Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Бикулов, Стохастические уравнения математической физики над полем p -адических чисел, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 2, 249–263

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:11:23

© 1999 г.

А. Х. Биккулов*

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НАД ПОЛЕМ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Исследованы свойства и вероятностные характеристики решений p -адических стохастических уравнений математической физики с псевдодифференциальным оператором Владимирова и его многомерным обобщением. Построены p -адические аналоги броуновского листа и броуновского движения Леви.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы проводятся интенсивные исследования по применению p -адического анализа в математической физике, в частности в теории случайных процессов [1].

В [2] Воловичем и автором был построен и исследован новый случайный процесс над кольцом целых p -адических чисел, названный p -адическим броуновским движением в силу некоторых его свойств, общих с классическим броуновским движением.

В данной статье исследуются случайные поля как решения стохастических обобщенных псевдодифференциальных уравнений, являющихся p -адическими аналогами уравнений математической физики, таких как волновое уравнение и уравнение Лапласа. Роль оператора дифференцирования играет псевдодифференциальный оператор Владимирова [3].

Статья организована следующим образом. Во втором разделе излагаются необходимые для дальнейшего понятия из теории случайных процессов и p -адического анализа.

Затем в третьем разделе вводится p -адическое броуновское движение на Q_p как решение псевдодифференциального уравнения – p -адического аналога уравнения Ланжевена – и рассматриваются некоторые его свойства.

И наконец, в четвертом разделе построены решения стохастических уравнений на Q_p^2 . Для псевдодифференциального оператора (p -адического аналога оператора гиперболического типа) исследована задача Гурса и показано, что ее решением является p -адический аналог броуновского листа. Для аналога оператора Лапласа с нулевым дополни-

*Институт химической физики РАН, Москва, Россия

тельным условием в точке $(0, 0)$ найдено решение, которое мы называем p -адическим броуновским движением Леви.

Результаты, полученные в данной работе, могут найти применение в некоторых задачах динамики сильно неупорядоченных сред с фрустрациями, таких как спиновые стекла, белковые глобулы и т. д.

О других исследованиях p -адических случайных процессов см. [4–6]. В работе Кочубея [7] исследуются стохастические дифференциальные уравнения с действительным временем и p -адической координатой. Псевдодифференциальные уравнения параболического типа над полем p -адических чисел рассматривались в [8].

2. НЕКОТОРЫЕ ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть дано вероятностное пространство (Ω, Σ, P) с мерой P на σ -алгебре событий Σ .

Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называется Σ -измеримая вещественно- или комплекснозначная функция на Ω , т. е. $\xi^{-1}(B) \in \Sigma$ для любого борелевского множества B на R или C .

В дальнейшем будем рассматривать различные случайные отображения. Напомним, что случайным отображением множества X в измеримое пространство $(Y, \mathcal{B})$ называется отображение $\xi: X \times \Omega \rightarrow Y$, являющееся при произвольном $x \in X$ измеримым отображением (Ω, Σ) в $(Y, \mathcal{B})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если X – подмножество в поле p -адических чисел Q_p (Q_p^n), то случайное отображение $\xi(x, \omega)$ называется p -адической случайной функцией (p -адическим случайным полем).

p -Адическая случайная функция называется также p -адическим случайным процессом.

По поводу определения Q_p и Q_p^n см. [1]. Напомним только, что для любого простого числа p поле Q_p является пополнением поля рациональных чисел Q по p -адической норме $|\cdot|_p$. Если ненулевое рациональное число представлено в виде $x = p^k \cdot m/n$, где m и n не делятся на p , то $|x|_p = p^{-k}$. Пространство $Q_p^n = Q_p \times Q_p \times \cdots \times Q_p$ состоит из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(Q_p^n)$ – пространство основных функций, т. е. комплекснозначных, локально-постоянных функций с компактным носителем p -адического аргумента (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. p -Адической обобщенной случайной функцией называется случайное отображение $\xi: \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow C$, линейное по $\varphi \in \mathcