \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

поэтому

$$(\partial_z \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1} \rightarrow -tz\hat{\sigma}_3 + \mathcal{O}(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad (6.40)$$

где $\hat{\sigma}_3 = i\sigma_3$.

В силу теоремы Лиувилля $(\partial_z \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1}$ является полиномом первого порядка. С помощью (6.37) мы находим

$$(\partial_z \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1} = -tz\hat{\sigma}_3 - t[\hat{\kappa}, \hat{\sigma}_3]e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (6.41)$$

и, следовательно, $\hat{\Psi}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\partial_z \hat{\Psi} = -t(z\hat{\sigma}_3 + [\hat{\kappa}, \hat{\sigma}_3]e^{-i\frac{\pi}{4}})\hat{\Psi}. \quad (6.42)$$

Аргументы, которые привели нас к дифференциальному уравнению (6.42), тоже действительны аргументам, используемым в теории классических интегрируемых систем. Аналогично чисто матричному случаю [38, 39, 41] из “матричного” дифференциального уравнения первого порядка для $\hat{\Psi}$ следует уравнение второго порядка для компонент $\hat{\Psi}_{jk}$. После еще одной замены $\xi = z\sqrt{2t}$ мы получаем, например, для $\hat{\Psi}_{11}$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \hat{\Psi}_{11} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4}\right) \hat{\Psi}_{11} + \hat{\nu} \hat{\Psi}_{11} = 0. \quad (6.43)$$

Здесь $\hat{\nu} = -2it\hat{\kappa}_{12}\hat{\kappa}_{21}$. Данное уравнение выглядит как уравнение параболического цилиндра за исключением того, что $\hat{\nu}$ является оператором. В следующем разделе дается строгое определение решения уравнения (6.43). В настоящий момент можно рассматривать функцию параболического цилиндра (ФПЦ) $D_{\hat{\nu}}(\xi)$ с операторнозначным индексом $\hat{\nu}$ как формальный ряд Тейлора по $\hat{\nu}$. Данный ряд удовлетворяет рекуррентным соотношениям, которые справедливы для обычной ФПЦ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} D_{\hat{\nu}}(\xi) + \frac{\xi}{2} D_{\hat{\nu}}(\xi) - \hat{\nu} D_{\hat{\nu}-1}(\xi) &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} D_{\hat{\nu}}(\xi) - \frac{\xi}{2} D_{\hat{\nu}}(\xi) + D_{\hat{\nu}+1}(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Используя эти свойства, можно непосредственно убедиться в том, что операторнозначная матрица

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} D_{\hat{\nu}}(\xi) & \sqrt{2t}e^{i\frac{\pi}{4}}\hat{\kappa}_{12}D_{\hat{\nu}-i}(i\xi) \\ \sqrt{2t}e^{-i\frac{\pi}{4}}\hat{\kappa}_{21}D_{\hat{\nu}-i}(\xi) & D_{\hat{\nu}}(i\xi) \end{pmatrix} \hat{L} \quad (6.45)$$

удовлетворяет уравнению (6.42). Здесь

$$\hat{\nu} = -2it\hat{\kappa}_{12}\hat{\kappa}_{21}, \quad \hat{\bar{\nu}} = 2it\hat{\kappa}_{21}\hat{\kappa}_{12} \quad (6.46)$$

и $\hat{L}$ – кусочно-постоянный хэт-оператор.

7. ФУНКЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Для того чтобы завершить решение модельной задачи Римана (6.25и) или, что то же самое, задачи Римана (6.28к)–(6.34), необходимо явно определить через матрицы скачка $\widehat{W}_\Psi$ величины $\hat{\kappa}_{jl}$ и $\hat{L}$, входящие в (6.45). Из сравнения разложения (6.36) для $\widehat{U}^{(0)}$ и разложения (2.16) для исходного оператора $\hat{\chi}$ следует, что

$$\hat{\kappa}_{12} = \hat{b}_{12}, \quad \hat{\kappa}_{21} = \hat{b}_{21}. \quad (7.1)$$

Таким образом, для того чтобы получить асимптотику корреляционной функции, нам надо найти именно эти операторы.

Для достижения поставленных целей следует сделать ФПЦ $D_{\hat{\nu}}(\xi)$ с операторнозначным индексом $\hat{\nu}$ неформальным объектом. Фактически надо проконтролировать ее асимптотическое поведение при $\xi \rightarrow \infty$ всюду в комплексной плоскости ξ . Другими словами, аналогично случаю классической ФПЦ мы хотим, чтобы $D_{\hat{\nu}}(\xi)$ была настоящей специальной функцией. Для этого надо знать больше о некоторых специальных свойствах операторов $\hat{\kappa}_{jl}$ и $\hat{\nu}$, которые следуют из постановки задачи Римана (6.28к)–(6.34). В этом и следующем разделах будет показано, что структура матриц скачка (6.30), (6.31), (6.33), (6.34) модельной задачи Римана предполагает очень специальный анзац для этих операторов, который позволяет в конечном итоге свести операторнозначную задачу Римана к матричной. В свою очередь, это дает нам возможность получить явные выражения для $\hat{\kappa}_{jl}$.

Рис. 4. Контур и матрицы скачка в комплексной плоскости ξ .

В предыдущих разделах мы уже сделали замену переменной λ на переменную ξ :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\xi}{\sqrt{2t}} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (7.2)$$

В дальнейшем мы будем работать только с переменной ξ . Поэтому мы представляем здесь контуры скачка в комплексной плоскости ξ . Комплексная ξ -плоскость состоит из шести секторов I, ..., VI. Границы этих секторов C_{i-j} , $i, j = \text{I}, \dots, \text{VI}$, показаны на рис. 4. Они являются контурами скачков для матрицы $\hat{\Psi}$. Соответствующие операторнозначные матрицы скачка также даны на рис. 4. В скобках стоят скалярные аналоги матриц скачка, которые будут обсуждаться позднее.

Кусочно-постоянная матрица $\hat{L}$ и операторы $\hat{\kappa}_{12}$ и $\hat{\kappa}_{21}$ единственным образом определяются из требования, что хэт-оператор $\hat{\Psi}$ (6.45) удовлетворяет условиям скачка, данным в (6.28к), (6.32), и имеет асимптотику (6.37). Эти требования должны обеспечить нам явные выражения для $\hat{\kappa}_{jk}$ и $\hat{L}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать векторы $|1\rangle$, $|2\rangle$, $\langle 1|$ и $\langle 2|$ только в точке $\lambda = \lambda_0$. Поэтому введем новые объекты

$$\begin{aligned} |\overset{\circ}{1}\rangle &= \frac{\delta_\epsilon(u - \lambda_0)Z(u, \lambda_0)}{\sqrt{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda_0)Z_0}}, & \langle \overset{\circ}{1}| &= \sqrt{\frac{Z_0}{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda_0)}}Z(v, \lambda_0), \\ |\overset{\circ}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{Z_0}{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda_0)}}Z(v, \lambda_0), & \langle \overset{\circ}{2}| &= \frac{\delta_\epsilon(v - \lambda_0)Z(v, \lambda_0)}{\sqrt{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda_0)Z_0}}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Напомним еще раз, что $Z_0 = Z(\lambda_0, \lambda_0)$. Обозначая, как и ранее, $\hat{\omega}(\lambda_0) = \hat{\omega}_0$, имеем

$$\hat{\omega}_0 = |\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|, \quad \hat{\omega}_0^T = |\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|. \quad (7.4)$$

Используя определение в терминах рядов Тейлора, мы получаем для произвольной голоморфной в начале координат функции следующие формулы:

$$\begin{aligned} f(x|\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|) &= f(0)(\hat{i} - |\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|) + |\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|f(x), \\ f(x|\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|) &= f(0)(\hat{i} - |\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|) + |\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|f(x) \end{aligned} \quad (7.5)$$

и

$$\begin{aligned} |\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|f(x|\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|) &= f(x)|\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|, \\ |\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|f(x|\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|) &= f(x)|\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Отметим также следующее обобщение формулы (7.5):

$$\begin{aligned} f(a\hat{i} + x|\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|) &= f(a)(\hat{i} - |\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|) + |\overset{\circ}{1}\rangle\langle \overset{\circ}{1}|f(x+a), \\ f(a\hat{i} + x|\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|) &= f(a)(\hat{i} - |\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|) + |\overset{\circ}{2}\rangle\langle \overset{\circ}{2}|f(x+a), \end{aligned} \quad (7.7)$$

которое имеет место для функции $f(x)$, голоморфной в точке $x = a$.

Теперь мы готовы описать наш анзац. Структура матриц скачка $\widehat{N}_{\pm, \Psi}^{(0)}$ и $\widehat{M}_{\pm, \Psi}^{(0)}$ позволяет искать операторы $\hat{\kappa}_{12}$ и $\hat{\kappa}_{21}$ в виде одномерных проекторов. Поэтому полагаем

$$\hat{\kappa}_{12} = \kappa_{12}^{\pm} \hat{\varrho}_{0\pm}^{(c)} |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0\pm}^{(c)T}, \quad (7.8)$$

$$\hat{\kappa}_{21} = \kappa_{21}^{\pm} (\hat{\varrho}_{0\pm}^{(c)T})^{-1} |2\rangle \langle 1| (\hat{\varrho}_{0\pm}^{(c)})^{-1}. \quad (7.9)$$

Здесь $\kappa_{12}^{\pm}$ и $\kappa_{21}^{\pm}$ — некие константы, которые нужно определить. В обеих формулах следует выбирать знак плюс для секторов I, II, VI и знак минус для секторов III, IV, V. Однако операторы $\hat{\kappa}_{jk}$, будучи коэффициентами асимптотического разложения оператора $\widehat{U}$, должны быть одинаковыми во всех секторах комплексной ξ -плоскости (т.к. они не зависят от ξ по определению). Поэтому величины κ_{jk}^{+} и κ_{jk}^{-} на контуре $C_{II-III} \cup C_{V-VI}$ должны быть согласованы со скачками оператора $\hat{\varrho}_0^{(c)}$ на том же самом контуре, чтобы обеспечить единственное значение для операторов $\hat{\kappa}_{jk}$. Таким образом, мы требуем, чтобы

$$\kappa_{12}^{+} \hat{\varrho}_{0+}^{(c)} |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0+}^{(c)T} = \kappa_{12}^{-} \hat{\varrho}_{0-}^{(c)} |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0-}^{(c)T}. \quad (7.10)$$

Используя (6.13)–(6.15), находим

$$\begin{aligned} (\hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^{-1} \hat{\varrho}_{0+}^{(c)} &= (\hat{i} + f_2(\lambda_0) |1\rangle \langle 1|)^{-1}, \\ ((\hat{\varrho}_{0+}^{(c)})^{-1} \hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^T &= \hat{i} + f_2(\lambda_0) |2\rangle \langle 2|. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Это приводит нас к условию скачка для κ_{12} :

$$\kappa_{12}^{-} = \kappa_{12}^{+} (1 + f_2(\lambda_0))^{-2}. \quad (7.12)$$

Аналогичные аргументы дают

$$\kappa_{21}^{-} = \kappa_{21}^{+} (1 + f_2(\lambda_0))^2. \quad (7.13)$$

Подставляя (7.8), (7.9) в выражение (6.46) для $\hat{\nu}$, мы получаем

$$\hat{\nu} = \nu \hat{\varrho}_0^{(c)} |1\rangle \langle 1| (\hat{\varrho}_0^{(c)})^{-1} \quad (7.14)$$

и

$$\hat{\hat{\nu}} = -\nu (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1} |2\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_0^{(c)T} = -\hat{\nu}^T, \quad (7.15)$$

где

$$\nu = -2it\kappa_{12}^{+}\kappa_{21}^{+} = -2it\kappa_{12}^{-}\kappa_{21}^{-}. \quad (7.16)$$

Следует отметить, что вследствие условий (7.12) и (7.13) величина ν (а не только оператор $\hat{\nu}$!) одна и та же во всех секторах ξ -плоскости.

С помощью явных выражений для операторов $\hat{\nu}$ и $\hat{\bar{\nu}}$ (7.14), (7.15) и формул (7.5), (7.7) можно определить ФПЦ с операторнозначным индексом как

$$D_{\hat{\nu}}(\xi) = \hat{\varrho}_0^{(c)} [D_0(\xi)(\hat{1} - |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}|) + |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}|D_{\nu}(\xi)] (\hat{\varrho}_0^{(c)})^{-1}, \quad (7.17)$$

$$D_{\hat{\nu}-\hat{i}}(\xi) = \hat{\varrho}_0^{(c)} [D_{-1}(\xi)(\hat{1} - |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}|) + |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}|D_{\nu-1}(\xi)] (\hat{\varrho}_0^{(c)})^{-1}, \quad (7.18)$$

$$D_{\hat{\bar{\nu}}}(i\xi) = (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1} [D_0(i\xi)(\hat{2} - |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}|) + |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}|D_{-\nu}(i\xi)] \hat{\varrho}_0^{(c)T}, \quad (7.19)$$

$$D_{\hat{\bar{\nu}}-\hat{i}}(i\xi) = (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1} [D_{-1}(i\xi)(\hat{2} - |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}|) + |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}|D_{-\nu-1}(i\xi)] \hat{\varrho}_0^{(c)T}. \quad (7.20)$$

Мы хотели бы отметить, что ν в этих формулах является числом, и поэтому $D_{\nu}(\xi)$ — обычная (не “операторноиндексная”!) ФПЦ. Из (7.11) следует, что

$$\hat{\varrho}_{0-}^{(c)} |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| (\hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^{-1} = \hat{\varrho}_{0+}^{(c)} |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| (\hat{\varrho}_{0+}^{(c)})^{-1} \quad (7.21)$$

и

$$(\hat{\varrho}_{0-}^{(c)T})^{-1} |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}| \hat{\varrho}_{0-}^{(c)T} = (\hat{\varrho}_{0+}^{(c)T})^{-1} |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}| \hat{\varrho}_{0+}^{(c)T}. \quad (7.22)$$

Поэтому в правых частях уравнений (7.17)–(7.20) мы не имеем скачков на границах C_{II-III} и C_{V-VI} .

Можно еще раз убедиться, что функции, определенные в (7.17)–(7.20), удовлетворяют рекуррентным соотношениям (6.44).

8. ПЕРЕХОД К МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

Определим два отображения $\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M)$ (“параллельное отображение”) и $\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(M)$ (“ортогональное отображение”) (2×2) -матриц в алгебру хэт-операторов. Первое отображение определено для произвольной матрицы M :

$$\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M) = \begin{pmatrix} M_{11} |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| & M_{12} |\hat{1}\rangle\langle\hat{2}| \\ M_{21} |\hat{2}\rangle\langle\hat{1}| & M_{22} |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}| \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

второе отображение — только для диагональных (2×2) -матриц:

$$\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(M) = \begin{pmatrix} (\hat{1} - |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}|)M_{11} & 0 \\ 0 & (\hat{1} - |\hat{2}\rangle\langle\hat{2}|)M_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Похожие отображения вводились Корепиным и использовались в работе [47]. Аналогично [47] можно непосредственно проверить, что

$$M \mapsto \hat{\mathcal{A}}_0(M) \equiv \hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(I) + \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M), \quad (8.3)$$

где I — единичная матрица, является представлением $Gl(2, C)$ (ср. (1.19), (1.21) во введении). Мы хотели бы подчеркнуть, что в отличие от представления, рассмотренного

в [47], отображения $\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M)$ и $\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(M)$ сохраняют аналитическую структуру матричных функций $M(\xi)$, т.к. проекторы $|\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{1}|$, $|\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{2}|$ и т.д. не зависят от ξ .

Отображения $\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M)$ и $\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(M)$ не являются представлениями. В частности, $\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(I) \neq \hat{I}$ и $\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(I) \neq \hat{I}$. Тем не менее эти отображения обладают очень важными свойствами:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M)\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(N) &= \hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(N)\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M) = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(M)\hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(N) &= \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(MN), \\ \hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(M)\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(N) &= \hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(MN).\end{aligned}\tag{8.4}$$

Данные свойства позволяют нам свести операторнозначную задачу Римана (6.28к)–(6.34) для оператора $\hat{\Psi}$ к двум матричным задачам Римана для параллельной и ортогональной частей его прообраза.

Пусть

$$\hat{\mathcal{R}}^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{\varrho}_0^{(c)} & 0 \\ 0 & (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1} \end{pmatrix}.\tag{8.5}$$

Так как $\hat{\varrho}_0^{(c)}$ имеет два значения $\hat{\varrho}_{0+}^{(c)}$ и $\hat{\varrho}_{0-}^{(c)}$, то операторнозначная матрица $\hat{\mathcal{R}}^{(0)}$ также имеет два значения: $\hat{\mathcal{R}}_+^{(0)}$ в секторах I, II, VI и $\hat{\mathcal{R}}_-^{(0)}$ в секторах III, IV, V. Условием скачка является

$$\hat{\mathcal{R}}_-^{(0)} = \hat{\mathcal{R}}_+^{(0)} \hat{K}_-, \tag{8.6}$$

где $\hat{K}_-$ определена в (6.34).

Введем также две скалярные матрицы $\beta^{\perp}$ и $\beta^{\parallel}$:

$$\beta^{\perp} = \begin{pmatrix} D_0(\xi) & 0 \\ 0 & D_0(i\xi) \end{pmatrix}, \tag{8.7}$$

$$\beta^{\parallel} = \begin{pmatrix} D_{\nu}(\xi) & \kappa_{12}\sqrt{2t}e^{i\frac{\pi}{4}}D_{-\nu-1}(i\xi) \\ \kappa_{21}\sqrt{2t}e^{-i\frac{\pi}{4}}D_{\nu-1}(\xi) & D_{-\nu}(i\xi) \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Матрица $\beta^{\parallel}$ зависит от κ_{12} и κ_{21} , которые имеют два значения в различных секторах комплексной плоскости. Следовательно, $\beta^{\parallel}$ тоже имеет два значения: $\beta_+^{\parallel}$ в секторах I, II, VI и $\beta_-^{\parallel}$ в секторах III, IV, V. Условие скачка (ср. (7.12), (7.13)) имеет вид

$$\beta_-^{\parallel} = (k_-)^{-1} \beta_+^{\parallel} \cdot k_-, \tag{8.9}$$

где

$$k_- = \begin{pmatrix} 1 + f_2(\lambda_0) & 0 \\ 0 & (1 + f_2(\lambda_0))^{-1} \end{pmatrix}. \tag{8.10}$$

Пусть хэт-оператор $\hat{L}$ представляется в виде

$$\hat{L} = \hat{\mathcal{R}}^{(0)}(\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(\ell^{\perp}) + \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(\ell^{\parallel})), \tag{8.11}$$

где

$$\ell^\perp = \begin{pmatrix} \ell_{11}^\perp & 0 \\ 0 & \ell_{22}^\perp \end{pmatrix}, \quad (8.12)$$

$$\ell^\parallel = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Тогда, комбинируя формулы (7.17)–(7.20), (8.7)–(8.13) и используя свойства отображений (8.4), мы получаем

$$\widehat{\Psi} = \widehat{\mathcal{R}}^{(0)}(\hat{\mathcal{A}}_0^\perp(\beta^\perp \ell^\perp) + \hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(\beta^\parallel \ell^\parallel)). \quad (8.14)$$

Легко проверить, что хэт-оператор $\widehat{S}^{-1}$ (см. (6.35)) тоже имеет структуру

$$\widehat{S}^{-1} = \widehat{\mathcal{R}}^{(0)}(\hat{\mathcal{A}}_0^\perp(s^\perp) + \hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(s^\parallel)), \quad (8.15)$$

где

$$s^\perp = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\xi^2}{4} - \frac{it\lambda_0^2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\xi^2}{4} + \frac{it\lambda_0^2}{2}} \end{pmatrix}, \quad (8.16)$$

$$s^\parallel = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \xi^{is}(2t)^{-\frac{is}{2}} e^{-\frac{\pi s}{4} - \frac{it\lambda_0^2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\xi^2}{4}} \xi^{-is}(2t)^{\frac{is}{2}} e^{\frac{\pi s}{4} + \frac{it\lambda_0^2}{2}} \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Здесь мы использовали формулы (7.4) для $\widehat{\omega}_0$ и $\widehat{\omega}_0^T$.

Рассмотрим теперь отображения для матриц скачка. Условия скачка для хэт-оператора $\widehat{\Psi}$ на контурах C_{I-VI} , C_{I-II} , C_{III-IV} и C_{IV-V} даются матрицами $\widehat{\mathcal{W}}_\Psi = \{\widehat{N}_{\pm, \Psi}^{(0)}, \widehat{M}_{\pm, \Psi}^{(0)}\}$ (см. (6.28к)–(6.31) и рис. 4). Формулы для $\widehat{Q}^{(0)}$, $\widehat{P}^{(0)}$, $\widehat{\tilde{Q}}^{(0)}$ и $\widehat{\tilde{P}}^{(0)}$ даны в (6.23), (6.24). Пользуясь явными выражениями для $\widehat{G}_{jk}$ (см. (3.11)), находим

$$\widehat{Q}^{(0)} = q^{(0)} |2\rangle \langle 1|, \quad \widehat{\tilde{Q}}^{(0)} = \tilde{q}^{(0)} |2\rangle \langle 1|, \quad (8.18)$$

$$\widehat{P}^{(0)} = p^{(0)} |1\rangle \langle 2|, \quad \widehat{\tilde{P}}^{(0)} = \tilde{p}^{(0)} |1\rangle \langle 2|, \quad (8.19)$$

где

$$q^{(0)} = \frac{Z_0 \vartheta_0 e^{\phi_D(\lambda_0) + \phi_A(\lambda_0) - \psi(\lambda_0)}}{2\pi i (1 - Z_0 \vartheta_0 e^{\phi_D(\lambda_0)})}, \quad p^{(0)} = \frac{2\pi i (\vartheta_0 - 1) Z_0 e^{\psi(\lambda_0)}}{1 - Z_0 \vartheta_0 e^{\phi_D(\lambda_0)}}, \quad (8.20)$$

$$\tilde{q}^{(0)} = \frac{Z_0 \vartheta_0 e^{\phi_D(\lambda_0) + \phi_A(\lambda_0) - \psi(\lambda_0)}}{2\pi i (1 - Z_0 \vartheta_0 e^{\phi_A(\lambda_0)})}, \quad \tilde{p}^{(0)} = \frac{2\pi i (\vartheta_0 - 1) Z_0 e^{\psi(\lambda_0)}}{1 - Z_0 \vartheta_0 e^{\phi_A(\lambda_0)}}. \quad (8.21)$$

Очевидно, что все матрицы скачка $\widehat{\mathcal{W}}_\Psi$ могут быть записаны в виде

$$\widehat{\mathcal{W}}_\Psi = \hat{\mathcal{A}}_0^\perp(I) + \hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(w_\Psi). \quad (8.22)$$

Здесь

$$w_\Psi = \{n_\pm, m_\pm\} \quad (8.23)$$

и

$$m_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q^{(0)} & 1 \end{pmatrix}, \quad n_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{q}^{(0)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

$$m_- = \begin{pmatrix} 1 & p^{(0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_+ = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{p}^{(0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.25)$$

Условия скачка на контурах C_{II-III} и C_{V-VI} даются матрицами $\hat{K}_\pm$, которые также могут быть представлены как

$$\hat{K}_\pm = \hat{\mathcal{A}}_0^\perp(I) + \hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(k_\pm), \quad (8.26)$$

где

$$k_+ = \begin{pmatrix} 1 + f_1(\lambda_0) & 0 \\ 0 & (1 + f_1(\lambda_0))^{-1} \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

$$k_- = \begin{pmatrix} 1 + f_2(\lambda_0) & 0 \\ 0 & (1 + f_2(\lambda_0))^{-1} \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Матрицы скачка $m_\pm$, $n_\pm$ и $k_\pm$ стоят на рис. 4 в скобках.

Таким образом, все операторы, входящие в задачу Римана (6.28к)–(6.34), и ее решение записаны в виде $\hat{\mathcal{A}}_0(\cdot)$ -отображений матриц 2×2 . Подведем теперь предварительные итоги.

Используя отображения $\hat{\mathcal{A}}_0^\perp(\cdot)$ и $\hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(\cdot)$, мы представили хэт-оператор $\hat{\Psi}$ как сумму ортогональной и параллельной частей (см. (8.14)):

$$\hat{\Psi} = \hat{\mathcal{R}}^{(0)}(\hat{\mathcal{A}}_0^\perp(\beta^\perp \ell^\perp) + \hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(\beta^\parallel \ell^\parallel)). \quad (8.29)$$

Аналогичное представление имеется и для хэт-оператора $\hat{S}^{-1}$:

$$\hat{S}^{-1} = \hat{\mathcal{R}}^{(0)}(\hat{\mathcal{A}}_0^\perp(s^\perp) + \hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(s^\parallel)). \quad (8.30)$$

Это дает асимптотические условия для ортогональной и параллельной частей $\hat{\Psi}$. В самом деле, поскольку $\hat{\Psi} \rightarrow \hat{S}^{-1}$ при $\xi \rightarrow \infty$, то прообразы параллельной и ортогональной частей $\hat{\Psi}$ должны стремиться соответственно к прообразам параллельной и ортогональной частей $\hat{S}^{-1}$:

$$\beta^\perp \ell^\perp \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} s^\perp, \quad (8.31)$$

$$\beta^\parallel \ell^\parallel \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} s_{11}^\parallel & \kappa_{12} \sqrt{2t} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi^{-1} s_{22}^\parallel \\ \kappa_{21} \sqrt{2t} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi^{-1} s_{11}^\parallel & s_{22}^\parallel \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Наконец, все матрицы скачка также могут быть записаны в терминах ортогональной и параллельной частей:

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\Psi} = \hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(I) + \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(w_{\Psi}), \quad (8.33)$$

$$\widehat{K}_{\pm} = \hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(I) + \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(k_{\pm}). \quad (8.34)$$

Параллельная и ортогональная части $\widehat{\Psi}$ должны удовлетворять условиям скачка по отдельности. Таким образом, мы свели операторнозначную задачу Римана к двум матричным. А именно, теперь нам нужно найти кусочно-постоянные матрицы $\ell^{\perp}$, $\ell^{\parallel}$ и константы $\kappa_{12}^{\pm}$ и $\kappa_{21}^{\pm}$ такие, что обе матрицы $\beta^{\perp}\ell^{\perp}$ и $\beta^{\parallel}\ell^{\parallel}$ имели бы: 1) предписываемые асимптотики и 2) предписываемые условия скачка.

Начнем с асимптотических условий для ортогональной части. Необходимо найти матрицу $\ell^{\perp}$ такую, что

$$\beta^{\perp}\ell^{\perp} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\xi^2}{4} - \frac{it\lambda_0^2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\xi^2}{4} + \frac{it\lambda_0^2}{2}} \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Здесь $\beta^{\perp}$ дано в (8.7):

$$\beta^{\perp} = \begin{pmatrix} D_0(\xi) & 0 \\ 0 & D_0(i\xi) \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Так как $D_0(\xi) = \exp(-\xi^2/4)$, то

$$\ell^{\perp} = \exp \left\{ -\frac{it\lambda_0^2}{2} \sigma_3 \right\}. \quad (8.37)$$

Обсудим теперь условия скачка для ортогональной части. Заметим, что ортогональные части всех матриц скачка равны $\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(I)$. Таким образом, матрица $\beta^{\perp}\ell^{\perp}$ не имеет скачков на контурах C_{I-VI} , C_{I-II} , C_{III-IV} и C_{IV-V} . Кроме того, она также не имеет скачков на контурах C_{II-III} и C_{V-VI} , несмотря на то что ортогональная часть $\widehat{\Psi}$ зависит от хэт-оператора $\widehat{\mathcal{R}}^{(0)}$, который может иметь скачок как раз на контурах C_{II-III} и C_{V-VI} . Проверим соответствующие условия скачка. Имеем (см. (7.11))

$$\hat{\varrho}_{0-}^{(c)} = \hat{\varrho}_{0+}^{(c)} (\hat{i} - |\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{1}| + (1 + f_2(\lambda_0))|\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{1}|) \quad (8.38)$$

(см. (6.15)). Умножая это равенство справа на $\hat{i} - |\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{1}|$, получаем

$$\hat{\varrho}_{0-}^{(c)} (\hat{i} - |\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{1}|) = \hat{\varrho}_{0+}^{(c)} (\hat{i} - |\overset{\circ}{1}\rangle\langle\overset{\circ}{1}|). \quad (8.39)$$

Таким образом, ортогональная часть $\hat{\varrho}_0^{(c)}$ (а следовательно, и ортогональная часть $\widehat{\mathcal{R}}^{(0)}$) не имеет скачка на контурах C_{II-III} и C_{V-VI} .

Итак, ортогональная часть $\widehat{\Psi}$ найдена:

$$\widehat{\Psi}^\perp = \widehat{\mathcal{R}}^{(0)} \widehat{\mathcal{A}}_0^\perp (\beta^\perp \ell^\perp), \quad (8.40)$$

где $\beta^\perp$ и $\ell^\perp$ даются формулами (8.36) и (8.37).

Рассмотрим теперь параллельную часть $\widehat{\Psi}$. Для упрощения некоторых формул мы сделаем замену

$$\ell^\parallel = \tilde{\ell} \exp \left(\left\{ -\frac{is}{2} \ln(2t) - \frac{\pi s}{4} - \frac{it\lambda_0^2}{2} \right\} \sigma_3 \right). \quad (8.41)$$

Во-первых, следует найти кусочно-постоянную матрицу $\tilde{\ell}$ такую, что $\beta^\parallel \tilde{\ell}$ обладала бы следующей асимптотикой:

$$\beta^\parallel \tilde{\ell} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \xi^{is} e^{-\frac{\xi^2}{4}} & \kappa_{12} \sqrt{2t} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi^{-is-1} e^{\frac{\xi^2}{4}} \\ \kappa_{21} \sqrt{2t} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi^{is-1} e^{-\frac{\xi^2}{4}} & \xi^{-is} e^{\frac{\xi^2}{4}} \end{pmatrix}. \quad (8.42)$$

Напомним, что

$$\beta^\parallel = \begin{pmatrix} D_\nu(\xi) & \kappa_{12} \sqrt{2t} e^{i\frac{\pi}{4}} D_{-\nu-1}(i\xi) \\ \kappa_{21} \sqrt{2t} e^{-i\frac{\pi}{4}} D_{\nu-1}(\xi) & D_{-\nu}(i\xi) \end{pmatrix}. \quad (8.43)$$

Асимптотика ФПЦ $D_\nu(\xi)$ сильно зависит от аргумента ξ . В общем случае она может быть записана в виде

$$D_\nu(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \xi^\nu e^{-\frac{\xi^2}{4}} + c(\nu) \xi^{-\nu-1} e^{\frac{\xi^2}{4}}, \quad (8.44)$$

где константа $c(\nu)$ не зависит от $|\xi|$, а зависит только от $\arg \xi$ [49]. Легко видеть, что асимптотика (8.42) может совпадать с (8.43), только если

$$\nu = is. \quad (8.45)$$

Далее нам надо подобрать матрицу $\tilde{\ell}$ так, чтобы обеспечить правильное асимптотическое поведение в каждом секторе комплексной ξ -плоскости. Мы опускаем подробности этих вычислений и приводим здесь матрицу $\tilde{\ell}$ для каждого сектора:

$$\tilde{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{21}\Gamma(\nu)} \\ 0 & e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{в секторе I,} \quad (8.46)$$

$$\tilde{\ell} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\nu} & \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{21}\Gamma(\nu)} \\ \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{\frac{3i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{12}\Gamma(-\nu)} & e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{в секторе II,} \quad (8.47)$$

$$\tilde{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{2i\pi\nu - \frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{21}\Gamma(\nu)} \\ \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{-\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{12}\Gamma(-\nu)} & e^{\frac{5i\pi\nu}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{в секторе III,} \quad (8.48)$$

$$\tilde{\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{-\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{12}\Gamma(-\nu)} & e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{в секторе IV,} \quad (8.49)$$

$$\tilde{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{в секторах V и VI.} \quad (8.50)$$

Проиллюстрируем, как можно получить эти результаты. Рассмотрим секторы V и VI, где $-\pi/2 \leq \arg \xi \leq 0$. Для этих значений аргумента асимптотика ФПЦ особенно проста:

$$D_\nu(\xi) \rightarrow \xi^\nu e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad (8.51)$$

$$D_{-\nu}(i\xi) \rightarrow e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} \xi^{-\nu} e^{\frac{\xi^2}{4}}. \quad (8.52)$$

Полагая $\tilde{\ell}_{12} = \tilde{\ell}_{21} = 0$, $\tilde{\ell}_{11} = 1$ и $\tilde{\ell}_{22} = e^{i\pi\nu/2}$, мы удовлетворяем асимптотическому условию. Следует отметить, что матрица $\tilde{\ell}$ не имеет скачка на контуре C_{V-VI} , что находится в полном согласии с условием скачка (8.65) ниже. Таким образом, мы приходим к (8.50).

Рассмотрим теперь сектор I. Здесь асимптотика $D_\nu(\xi)$ та же самая, а $D_{-\nu}(i\xi)$ ведет себя следующим образом:

$$D_{-\nu}(i\xi) \rightarrow e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} \left(\xi^{-\nu} e^{\frac{\xi^2}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu)} e^{-i\frac{\pi}{2}} \xi^{\nu-1} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \right). \quad (8.53)$$

Полагая опять $\tilde{\ell}_{21} = 0$ и $\tilde{\ell}_{11} = 1$, мы получаем, что первый столбец $\beta^\parallel \tilde{\ell}$ имеет правильную асимптотику. Однако во втором столбце есть дополнительное слагаемое по сравнению с секторами V и VI. Для того чтобы компенсировать этот член, следует положить

$$\tilde{\ell}_{22} = e^{\frac{i\pi\nu}{2}}, \quad \tilde{\ell}_{12} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\kappa_{21}\Gamma(\nu)}.$$

Мы получаем формулу (8.46).

Аналогичные рассуждения позволяют найти все остальные формулы (8.47)–(8.49) для матрицы $\tilde{\ell}$.

Наконец, мы должны проверить, что справедливы все условия скачка. После замены $\ell^\parallel \rightarrow \tilde{\ell}$ условия скачка для $\beta^\parallel \tilde{\ell}$ изменились. Сформулируем их явным образом.

Диагональные матрицы $k_{\pm}$ не изменяются при замене (8.41). Однако матрицы $m_{\pm}$ и $n_{\pm}$ должны быть заменены соответственно на $m'_{\pm}$ и $n'_{\pm}$:

$$m'_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q'^{(0)} & 1 \end{pmatrix}, \quad n'_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{q}'^{(0)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.54)$$

$$m'_- = \begin{pmatrix} 1 & p'^{(0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n'_+ = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{p}'^{(0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.55)$$

где

$$q'^{(0)} = q^{(0)} (2t)^{\nu} e^{-\frac{i\pi\nu}{2} + it\lambda_0^2}, \quad \tilde{q}'^{(0)} = \tilde{q}^{(0)} (2t)^{\nu} e^{-\frac{i\pi\nu}{2} + it\lambda_0^2}, \quad (8.56)$$

$$p'^{(0)} = p^{(0)} (2t)^{-\nu} e^{\frac{i\pi\nu}{2} - it\lambda_0^2}, \quad \tilde{p}'^{(0)} = \tilde{p}^{(0)} (2t)^{-\nu} e^{\frac{i\pi\nu}{2} - it\lambda_0^2}. \quad (8.57)$$

Таким образом, матрица $\tilde{\ell}$ должна иметь следующие скачки:

$$\tilde{\ell}_{VI} = \tilde{\ell}_I n'_+ \quad \text{на контуре } C_{I-VI}, \quad (8.58)$$

$$\tilde{\ell}_{II} = \tilde{\ell}_I m'_+ \quad \text{на контуре } C_{I-II}, \quad (8.59)$$

$$\tilde{\ell}_{IV} = \tilde{\ell}_{III} m'_- \quad \text{на контуре } C_{III-IV}, \quad (8.60)$$

$$\tilde{\ell}_{IV} = \tilde{\ell}_V n'_- \quad \text{на контуре } C_{IV-V}. \quad (8.61)$$

Что касается контуров C_{II-III} и C_{V-VI} , то тут ситуация несколько более сложная. Напомним условия скачка для $\hat{\mathcal{R}}^{(0)}$ и $\beta^{\parallel}$:

$$\hat{\mathcal{R}}_-^{(0)} = \hat{\mathcal{R}}_+^{(0)} (\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(I) + \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(k_-)), \quad (8.62)$$

$$\beta_-^{\parallel} = (k_-)^{-1} \beta_+^{\parallel} \cdot k_-. \quad (8.63)$$

Тогда для параллельной части $\hat{\Psi}$ мы имеем на контуре C_{V-VI}

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_-^{\parallel} &= \hat{\mathcal{R}}_-^{(0)} \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel} (\beta_-^{\parallel} \tilde{\ell}_V) = \\ &= \hat{\mathcal{R}}_+^{(0)} \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel} (\beta_+^{\parallel} k_- \tilde{\ell}_V (k_-)^{-1}) \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(k_-) = \hat{\mathcal{R}}_+^{(0)} \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel} (\beta_+^{\parallel} \tilde{\ell}_{VI}) \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(k_-). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Следовательно, мы находим, что

$$\tilde{\ell}_{VI} = k_- \tilde{\ell}_V (k_-)^{-1} \quad \text{на контуре } C_{V-VI}. \quad (8.65)$$

Аналогично имеем

$$\tilde{\ell}_{II} = k_- \tilde{\ell}_{III} (k_+)^{-1} \quad \text{на контуре } C_{II-III}. \quad (8.66)$$

Легко проверить, что скачки на контурах C_{V-VI} и C_{II-III} автоматически получаются правильными. Скачки на других контурах дают нам явные выражения для $\kappa_{12}^{\pm}$ и $\kappa_{21}^{\pm}$. Действительно, в силу (8.58) мы имеем, например,

$$(\tilde{\ell}_{VI})_{12} = (\tilde{\ell}_I)_{12} + \tilde{p}'^{(0)}(\tilde{\ell}_I)_{11}, \quad (8.67)$$

из чего вытекает, что

$$(\tilde{\ell}_I)_{12} = -\tilde{p}'^{(0)} \quad (8.68)$$

и, следовательно,

$$\kappa_{21}^+ = -\sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\tilde{p}'^{(0)}\Gamma(\nu)}. \quad (8.69)$$

Тогда в силу (7.16) имеем

$$\kappa_{12}^+ = \frac{i\nu}{2t\kappa_{21}^+}. \quad (8.70)$$

Используя равенства (7.12) и (7.13), мы можем найти κ_{12}^- и κ_{21}^- .

Скачки на других контурах дают те же самые выражения для $\kappa_{jk}^{\pm}$. Необходимо только принять во внимание тождество

$$\tilde{p}'^{(0)}q'^{(0)} = \tilde{q}'^{(0)}p'^{(0)} = 1 - e^{2i\pi\nu}. \quad (8.71)$$

Данное тождество можно проверить непосредственно, пользуясь явными выражениями для всех величин, входящих в (8.71) (см. (8.56), (8.57), (8.20), (8.21)).

Собирая все необходимые формулы, после несложных преобразований мы приходим к выражениям

$$\hat{\kappa}_{12} = \frac{\gamma\nu}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \hat{\varrho}_{0-}^{(c)} |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0+}^{(c)T}, \quad (8.72)$$

$$\hat{\kappa}_{21} = -\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{t}} (\hat{\varrho}_{0+}^{(c)T})^{-1} |2\rangle \langle 1| (\hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^{-1}. \quad (8.73)$$

Здесь

$$\gamma = 2\pi Z_0(\vartheta_0 - 1)\Gamma(\nu)(2t)^{-\nu} e^{\psi(\lambda_0) + \frac{i\pi\nu}{2} + \frac{3i\pi}{4} - it\lambda_0^2} \quad (8.74)$$

и

$$\nu = -\frac{1}{2\pi i} \ln[(1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_D(\lambda_0)})(1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_A(\lambda_0)})]. \quad (8.75)$$

Это дает нам решение $\hat{\Psi}$ локализованной задачи Римана (6.28к)–(6.34). Приведем здесь еще раз основные формулы. Хэт-оператор

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \hat{\varrho}_0^{(c)} & 0 \\ 0 & (\hat{\varrho}_0^{(c)T})^{-1} \end{pmatrix} (\hat{\mathcal{A}}_0^{\perp}(\beta^{\perp}\ell^{\perp}) + \hat{\mathcal{A}}_0^{\parallel}(\beta^{\parallel}\ell^{\parallel})). \quad (8.76)$$

Определение отображений $\hat{\mathcal{A}}_0^\perp(\cdot)$ и $\hat{\mathcal{A}}_0^\parallel(\cdot)$ дано в (8.1), (8.2). Матрица

$$\beta^\perp \ell^\perp = \exp \left\{ - \left(\frac{\xi^2}{4} + \frac{it\lambda_0^2}{2} \right) \sigma_3 \right\}. \quad (8.77)$$

Параллельная часть матрицы β есть

$$\beta^\parallel = \begin{pmatrix} D_\nu(\xi) & \kappa_{12} \sqrt{2t} e^{i\frac{\pi}{4}} D_{-\nu-1}(i\xi) \\ \kappa_{21} \sqrt{2t} e^{-i\frac{\pi}{4}} D_{\nu-1}(\xi) & D_{-\nu}(i\xi) \end{pmatrix}. \quad (8.78)$$

Здесь $D_\nu(\xi)$ – ФПЦ, ν дается формулой (8.75). Константы κ_{12} и κ_{21} имеют по два значения: κ_{jk}^+ в секторах I, II и VI и κ_{jk}^- в секторах III, IV и V (см. рис. 4). Значения κ_{jk}^+ определены в (8.69), (8.70). Константы κ_{jk}^- связаны с последними соотношениями (7.12), (7.13).

Матрица $\ell^\parallel$ дается формулами (8.41), (8.46)–(8.50).

Для наших целей в силу соотношений

$$\hat{\kappa}_{12} = \hat{b}_{12}, \quad \hat{\kappa}_{21} = \hat{b}_{21} \quad (8.79)$$

наиболее важным представляется знание операторов $\hat{\kappa}_{12}$ и $\hat{\kappa}_{21}$. Эти операторы даются формулами (8.72), (8.73).

Случай положительного химического потенциала может быть рассмотрен аналогичным образом. Вместо операторов $\hat{Q}^{(0)}$ и $\hat{P}^{(0)}$ нужно рассмотреть операторы

$$\hat{Q}_1^{(0)} = \hat{Q}^{(0)} \left(\frac{\lambda_0 - \Lambda_2}{\lambda_0 - \Lambda_1} \right), \quad \hat{P}_1^{(0)} = \hat{P}^{(0)} \left(\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 - \Lambda_2} \right). \quad (8.80)$$

Соответствующие замены необходимо также сделать и для скаляров $q^{(0)}$ и $p^{(0)}$. Остальные вычисления точно такие же, как и для случая отрицательного химического потенциала. Разница, однако, состоит в том, что для отрицательного химического потенциала формулы (8.79) дают нам лидирующий член асимптотического разложения операторов $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$ при большом времени, в то время как для положительного химического потенциала операторы $\hat{\kappa}_{12}$ и $\hat{\kappa}_{21}$ определяют только поправки к коэффициентам $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$. В самом деле, в последнем случае, как мы видели, лидирующий член асимптотического разложения $\hat{b}_{12}$ дается формулой (5.43). По сравнению с этим выражением операторы (8.72), (8.73) имеют порядок $t^{-1/2}$, следовательно, они являются всего лишь поправками к лидирующим членам. Другими словами, в случае положительного химического потенциала операторы $\hat{\kappa}_{12}$ и $\hat{\kappa}_{21}$ равны коэффициентам асимптотического разложения (5.33) $\hat{B}_{12}^{(0)}$ и $\hat{B}_{21}^{(0)}$, соответственно:

$$\hat{\kappa}_{12} = \hat{B}_{12}^{(0)}, \quad \hat{\kappa}_{21} = \hat{B}_{21}^{(0)}. \quad (8.81)$$

Наконец, мы должны сказать несколько слов об операторе $\hat{\varrho}_0^{(c)}$, входящем в формулы (8.72), (8.73). Этот оператор определяется формулой

$$\hat{\varrho}_0^{(c)} = \hat{\varrho}^{(c)}(\lambda_0), \quad (8.82)$$

где операторнозначная функция $\hat{\varrho}^{(c)}(\lambda)$, в свою очередь, определена как единственное решение задачи Римана (6.13), (6.14). Эта задача Римана эквивалентна сингулярному интегральному уравнению (ср. (1.15))

$$\hat{\varrho}_+^{(c)}(\lambda) = \hat{i} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\mu - \lambda - i0} \hat{\varrho}_+^{(c)}(\mu) (\hat{i} - \hat{\mathcal{D}}_0(\mu)). \quad (8.83)$$

Поэтому, чтобы определить $\hat{\varrho}_0^{(c)}$, необходимо решить это интегральное уравнение. Другими словами, не зависящий от времени фактор $\hat{\varrho}_0^{(c)}$ в наших окончательных формулах все еще остается неизвестным объектом. Ясно, однако, что он не зависит от функции $\psi(\lambda)$, т.к. матрица скачка $\hat{\mathcal{D}}_0(\lambda)$ зависит только от функций $\phi_A(\lambda)$, $\phi_D(\lambda)$ и отношения $\lambda_0 = x/2t$ (и, разумеется, от химического потенциала, константы связи и температуры). Позже мы увидим, что этого свойства оказывается достаточно для вычисления асимптотики корреляционной функции с точностью до числовой константы (зависящей от λ_0 , h , c и T).

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе мы продолжаем рассматривать случай отрицательного химического потенциала.

Результаты предыдущих разделов дают нам лидирующий член асимптотики коэффициентов $\hat{b}_{jk}$ при большом времени. В частности, мы нашли, что

$$\hat{b}_{12} \approx \frac{\tilde{\gamma} \nu}{i\sqrt{2\pi}} (2t)^{-\nu-1/2} e^{\psi(\lambda_0) - it\lambda_0^2} \hat{\varrho}_{0-}^{(c)} |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0+}^{(c)T}, \quad (9.1)$$

$$\hat{b}_{21} \approx -\frac{\sqrt{2\pi}}{\tilde{\gamma}} (2t)^{\nu-1/2} e^{-\psi(\lambda_0) + it\lambda_0^2} (\hat{\varrho}_{0+}^{(c)T})^{-1} |2\rangle \langle 1| (\hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^{-1}. \quad (9.2)$$

Мы явно выделили зависимость от t и функции $\psi(\lambda)$. Константа $\tilde{\gamma}$ имеет вид

$$\tilde{\gamma} = 2\pi Z_0 (\vartheta_0 - 1) \Gamma(\nu) e^{\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{3i\pi}{4}}. \quad (9.3)$$

Она зависит только от функций $\phi_D(\lambda)$ и $\phi_A(\lambda)$. Напомним также, что

$$\nu = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[(1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_D(\lambda_0)}) (1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_A(\lambda_0)}) \right]. \quad (9.4)$$

Поправки к асимптотическим формулам (9.1), (9.2) убывают быстрее чем $t^{-1/2}$. Однако в произведении $\hat{b}_{12}\hat{b}_{21}$ осциллирующие сокращаются, и после двукратного интегрирования выражения (2.20) эти поправки могут дать не исчезающие вклады в $\det(\tilde{I} + \tilde{V})$.

Для того чтобы сделать наши асимптотические оценки более точными, мы используем дифференциальные уравнения для $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$ (2.21):

$$i\partial_t \hat{b}_{21} + \partial_x^2 \hat{b}_{21} = 2\hat{b}_{21}\hat{b}_{12}\hat{b}_{21}, \quad (9.5)$$

$$-i\partial_t \hat{b}_{12} + \partial_x^2 \hat{b}_{12} = 2\hat{b}_{12}\hat{b}_{21}\hat{b}_{12}. \quad (9.6)$$

Будем искать решение этой системы в следующем виде:

$$\hat{b}_{12} = (2t)^{-\nu-1/2} e^{-it\lambda_0^2} \hat{\zeta}(\lambda_0, t), \quad (9.7)$$

$$\hat{b}_{21} = (2t)^{\nu-1/2} e^{it\lambda_0^2} \hat{\eta}(\lambda_0, t). \quad (9.8)$$

Удобно переписать дифференциальные уравнения (9.5), (9.6) в терминах переменных λ_0 и t . После несложных преобразований мы приходим к дифференциальным уравнениям для операторов $\hat{\zeta}$, $\hat{\eta}$:

$$-4i \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} - \frac{4}{t} (\hat{\zeta} \hat{\eta} \hat{\zeta} - i\nu \hat{\zeta}) = -\frac{1}{t^2} \{ [(\nu')^2 \ln^2(2t) - \nu'' \ln(2t)] \hat{\zeta} - 2\nu' \hat{\zeta}' \ln(2t) + \hat{\zeta}'' \}, \quad (9.9)$$

$$4i \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} - \frac{4}{t} (\hat{\eta} \hat{\zeta} \hat{\eta} - i\nu \hat{\eta}) = -\frac{1}{t^2} \{ [(\nu')^2 \ln^2(2t) + \nu'' \ln(2t)] \hat{\eta} + 2\nu' \hat{\eta}' \ln(2t) + \hat{\eta}'' \}. \quad (9.10)$$

Здесь штрих означает производную по λ_0 . Легко видеть, что мы можем предложить асимптотическое разложение, справедливое для решений скалярного НУШ [50],

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_0(\lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \hat{\zeta}_{nk}(\lambda_0) \frac{(\ln(2t))^k}{t^n}, \quad (9.11)$$

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}_0(\lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \hat{\eta}_{nk}(\lambda_0) \frac{(\ln(2t))^k}{t^n}, \quad (9.12)$$

где коэффициенты $\hat{\zeta}_{nk}$ и $\hat{\eta}_{nk}$ зависят только от λ_0 . Подставляя эти асимптотические разложения в (9.9) и (9.10), мы получим для лидирующих членов $\hat{\zeta}_0$ и $\hat{\eta}_0$

$$i\nu \hat{\zeta}_0 = \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0 \hat{\zeta}_0, \quad (9.13)$$

$$i\nu \hat{\eta}_0 = \hat{\eta}_0 \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0.$$

Соотношения (9.13) выполняются автоматически, т.к. благодаря (9.1), (9.2) мы имеем

$$\hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0 = i\nu \hat{\varrho}_{0-}^{(c)} |1\rangle \langle 1| (\hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^{-1}, \quad (9.14)$$

$$\hat{\eta}_0 \hat{\zeta}_0 = i(\hat{\varrho}_{0+}^{(c)T})^{-1} |2\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0+}^{(c)T}. \quad (9.15)$$

В свою очередь, для первых поправок $\hat{\zeta}_{1k}$ и $\hat{\eta}_{1k}$ получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{12} \hat{\eta}_0 + \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_{12} &= 0, \\ \hat{\zeta}_{11} \hat{\eta}_0 + \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_{11} &= \frac{1}{2i} (\nu' \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0)', \\ \hat{\zeta}_{10} \hat{\eta}_0 + \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_{10} &= \frac{1}{2i} (\nu' \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0)' + \frac{1}{4} (\hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0' - \hat{\zeta}_0' \hat{\eta}_0). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Аналогично случаю скалярного НУШ соотношения (9.16) позволяют найти более точную оценку для произведения $\hat{b}_{12}\hat{b}_{21} = -i\partial_x\hat{b}_{11}$. Напомним, что для того чтобы получить асимптотическое выражение для детерминанта Фредгольма, нужно найти только след оператора $\hat{b}_{11}$, но не сам оператор $\hat{b}_{11}$. Очевидно, что

$$\mathrm{tr} \hat{\zeta}_0 \hat{\eta}_0 = i\nu. \quad (9.17)$$

Со следом выражения $(\hat{\zeta}_0 \hat{\eta}'_0 - \hat{\zeta}'_0 \hat{\eta}_0)'$ ситуация более сложная, т.к. неизвестен явный вид $\hat{\eta}_0^{(c)}$. С другой стороны, здесь возможно выделить явную зависимость от функции $\psi(\lambda)$. Используя формулы (9.1) и (9.2), находим

$$\hat{\zeta}_0 \hat{\eta}'_0 - \hat{\zeta}'_0 \hat{\eta}_0 = -2i\nu\psi'(\lambda_0) + \hat{C}_0, \quad (9.18)$$

где $\hat{C}_0$ не зависит от функции $\psi(\lambda)$. Таким образом, имеем

$$\mathrm{tr} \hat{b}'_{11} = -\nu + \frac{i}{2t}(\nu'\nu)'(\ln(2t) + 1) - \frac{i}{2t}(\nu\psi'(\lambda_0))' + \frac{1}{t}\mathrm{tr} \hat{C}_0 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right). \quad (9.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно было бы ожидать, что в силу (9.11), (9.12) последнее соотношение справедливо с точностью до членов порядка $\ln^4 t/t^2$. Такие поправки действительно входят в выражения для $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$, однако они исчезают в комбинации $\mathrm{tr} \hat{b}_{12}\hat{b}_{21}$ (так же как и члены $\ln^3 t/t^2$).

Наконец, следует воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{2t}\partial_{\lambda_0} \ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) = i \mathrm{tr} \hat{b}_{11}, \quad (9.20)$$

и после интегрирования (9.19) по λ_0 мы получаем улучшенную формулу для фредгольмова детерминанта. Разумеется, константа интегрирования может зависеть от t , поэтому необходимо также воспользоваться уравнениями

$$\left(\partial_t - \frac{\lambda_0}{t}\partial_{\lambda_0}\right) \ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) = i \mathrm{tr}(\hat{c}_{22} - \hat{c}_{11}) \quad (9.21)$$

и

$$\partial_t \hat{b}_{11} = \frac{1}{2t}(\partial_{\lambda_0} \hat{b}_{12} \cdot \hat{b}_{21} - \hat{b}_{12} \cdot \partial_{\lambda_0} \hat{b}_{21}). \quad (9.22)$$

Эти уравнения позволяют найти константу интегрирования с точностью до некоторой функции, которая может зависеть от λ_0 , поскольку мы не конкретизировали $\hat{C}_0$ в (9.18). Мы опускаем детали, они вполне аналогичны случаю свободных фермионов, разобранному в [29]. Таким образом, имеется следующая оценка для детерминанта Фредгольма:

$$\begin{aligned} \ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|x - 2\lambda t| + i \mathrm{sign}(\lambda_0 - \lambda) \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} \right) \times \\ &\quad \times \ln\{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \mathrm{sign}(\lambda - \lambda_0)})\} d\lambda - \\ &\quad - \frac{\nu^2}{2} \ln(2t) + C_0 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Здесь в C_0 входят константа интегрирования и другие члены, зависящие от функций ϕ_A, ϕ_D , отношения λ_0 и нединамических физических параметров h, c и T .

Для того чтобы вычислить корреляционную функцию локальных полей, нужно найти комбинацию

$$\mathcal{B} = \int_{-\infty}^{\infty} du dv \hat{b}_{12}(u, v) \cdot \det(\tilde{I} + \tilde{V}). \quad (9.24)$$

Формулы, полученные для фредгольмова детерминанта и оператора $\hat{b}_{12}$, позволяют найти асимптотическое выражение для этого объекта:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C(\phi_D, \phi_A) (2t)^{-\frac{(\nu+1)^2}{2}} e^{\psi(\lambda_0) - it\lambda_0^2} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|x - 2\lambda t| + i \operatorname{sign}(\lambda_0 - \lambda) \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} \right) \times \right. \\ & \left. \times \ln \{ 1 - \vartheta(\lambda) (1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0)}) \} d\lambda \right\} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{\ln^2 t}{t} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Здесь мы выделили всю зависимость от t и функции $\psi(\lambda)$. Множитель $C(\phi_D, \phi_A)$ зависит от λ_0, h, c и T и не зависит от $\psi(\lambda)$. Параметр

$$\nu = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[(1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_D(\lambda_0)}) (1 - \vartheta_0 Z_0 e^{\phi_A(\lambda_0)}) \right], \quad (9.26)$$

а функция $\phi(\lambda)$ определяется формулой

$$\phi(\lambda) = \phi_A(\lambda) - \phi_D(\lambda). \quad (9.27)$$

В случае положительного химического потенциала вычисления вполне аналогичны. Легко показать, что операторы $\hat{B}_{12}^{(0)}$ и $\hat{B}_{21}^{(0)}$ (5.33) удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений (9.5), (9.6), что и операторы $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$. Асимптотическое поведение $\hat{B}_{12}^{(0)}$ и $\hat{B}_{21}^{(0)}$ было найдено в предыдущем разделе (см. (8.81)). Таким образом, для получения более точных оценок можно использовать тот же метод. Мы не останавливаемся здесь на деталях, т.к. в разделе 11 представим усовершенствованный подход, позволяющий непосредственно получить наиболее важные, т.е. зависящие от $\psi(\lambda)$, поправки к лидирующему члену асимптотики без использования дифференциальных уравнений.

Наконец, необходимо сказать несколько слов о регуляризации, введенной в разделе 3. Единственным объектом в (9.25), который зависит от ϵ , является множитель $C(\phi_D, \phi_A)$, т.к. он зависит от $\hat{\rho}_0^{(c)}$ и $|\hat{1}\rangle\langle\hat{2}|$. Экспоненциальный и степенной множители от регуляризации не зависят. Позже мы увидим, что $C(\phi_D, \phi_A)$ несет ответственность только за числовой множитель в асимптотике корреляционной функции (1.1).

10. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБСУЖДЕНИЯ

Предполагая, что дуальные поля $\psi(\lambda)$, $\phi_A(\lambda)$ и $\phi_D(\lambda)$ – классические функции, мы нашли асимптотическое выражение для величины $\mathcal{B}$, которая является комбинацией детерминанта Фредгольма $\det(\tilde{I} + \tilde{V})$ и множителя $\hat{b}_{12}$ (2.18). Данное асимптотическое выражение имеет вид

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}_c(\phi_A, \phi_D, \psi) t^{\mathcal{F}_p(\phi_A, \phi_D)} e^{t\mathcal{F}_e(\phi_A, \phi_D)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right) \right), \quad (10.1)$$

где $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_e$ – функционалы от дуальных полей. Их представления даются формулой (9.25). Функционалы $\mathcal{F}_e(\phi_A, \phi_D)$ и $\mathcal{F}_p(\phi_A, \phi_D)$, определяющие соответственно экспоненциальный и степенной законы, найдены явно:

$$t\mathcal{F}_e(\phi_A, \phi_D) = -it\lambda_0^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x - 2\lambda t| \times \\ \times \ln\{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0)})\} d\lambda, \quad (10.2)$$

$$\mathcal{F}_p(\phi_A, \phi_D) = -\frac{1}{2}(\nu + 1)^2, \quad (10.3)$$

где ν дается выражением (9.26). Функционал $\mathcal{F}_c$ зависит только от отношения $\lambda_0 = x/2t$, которое является фиксированным, следовательно, он ведет себя как постоянная при t , стремящемся к бесконечности. Этот функционал состоит из двух частей, которые играют существенно различные роли в процессе усреднения по вспомогательному вакууму. Выделим из функционала $\mathcal{F}_c$ часть, содержащую поле ψ , а именно:

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_{c\psi}(\phi_A, \phi_D, \psi) \mathcal{F}_{c\phi}(\phi_A, \phi_D), \quad (10.4)$$

где

$$\mathcal{F}_{c\psi}(\phi_A, \phi_D, \psi) = \psi(\lambda_0) + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\lambda_0 - \lambda) \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} \times \\ \times \ln\{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0)})\} d\lambda. \quad (10.5)$$

Для функционала $\mathcal{F}_{c\phi}$, который не зависит от ψ , мы не имеем никакой явной формулы; этот функционал зависит от оператора $\hat{\varrho}_0^{(c)}$. Таким образом, асимптотическое поведение оператора $\mathcal{B}$ определено с точностью до постоянного фактора $\mathcal{F}_{c\phi}$. В случае свободных фермионов аналогичный множитель может быть определен с помощью вспомогательных дифференциальных уравнений по температуре и химическому потенциалу (ср. [29]). Здесь мы не преследуем подобных целей и ограничиваемся тем, что определяем только экспоненциальный и степенной асимптотические законы. Таким образом, в случае, если дуальные поля являются классическими функциями, наш анализ завершен. Следует также отметить, что экспоненциальный закон убывания, который мы нашли, совпадает

с законом, полученным в [4] с помощью независимых и более прямых методов. Однако, как уже отмечалось во введении и в разделе 2, операторная природа дуальных полей кардинальным образом изменяет ситуацию на стадии вычисления вакуумного среднего $(0|\mathcal{B}|0)$. Необходимо быть уверенным в том, что поправки к лидирующему члену не дают вкладов после их усреднения. В этом разделе демонстрируется, что результат (9.25) не является удовлетворительным с этой точки зрения.

Напомним коммутационные соотношения между повышающими и понижающими частями дуальных полей (2.23):

$$\begin{aligned} [p_A(\lambda), q_\psi(\mu)] &= [p_\psi(\lambda), q_A(\mu)] = \ln h(\mu, \lambda), \\ [p_D(\lambda), q_\psi(\mu)] &= [p_\psi(\lambda), q_D(\mu)] = \ln h(\lambda, \mu), \\ [p_\psi(\lambda), q_\psi(\mu)] &= \ln[h(\lambda, \mu)h(\mu, \lambda)], \end{aligned} \quad (10.6)$$

где $h(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu + ic)/ic$. Важно, что операторы p_A, p_D, q_A и q_D коммутируют друг с другом:

$$[p_j(\lambda), q_k(\mu)] = 0, \quad j, k \in \{A, D\}. \quad (10.7)$$

Поэтому вакуумное среднее значение от любого выражения, содержащего только дуальные поля ϕ_A и ϕ_D , всегда тривиально:

$$(0|\mathcal{F}(\phi_A, \phi_D)|0) = \mathcal{F}(0, 0). \quad (10.8)$$

Нетривиальное среднее значение возникает тогда и только тогда, когда присутствует поле ψ . Вот почему мы уделяли столько внимания этому полю в предыдущих разделах.

Рассмотрим асимптотическое представление (10.1) с точки зрения его усреднения. Легко видеть, что если мы ограничимся только экспоненциальным и степенным факторами, то немедленно получим

$$(0|t^{\mathcal{F}_p(\phi_A, \phi_D)} e^{t\mathcal{F}_e(\phi_A, \phi_D)}|0) = t^{\mathcal{F}_p(0,0)} e^{t\mathcal{F}_e(0,0)}, \quad (10.9)$$

т.к. функционалы $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_e$ зависят только от полей ϕ_A и ϕ_D . Даже если принять во внимание функционал $\mathcal{F}_{c\phi}$, то для экспоненциального и степенного факторов ничего не изменится по той же самой причине – функционал $\mathcal{F}_{c\phi}$ не зависит от ψ . Мы хотели бы особенно подчеркнуть, что несмотря на то что функционал $\mathcal{F}_{c\phi}$ неизвестен, не следует рассматривать этот факт как существенный недостаток. Поля ϕ_A и ϕ_D не влияют на экспоненциальный и степенной множители в процессе усреднения.

В то же время присутствие функционала $\mathcal{F}_{c\psi}(\phi_A, \phi_D, \psi)$ полностью меняет ситуацию. Он зависит от дуального поля ψ , и в результате этот оператор меняет как корреляционный радиус, так и предэкспоненту. Даже простейший множитель $e^{\psi(\lambda_0)}$ сдвигает аргументы $\mathcal{F}_{c\phi}$, $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_e$ в силу очевидного свойства [5]

$$e^{p_\psi(\lambda_0)} \mathcal{F}(\phi_A(\mu), \phi_D(\mu))|0) = \mathcal{F}(\phi_A(\mu) + h(\mu, \lambda_0), \phi_D(\mu) + h(\lambda_0, \mu))|0). \quad (10.10)$$

Вклад остальной части функционала $\mathcal{F}_{c\psi}$ (10.5) гораздо более сложен, но ясно, что он изменяет результат (10.9).

В настоящей работе мы не собираемся изучать процедуру усреднения дуальных полей. Это сделано в работе [5], где можно найти подробности вычисления вакуумного среднего. Главной целью данной статьи является представление асимптотического выражения оператора $\mathcal{B}$ в виде, согласованном с процедурой усреднения. Рассуждения, приведенные выше, показывают, что постоянный множитель $\mathcal{F}_{c\psi}$ (т.е. множитель, который остается фиксированным при t , стремящемся к бесконечности) изменяет лидирующий член асимптотики после вычисления вакуумного среднего. Теперь становится ясным, что главный член асимптотики, найденный в разделах 4 и 5, недостаточен для описания корреляционной функции.

Возникает вопрос, можем ли мы ограничиться множителем $\mathcal{F}_{c\psi}$? Можно ли гарантировать, что поправки $\mathcal{O}(\ln^2 t/t)$ не дают аналогичного вклада в вакуумное среднее? Покажем, что некоторые поправки действительно дают такой исчезающий вклад.

Для того чтобы найти поправки к выражению (9.25), можно воспользоваться дифференциальными уравнениями (9.9) и (9.10). Подставляя асимптотическое разложение (9.11), (9.12) в эти уравнения, мы получаем бесконечный набор рекуррентных соотношений для операторов $\hat{\zeta}_{nk}$ и $\hat{\eta}_{nk}$. Последние, в свою очередь, дают полное асимптотическое разложение для фредгольмова детерминанта и оператора $\hat{b}_{12}$. Ясно, что поправки, которые не зависят от ψ , не могут изменить лидирующий экспоненциальный член $\exp\{t\mathcal{F}_e\}$ асимптотики после их усреднения. Поэтому мы должны в основном сосредоточиться на слагаемых, содержащих поле ψ .

Заметим, что $\hat{\zeta}_0(\lambda_0)$ и $\hat{\eta}_0(\lambda_0)$ пропорциональны соответственно $e^{\psi(\lambda_0)}$ и $e^{-\psi(\lambda_0)}$. Это наводит на мысль сделать в (9.9) следующую подстановку:

$$\hat{\zeta}(\lambda_0, t) = e^{\psi(\lambda_0)} \hat{\zeta}(\lambda_0, t), \quad \hat{\eta}(\lambda_0, t) = e^{-\psi(\lambda_0)} \hat{\eta}(\lambda_0, t). \quad (10.11)$$

Для $\hat{\zeta}$ получаем

$$\begin{aligned} -4i \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} - \frac{4}{t} (\hat{\zeta} \hat{\eta} \hat{\zeta} - i\nu \hat{\zeta}) = -\frac{1}{t^2} \left\{ [(\nu')^2 \ln^2(2t) - \nu'' \ln(2t) - 2\nu' \psi' \ln(2t) + \psi'' + \psi'^2] \hat{\zeta} - \right. \\ \left. - 2(\nu' \ln(2t) - \psi') \hat{\zeta}' + \hat{\zeta}'' \right\}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Аналогичное уравнение возникает и для оператора $\hat{\eta}$. Легко видеть, что в коэффициент $\hat{\zeta}_{10}$ асимптотического разложения (9.11) входит слагаемое

$$\hat{\zeta}_{10} = \psi'^2(\lambda_0) \hat{\zeta}_0 + \dots, \quad (10.13)$$

и, следовательно, $\hat{b}_{12}$ содержит член

$$\frac{1}{t} \psi'^2(\lambda_0) \hat{\zeta}_0.$$

Когда t стремится к бесконечности, этот член исчезает. Однако после вычисления вакуумного среднего от ψ'^2/t вместе с экспоненциальным фактором $e^{t\mathcal{F}_e}$ он становится пропорционален положительной степени t . В самом деле, действие оператора ψ на функции от ϕ_A и ϕ_D эквивалентно дифференцированию [5], поэтому имеем

$$(0|\frac{1}{t}\psi'^2(\lambda_0)e^{t\mathcal{F}_e(\phi_A, \phi_D)}|0) \sim te^{t\mathcal{F}_e(0,0)} + \dots \quad (10.14)$$

Таким образом, мы видим, что слагаемое ψ'^2/t , которое было малым до усреднения и, следовательно, могло быть истолковано как поправка, становится большим после вычисления вакуумного среднего. Разумеется, этот член формирует только предэкспоненту, но не меняет корреляционный радиус. Однако нетрудно видеть, что высшие поправки содержат слагаемые ψ'^4/t^2 , ψ'^6/t^3 и т.д., которые превращаются в t^2 , t^3 и т.д. после усреднения. И вообще все слагаемые вида ψ^n/t^m , где $n > m$, дают положительные степени t после их усреднения вместе с экспоненциальным фактором. Ряд по положительным степеням t суммируется в экспоненту, и в результате меняется корреляционный радиус.

Таким образом, мы заключаем, что, для того чтобы найти правильное асимптотическое поведение корреляционной функции, необходимо иметь некоторую информацию о полном асимптотическом разложении для фредгольмова детерминанта и оператора $\hat{b}_{12}$. По крайней мере, нужно знать структуру высших поправок, зависящих от поля ψ . Лидирующий член (9.25) сам по себе недостаточен. Данное выражение правильно описывает асимптотику оператора $\mathcal{B}$, но не асимптотику его вакуумного среднего.

11. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД. “СДВИНУТАЯ” СЕДЛОВАЯ ТОЧКА

В предыдущем разделе было показано, что фактически в процессе вычисления вакуумного среднего дуальное поле ψ эффективно оказывается пропорциональным t . Это обстоятельство наводит на мысль о том, как можно модифицировать подход, который мы использовали для решения операторнозначной задачи Римана. Напомним матрицу скачка (3.11) исходной задачи Римана (3.16):

$$\begin{aligned} \hat{G}_{11}(\lambda) &= \hat{i} - \vartheta(\lambda)Z(\lambda, \lambda)e^{\phi_D(\lambda)}|1\rangle\langle 1|, \\ \hat{G}_{12}(\lambda) &= 2\pi i(\vartheta(\lambda) - 1)Z(\lambda, \lambda)e^{\psi(\lambda) + \tau(\lambda)}|1\rangle\langle 2|, \\ \hat{G}_{21}(\lambda) &= -\frac{i}{2\pi}\vartheta(\lambda)Z(\lambda, \lambda)e^{\phi_A(\lambda) + \phi_D(\lambda) - \psi(\lambda) - \tau(\lambda)}|2\rangle\langle 1|, \\ \hat{G}_{22}(\lambda) &= \hat{i} - \vartheta(\lambda)Z(\lambda, \lambda)e^{\phi_A(\lambda)}|2\rangle\langle 2|. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Весь асимптотический анализ операторнозначной задачи Римана был основан на разложении решения в окрестности точки $\lambda_0 = x/2t$. Это число является седловой точкой функции $\tau(\lambda)$:

$$\left. \frac{d\tau(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0. \quad (11.2)$$

Заметим, что поле ψ входит в матрицу скачка только в комбинации с функцией $\tau(\lambda)$: $\psi(\lambda) + \tau(\lambda)$, и, как мы отметили, оно может считаться эффективно пропорциональным t . Поэтому вместо точки λ_0 можно рассмотреть новую седловую точку Λ , которая определяется как

$$\left. \frac{d}{d\lambda} (\tau(\lambda) + \psi(\lambda)) \right|_{\lambda=\Lambda} = 0 \quad (11.3)$$

или, что то же самое,

$$\Lambda = \lambda_0 + \frac{i}{2t} \psi'(\Lambda), \quad (11.4)$$

где штрих означает производную по аргументу.

С точки зрения классического асимптотического анализа такой сдвиг седловой точки выглядит достаточно бессмысленным. Фактически разница между начальной и сдвинутой седловыми точками — λ_0 и Λ — является величиной порядка $1/t$ и стремится к нулю, когда t стремится к бесконечности. Формальное решение уравнения (11.4) может быть дано в виде асимптотического ряда по $1/t$ (частный случай формулы (11.6), см. ниже),

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2t} \right)^n \frac{d^{n-1}}{d\lambda_0^{n-1}} [(\psi'(\lambda_0))^n]. \quad (11.5)$$

Замена λ_0 на Λ означает, что мы сдвигаем центр асимптотического разложения на асимптотически малую величину. С помощью ряда (11.5) всегда возможно переразложить любую функцию $f(\Lambda)$ в асимптотический ряд по $1/t$ с центром в начальной точке λ_0 :

$$f(\Lambda) = f(\lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2t} \right)^n \frac{d^{n-1}}{d\lambda_0^{n-1}} [(\psi'(\lambda_0))^n f'(\lambda_0)]. \quad (11.6)$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа (см., например, [51]). В результате “новое” асимптотическое разложение будет, разумеется, совпадать со “старым”.

Тем не менее данный подход оказывается исключительно полезным, когда мы вспоминаем о роли оператора ψ в процессе усреднения. В самом деле, изучая асимптотическое решение задачи Римана для больших t , мы теперь автоматически принимаем в расчет поле ψ .

Вернемся назад к задаче Римана (3.1б) и рассмотрим подстановку (4.2):

$$\hat{\chi}(\lambda) = \hat{\Phi}(\lambda) \hat{\mathcal{R}}(\lambda), \quad \hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{\varrho}(\lambda) & 0 \\ 0 & (\hat{\varrho}^T(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

Как и прежде, оператор $\hat{\varrho}(\lambda)$ является решением задачи Римана (4.4в), однако теперь мы заменим в соответствующей матрице скачка λ_0 на Λ :

$$\hat{\varrho}_-(\lambda) = \hat{\varrho}_+(\lambda) (\theta(\Lambda - \lambda) \hat{G}_{11} + \theta(\lambda - \Lambda) (\hat{G}_{22}^T)^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (11.8)$$

После этого следует буквально повторить все рассуждения раздела 4, заменяя везде λ_0 на Λ . Ясно, что в конечном итоге мы придем к следующим результатам для коэффициентов асимптотического разложения детерминанта оператора $\hat{q}$:

$$\Delta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \operatorname{sign}(\Lambda - \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \operatorname{sign}(\mu - \Lambda)})), \quad (11.9)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mu d\mu \operatorname{sign}(\Lambda - \mu) \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \operatorname{sign}(\mu - \Lambda)})). \quad (11.10)$$

По сравнению со старыми результатами (4.38), (4.39) раздела 4 единственное отличие состоит в том, что λ_0 заменилась на Λ . Так как $\Lambda - \lambda_0 \sim 1/t$, то ясно, что новые и старые представления для Δ_j асимптотически эквивалентны.

Следует заметить, что точка Λ необязательно должна быть вещественной, поэтому контур скачка в (11.8) может быть слегка деформирован в область комплексных λ с естественным переопределением функций θ (см. (1.27)). Помимо этого, формулы (11.9) и (11.10) следует, вообще говоря, понимать так:

$$\Delta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\Lambda} d\mu \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{-\phi(\mu)})) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda}^{\infty} d\mu \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu)})) \quad (11.11)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\Lambda} \mu d\mu \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{-\phi(\mu)})) - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda}^{\infty} \mu d\mu \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu)})), \end{aligned} \quad (11.12)$$

с интегрированием, идущим, возможно, в комплексной плоскости. Во всех последующих формулах всегда будет предполагаться аналогичная интерпретация интегралов, зависящих от знаковой функции.

Для того чтобы получить фредгольмов детерминант оператора $\tilde{I} + \tilde{V}$, нужно проинтегрировать (4.38) и (4.39) соответственно по x и t . Используя

$$\partial_x \rightarrow \frac{1}{2t_s} \partial_{\Lambda}, \quad \partial_t \rightarrow \partial_t - \frac{\Lambda}{t_s} \partial_{\Lambda}, \quad (11.13)$$

где $t_s = t - (i/2)\psi''(\Lambda)$, имеем

$$\begin{aligned} \ln \det(\tilde{I} + \tilde{V}) \approx & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu (x - 2\mu t + i\psi'(\mu)) \operatorname{sign}(\Lambda - \mu) \times \\ & \times \ln(1 - \vartheta(\mu)(1 + e^{\phi(\mu) \operatorname{sign}(\mu - \Lambda)})). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Следует отметить, что в рамках нашего старого подхода мы получали слагаемое $\psi'(\lambda)$ в подынтегральном выражении (11.14) только после изучения локализованной задачи Римана и дифференциальных уравнений. Как мы уже упоминали в предыдущем

разделе, именно этот член наиболее важен для вычисления вакуумного среднего значения и замечательно, что новый подход позволяет получить этот член уже на первой стадии асимптотического анализа задачи Римана. С другой стороны, этому не следует особенно удивляться. Новая трактовка седловой точки (11.3) фактически означает, что мы рассматриваем функцию ψ так, как если бы она была пропорциональна t . Поэтому совершенно естественно, что вдобавок к слагаемому $x - 2\mu t$ мы получили $i\psi'$. Можно обратить внимание также на то, что

$$x - 2\lambda t + i\psi'(\lambda) = i(\tau(\lambda) + \psi(\lambda))', \quad (11.15)$$

и, таким образом, подынтегральное выражение в формуле (11.14) отражает тот факт, что матрица скачка начальной задачи Римана (3.16) зависит только от комбинации $\tau(\lambda) + \psi(\lambda)$. Итак, мы видим, что метод, предлагаемый в этом разделе, позволяет автоматически проследить зависимость детерминанта Фредгольма от поля ψ вместе с зависимостью от времени t .

Мы еще раз обращаем внимание на то, что в действительности функция ψ не зависит от t и остается фиксированной при t , стремящемся к бесконечности. Следовательно, представления (11.14) и (4.41) асимптотически эквивалентны. Они становятся неэквивалентными, только когда мы вспоминаем о квантовой, операторной природе поля $\psi(\lambda)$.

Локализованная задача Римана может быть рассмотрена в том же духе, как это делалось ранее. Мы хотели бы отметить только один момент. Разложение функции $\tau(\lambda) + \psi(\lambda)$ в точке $\lambda = \Lambda$ имеет вид

$$\tau(\lambda) + \psi(\lambda) = \tau(\Lambda) + \psi(\Lambda) + it_s(\lambda - \Lambda)^2 + \mathcal{O}(\lambda - \Lambda)^3, \quad (11.16)$$

где $t_s = t - i\psi''(\Lambda)/2$ было введено в (11.13). Видно, что переменная t_s играет роль нового времени. Поэтому вполне естественно искать теперь асимптотическое разложение решения задачи Римана по t_s , а не по t . С точностью до замены $t \rightarrow t_s$ и $\lambda_0 \rightarrow \Lambda$ решение новой локализованной задачи Римана формально совпадает с решением старой, в частности (ср. (9.1), (9.2))

$$\hat{b}_{12} \approx \frac{\tilde{\gamma}\nu}{i\sqrt{2\pi}}(2t_s)^{-\nu-1/2} e^{\psi(\Lambda)+\tau(\Lambda)} \hat{\varrho}_{0-}^{(c)} |1\rangle \langle 2| \hat{\varrho}_{0+}^{(c)T}, \quad (11.17)$$

$$\hat{b}_{21} \approx -\frac{\sqrt{2\pi}}{\tilde{\gamma}}(2t_s)^{\nu-1/2} e^{-\psi(\Lambda)-\tau(\Lambda)} (\hat{\varrho}_{0+}^{(c)T})^{-1} |2\rangle \langle 1| (\hat{\varrho}_{0-}^{(c)})^{-1}, \quad (11.18)$$

где

$$\tilde{\gamma} = 2\pi Z(\Lambda, \Lambda) (\vartheta(\Lambda) - 1) \Gamma(\nu) e^{\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{3i\pi}{4}} \quad (11.19)$$

и

$$\nu \equiv \nu(\Lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \ln[(1 - \vartheta(\Lambda) Z(\Lambda, \Lambda) e^{\phi_D(\Lambda)}) (1 - \vartheta(\Lambda) Z(\Lambda, \Lambda) e^{\phi_A(\Lambda)})]. \quad (11.20)$$

Разумеется, теперь $\hat{\varrho}_0^{(c)} = \hat{\varrho}^{(c)}(\Lambda)$ и векторы $|\overset{\circ}{1}\rangle$, $|\overset{\circ}{2}\rangle$ и др. связаны с точкой Λ , а не с точкой λ_0 .

Наконец, используя дифференциальные уравнения для $\hat{b}_{12}$ и $\hat{b}_{21}$, мы можем найти поправки к формулам (11.17), (11.18). Наиболее важной является зависимость этих поправок от функции ψ . Подставляя

$$\hat{b}_{12} = (2t_s)^{-\nu(\Lambda)-1/2} e^{\tau(\Lambda)+\psi(\Lambda)} \hat{\zeta}(\Lambda, t_s), \quad (11.21)$$

$$\hat{b}_{21} = (2t_s)^{\nu(\Lambda)-1/2} e^{-\tau(\Lambda)-\psi(\Lambda)} \hat{\eta}(\Lambda, t_s) \quad (11.22)$$

в уравнения (9.5), (9.6), мы получаем, например, для $\hat{\zeta}$

$$\begin{aligned} & -4i \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t_s} - \frac{4}{t_s} (\hat{\zeta} \hat{\eta} \hat{\zeta} - i\nu \hat{\zeta}) = \\ & = -\frac{1}{t_s^2} \left\{ [(\nu')^2 \ln^2(2t_s) - \nu'' \ln(2t_s)] \hat{\zeta} - 2\nu' \hat{\zeta}' \ln(2t_s) + \hat{\zeta}'' \right\} + \mathcal{O}(\ln(t_s) t_s^{-3}), \end{aligned} \quad (11.23)$$

где штрих теперь означает производную по Λ . Таким образом, с точностью до поправок порядка t_s^{-3} мы снова возвращаемся к уравнению (9.9). Однако на этот раз мы уже приняли во внимание множитель $e^{\psi(\Lambda)}$, и, следовательно, теперь не нужно делать подстановку, аналогичную (10.11). Поэтому замена переменных $(\lambda_0, t) \rightarrow (\Lambda, t_s)$ позволяет убрать зависимость от функции ψ из членов, пропорциональных t_s^{-2} .

Легко видеть, что асимптотическое разложение, аналогичное (9.11), формально решает уравнение (11.23):

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_0(\Lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \hat{\zeta}_{nk}(\Lambda) \frac{(\ln(2t_s))^k}{t_s^n}. \quad (11.24)$$

Аналогичное разложение можно написать и для оператора $\hat{\eta}$.

Чтобы изучать рекуррентные соотношения, возникающие для коэффициентов $\hat{\zeta}_{nk}$ и $\hat{\eta}_{nk}$, необходимо знать явные выражения для слагаемых $\mathcal{O}(t_s^{-3})$ в (11.23). Несложно вычислить эти слагаемые, однако для нашей цели достаточно проверить, что члены порядка t_s^{-3} линейны по ψ . Кроме того, уравнение (11.23) содержит члены порядка t_s^{-4} , которые квадратичны по ψ . Ясно, что для данного n коэффициенты $\hat{\zeta}_{nk}$ и $\hat{\eta}_{nk}$ являются полиномами степени $(n-1)$ или менее по ψ и ее производным. Другими словами, в рамках модифицированного подхода все поправки при большом времени, как и ожидалось, имеют вид ψ^m / t_s^n , где $m < n$. Поэтому, как было объяснено в предыдущем разделе, эти поправки остаются малыми даже после их усреднения по вспомогательному вакууму, и, следовательно, их можно не рассматривать.

Суммируя вышесказанное, получаем в случае отрицательного химического потенциала следующую асимптотику для оператора $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C(\phi_D, \phi_A, \Lambda)(2t_s)^{-\frac{(\nu(\Lambda)+1)^2}{2}} e^{\psi(\Lambda)+\tau(\Lambda)} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x - 2\lambda t + i\psi'(\lambda)) \operatorname{sign}(\Lambda - \lambda) \times \right. \\ & \left. \times \ln \{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda-\Lambda)})\} d\lambda \right\} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right)\right). \end{aligned} \quad (11.25)$$

В отличие от результата (9.25) в данной асимптотике учтены все поправки, которые могут дать вклад в лидирующий член после их усреднения. Поправки к выражению (11.25) остаются малыми после вычисления их вакуумного среднего.

Сравнивая результаты (9.25) и (11.25), можно заметить, что в последнем случае постоянный фактор $C(\phi_D, \phi_A, \Lambda)$ зависит от сдвинутой седловой точки Λ , которая, в свою очередь, неявно зависит от ψ . Как и прежде, постоянный множитель не определен явно, т.к. содержит оператор $\hat{\rho}_0^{(c)}$. В рамках старого метода оператор $\hat{\rho}_0^{(c)}$ зависел только от дуальных полей ϕ_A и ϕ_D , и, следовательно, этот оператор не влиял на лидирующий член асимптотики. Однако теперь $\hat{\rho}_0^{(c)}$ неявно зависит от поля ψ и может изменить асимптотику. Поскольку явное выражение для оператора $\hat{\rho}_0^{(c)}$ нам неизвестно, мы могли бы иметь проблемы при вычислении его вакуумного среднего. Однако легко видеть, что вклад от постоянного множителя $C(\phi_D, \phi_A, \Lambda)$ остается постоянным и после усреднения. В самом деле, вспоминая разложение (11.6), мы имеем

$$C(\phi, \Lambda) = C(\phi, \lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2t}\right)^n \frac{d^{n-1}}{d\lambda_0^{n-1}} [(\psi'(\lambda_0))^n C'(\phi, \lambda_0)]. \quad (11.26)$$

Все члены этого ряда ведут себя как $(\psi/t)^n$. Их вакуумные средние вместе с экспоненциальным фактором являются некоторыми константами:

$$\left(0 \left| \left(\frac{\psi}{t}\right)^n e^{t\mathcal{F}_e(\phi_A, \phi_D)} \right| 0\right) \sim e^{t\mathcal{F}_e(0,0)} (\mathcal{O}(1) + \dots), \quad t \rightarrow \infty. \quad (11.27)$$

Таким образом, замена λ_0 на Λ в функционале C не меняет экспоненциального и степенного законов асимптотики вакуумного среднего значения, а изменяет только постоянный множитель. Так как здесь мы не изучаем этот множитель, то можно просто заменить в C новую седловую точку на старую. Схожие аргументы позволяют заменить t_s на t в степенном множителе. Однако сдвинутую седловую точку Λ следует сохранить в экспоненциальном множителе (т.е. в функциях $\operatorname{sign}(\Lambda - \lambda)$ и $\tau(\Lambda) + \psi(\Lambda)$) и в степени $\nu(\Lambda)$, т.к. эти величины входят в результат вместе с t и $\ln t$, соответственно.

Наш окончательный ответ в случае $h < 0$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & C(\phi_D, \phi_A, \lambda_0)(2t)^{-\frac{(\nu(\Lambda)+1)^2}{2}} e^{\psi(\Lambda)+\tau(\Lambda)} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x - 2\lambda t + i\psi'(\lambda)) \operatorname{sign}(\Lambda - \lambda) \times \right. \\ & \left. \times \ln \{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda-\Lambda)})\} d\lambda \right\} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{\ln^2 t}{t} \right) \right). \end{aligned} \quad (11.28)$$

В случае положительного химического потенциала ситуация вполне аналогична. Асимптотика оператора $\mathcal{B}$ дается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \tilde{C}(\phi_D, \phi_A, \lambda_0)(2t)^{-\frac{\nu^2(\Lambda)}{2}} e^{\psi(\Lambda_1)+\tau(\Lambda_1)} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (x - 2\lambda t + i\psi'(\lambda)) \operatorname{sign}(\Lambda - \lambda) \times \right. \\ & \left. \times \ln \{1 - \vartheta(\lambda)(1 + e^{\phi(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda-\Lambda)})\} d\lambda \right\} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right). \end{aligned} \quad (11.29)$$

Общая структура этого результата такая же, как и для отрицательного химического потенциала; а именно мы имеем экспоненциальный, степенной и постоянный факторы. Однако все эти факторы немного отличаются от их аналогов в (11.28). Во-первых, интеграл в экспоненте берется по контуру Γ (см. рис. 2). Во-вторых, мы имеем сумму $\tau(\Lambda_1) + \psi(\Lambda_1)$ вместо $\tau(\Lambda) + \psi(\Lambda)$. В-третьих, предэкспоненциальная степень t тоже другая. Причины этих различий были объяснены в разделах 3 и 5.

В заключение мы хотели бы слегка коснуться предела свободных фермионов. В этом пределе константа связи s стремится к бесконечности и можно все дуальные поля положить равными нулю. При этом формулы (11.28), (11.29) в точности воспроизводят результаты работы [29].

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели операторнозначную задачу Римана (3.16), (3.11). Эта задача Римана позволяет найти асимптотику на больших временах и расстояниях фредгольмова детерминанта, который, в свою очередь, описывает температурную корреляционную функцию локальных полей НУШ вне точки свободных фермионов. Хотя мы и использовали усовершенствованную технику, основанную на нелинейном методе перевала [37], основная идея схемы, применяемой в данной статье, в основном совпадает с подходом, обсуждавшимся в [29] для предела свободных фермионов. Однако, как мы видели, операторнозначная задача Римана является гораздо более сложной и не только с технической точки зрения. В частности, решение задачи Римана было дано с точностью до функции $\hat{\varrho}(\lambda, u, v)$, которая задается как решение определенного интегрального уравнения. В то же время, несмотря на эту неполноту, нам удалось получить явные выражения для экспоненциального и степенного законов убывания оператора $\mathcal{B}$.

Особая проблема возникает из-за дуальных полей. Наличие этих квантовых операторов вызывает необходимость позаботиться не только об асимптотике самого оператора $\mathcal{B}$, но и об асимптотике его вакуумного среднего. Это приводит к нестандартному асимптотическому анализу, включающему в себя сдвиг седловой точки.

Оставшаяся стадия вычисления корреляционной функции состоит в усреднении результатов (11.28), (11.29) по вспомогательному вакууму. Метод такого усреднения был развит в [5], хотя в этой работе и не рассматривались вклады некоторых поправок. Тем не менее можно с уверенностью утверждать, что вычисление вакуумного среднего приводит к возникновению нелинейных интегральных уравнений, тесно связанных с уравнениями термодинамического ансамбля Бете. Окончательный результат для асимптотики корреляционной функции может быть сформулирован в терминах решений этих уравнений. Эти вопросы будут рассмотрены в последующих публикациях.

Благодарности. Мы хотели бы поблагодарить В.Е. Корепина за полезные обсуждения. Настоящая работа была выполнена при частичной поддержке NSF (грант № DMS-9801608), РФФИ (грант № 96-01-00344) и INTAS (грант № 01-166-ext).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Детерминант Фредгольма

Полное детерминантное представление для корреляционной функции (1.1) имеет вид

$$\langle \Psi(0,0) \Psi^\dagger(x,t) \rangle_T = -\frac{e^{-iht}}{2\pi} \left(0 \left| \frac{\det(\tilde{I} + \tilde{V})}{\det(\tilde{I} - \frac{1}{2\pi} \tilde{K}_T)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_{12}(u,v) du dv \right| 0 \right), \quad (\text{П1.1})$$

где $\hat{b}_{12}(u,v)$ задается уравнением (11.21). Интегральный оператор $\tilde{I} + \tilde{V}$ действует на вещественной оси следующим образом:

$$(\tilde{I} + \tilde{V}) \circ f(\mu) = f(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\lambda, \mu) f(\mu) d\mu, \quad (\text{П1.2})$$

где $f(\lambda)$ – некая пробная функция. Ядро оператора $\tilde{V}(\lambda, \mu)$ имеет вид

$$\tilde{V}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} \int_{-\infty}^{\infty} du (E_+(\lambda|u) E_-(\mu|u) - E_-(\lambda|u) E_+(\mu|u)). \quad (\text{П1.3})$$

Здесь

$$E_+(\lambda|u) = \frac{1}{2\pi} \frac{Z(u, \lambda)}{Z(u, u)} \left(\frac{e^{-\phi_A(u)}}{u - \lambda + i0} + \frac{e^{-\phi_D(u)}}{u - \lambda - i0} \right) \times \\ \times \sqrt{\vartheta(\lambda)} e^{\psi(u) + \tau(u) + \frac{1}{2}(\phi_D(\lambda) + \phi_A(\lambda) - \psi(\lambda) - \tau(\lambda))}, \quad (\text{П1.4})$$

$$E_-(\lambda|u) = \frac{1}{2\pi} Z(u, \lambda) e^{\frac{1}{2}(\phi_D(\lambda) + \phi_A(\lambda) - \psi(\lambda) - \tau(\lambda))} \sqrt{\vartheta(\lambda)}. \quad (\text{П1.5})$$

Представление (П1.1) содержит также еще один фредгольмов детерминант, однако последний не зависит от времени t и расстояния x , как, впрочем, и от дуальных полей:

$$\tilde{K}_T(\lambda, \mu) = \frac{2c}{(\lambda - \mu)^2 + c^2} \sqrt{\vartheta(\lambda)\vartheta(\mu)}. \quad (\text{П1.6})$$

Матрицу скачка операторнозначной задачи Римана можно построить начиная с ядра $\tilde{V}(\lambda, \mu)$ с помощью стандартной процедуры [3, 8]

$$\hat{G}^{\text{in}}(\lambda) = \hat{I} + 2\pi i \begin{pmatrix} -E_+(\lambda|u)E_-(\lambda|v) & E_+(\lambda|u)E_+(\lambda|v) \\ -E_-(\lambda|u)E_-(\lambda|v) & E_-(\lambda|u)E_+(\lambda|v) \end{pmatrix}. \quad (\text{П1.7})$$

Для того чтобы получить матрицу скачка (3.2), необходимо сделать следующее преобразование:

$$\hat{G}(\lambda) = \hat{\chi}_+^0(\lambda) \hat{G}^{\text{in}}(\lambda) (\hat{\chi}_-^0(\lambda))^{-1}, \quad (\text{П1.8})$$

где

$$\hat{\chi}^0(\lambda|u, v) = \hat{I} + \frac{e^{\psi(u)+\tau(u)}}{\lambda - u} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П1.9})$$

После этого преобразования мы приходим к задаче Римана (3.1б), рассмотренной в разделе 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Регуляризованный интегральный оператор

Регуляризация задачи Римана, рассмотренная в разделе 3, соответствует новому детерминанту Фредгольма $\det(\tilde{I} + \tilde{V}_\epsilon)$. Ядро нового интегрального оператора $\tilde{V}_\epsilon(\lambda, \mu)$ имеет тот же самый вид, что и исходное:

$$\tilde{V}_\epsilon(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} \int_{-\infty}^{\infty} du (E_+^\epsilon(\lambda|u)E_-^\epsilon(\mu|v) - E_-^\epsilon(\lambda|u)E_+^\epsilon(\mu|v)). \quad (\text{П2.1})$$

Здесь

$$E_-^\epsilon(\lambda|u) = \frac{1}{2\pi} Z(u, \lambda) Z(\lambda, \lambda) \sqrt{\frac{\vartheta(\lambda)}{\mathcal{N}_\epsilon(\lambda)}} e^{\frac{1}{2}(\phi_A(\lambda) + \phi_D(\lambda) - \psi(\lambda) - \tau(\lambda))}, \quad (\text{П2.2})$$

$$E_+^\epsilon(\lambda|u) = E^\epsilon(\lambda|u)E_-^\epsilon(\lambda|u) \quad (\text{П2.3})$$

и

$$\begin{aligned} E^\epsilon(\lambda|u) = \frac{1}{Z(u, \lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi dw \frac{e^{\psi(\xi)+\tau(\xi)}}{\mathcal{N}_\epsilon(\xi) Z(\xi, \xi)} \delta_\epsilon(u - \xi) \delta_\epsilon(w - \xi) \times \\ \times Z(u, \xi) Z(w, \xi) Z(w, \lambda) \left[\frac{e^{-\phi_D(\xi)}}{\xi - \lambda - i0} + \frac{e^{-\phi_A(\xi)}}{\xi - \lambda + i0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Легко видеть, что предел $\epsilon \rightarrow 0$ хорошо определен во всех формулах. В частности, $\tilde{V}_\epsilon \rightarrow \tilde{V}$.

Первоначальная матрица скачка $\hat{G}^{\text{in}}$ имеет ту же структуру, что и матрица (П1.7):

$$\hat{G}^{\text{in}}(\lambda) = \hat{I} + 2\pi i \begin{pmatrix} -E_+^\epsilon(\lambda|u)E_-^\epsilon(\lambda|v) & E_+^\epsilon(\lambda|u)E_+^\epsilon(\lambda|v) \\ -E_-^\epsilon(\lambda|u)E_-^\epsilon(\lambda|v) & E_-^\epsilon(\lambda|u)E_+^\epsilon(\lambda|v) \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.5})$$

Для того чтобы получить матрицу скачка (3.11), необходимо сделать преобразование, аналогичное (П1.8), с матрицей

$$\hat{\chi}^{0\epsilon}(\lambda|u, v) = \hat{I} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\lambda - \xi} \delta_\epsilon(u - \xi) \delta_\epsilon(v - \xi) Z(u, \xi) Z(v, \xi) e^{\psi(\xi) + \tau(\xi)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.6})$$

Выражение для логарифмических производных регуляризованного фредгольмова детерминанта через коэффициенты $\hat{b}$ и $\hat{c}$ (2.19), (2.20) может быть получено тем же путем, каким это было сделано в [3]. Дифференциальные уравнения (2.21) также являются очевидными следствиями регуляризованной задачи Римана.

Список литературы

- [1] T. Kojima, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 657.
- [2] T. Kojima, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Commun. Math. Phys. 1997. V. 189. P. 709.
- [3] V. E. Korepin, N. A. Slavnov. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 8241.
- [4] H. A. Славнов. Зап. научн. семин. ПОМИ. 1998. Т. 251. С. 80; solv-int/9810016.
- [5] V. E. Korepin, N. A. Slavnov. J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 8623.
- [6] C. N. Yang, C. P. Yang. J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 1115.
- [7] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov. Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [8] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: Univ. Press, 1993.
- [9] A. Lenard. J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1268.
- [10] V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Commun. Math. Phys. 1990. V. 129. P. 103.
- [11] V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Commun. Math. Phys. 1991. V. 136. P. 633.
- [12] E. Barouch, B. M. McCoy, T. T. Wu. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1409.
- [13] C. A. Tracy, B. M. McCoy. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1500.
- [14] B. M. McCoy, C. A. Tracy, T. T. Wu. J. Math. Phys. 1977. V. 18. № 5. P. 1058.
- [15] A. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, M. Sato. Physica D. 1980. V. 1. P. 80.
- [16] B. M. McCoy, J. H. H. Perk, R. E. Shrock. Nucl. Phys. B. 1983. V. 220. № [FS8]. P. 35.
- [17] B. M. McCoy, J. H. H. Perk, R. E. Shrock. Nucl. Phys. B. 1983. V. 220. P. 269.
- [18] A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Int. J. Mod. Phys. B. 1990. V. 4. P. 1003.
- [19] A. Berkovich. J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 1543.
- [20] A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. № 11. P. 1704.
- [21] A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. The quantum correlation function as the τ function of classical differential equations. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 407.
- [22] A. Leclair, F. Lesage, S. Sachdev, H. Saleur. Nucl. Phys. B. 1996. V. 482. P. 579.
- [23] H. G. Vaidya, C. A. Tracy. Phys. Lett. A. 1978. V. 68. P. 378.

- [24] *H. G. Vaidya, C. A. Tracy.* J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 2291.
- [25] *B. M. McCoy, Sh. Tang.* Physica D. 1986. V. 19. P. 42; V. 20. P. 187.
- [26] *E. L. Basor, C. A. Tracy.* Asymptotics of a tau-function and Toeplitz determinants with singular generating function. Preprint RIMS-810. Kyoto: Kyoto Univ., 1991.
- [27] *C. A. Tracy.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 142. P. 297.
- [28] *A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin.* Phys. Lett. A. 1989. V. 141. P. 121; Commun. Math. Phys. 1990. V. 129. P. 205; V. 130. P. 471; Nucl. Phys. B. 1991. V. 348. P. 757; Physica D. 1991. V. 53. P. 187.
- [29] *A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, G. G. Varzugin.* Physica D. 1992. V. 54. P. 351.
- [30] *P. Deift, X. Zhou.* Long-time asymptotics for the autocorrelation function of the transverse Ising chain at the critical magnetic field. In: Singular Limits of Dispersive Waves. NATO ASI Series B. Physics. V. 320. Eds. N.M. Ercolani, I.R. Gabitov, C.D. Levermore, D. Serre. New York: Plenum Press, 1994.
- [31] *C. A. Tracy, H. Widom.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 163. P. 33.
- [32] *А. Б. Шабат.* Функции, анализ и его прилож. 1975. Т. 9. Вып. 3. С. 75.
- [33] *С. В. Манакон.* ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 4. С. 1392.
- [34] *M. J. Ablowitz, A. C. Newell.* J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 1277.
- [35] *В. Е. Захаров, С. В. Манакон.* ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 1. С. 203.
- [36] *M. J. Ablowitz, H. Segur.* Stud. Appl. Math. 1977. V. 57. № 1. P. 13.
- [37] *P. Deift, X. Zhou.* Ann. Math. 1995. V. 137. P. 295.
- [38] *P. A. Deift, A. R. Its, X. Zhou.* Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A.S. Fokas, V.E. Zakharov. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 181.
- [39] *P. Deift, X. Zhou.* Long-Time Behavior of the Non-Focusing Nonlinear Schrödinger Equation – a Case Study. Tokyo: The University of Tokyo, 1994.
- [40] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.
- [41] *А. Р. Итс.* ДАН СССР. 1981. Т. 261. № 1. С. 14.
- [42] *P. A. Deift, A. R. Its, X. Zhou.* Ann. Math. 1997. V. 146. P. 149.
- [43] *P. M. Bleher, A. R. Its.* Semiclassical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann–Hilbert problem, and universality in the matrix model. IUPUI preprint 97-2. Indiana: IUPUI, 1997.
- [44] *P. A. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou.* Intern. Math. Res. Notices. 1997. V. 16. P. 759.
- [45] *H. Frahm, A. R. Its, V. E. Korepin.* An operator-valued Riemann–Hilbert problem associated with the XXX model. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations. (CRM Proc. Lect. Notes. V. 9). Eds. D. Levi, L. Vinet, and P. Winternitz. Providence, RI: AMS, 1996. P. 133; IUPUI preprint 95-6. Indiana: IUPUI, 1995.
- [46] *V. E. Korepin.* Commun. Math. Phys. 1987. V. 113. P. 177.
- [47] *A. R. Its, V. E. Korepin, A. Waldron.* Probability of phase separation for the Bose gas with delta interaction. In: Statphys 19, Proceedings of 19 IUPAP International Conference on Statistical Physics. Ed. B.-L. Hao. Singapore: World Scientific, 1996. P. 101.
- [48] *E. H. Lieb, W. Liniger.* Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1605.
- [49] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.
- [50] *М. Абловиц, Х. Сигур.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [51] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа. В 2-х частях. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 28.X.1998 г.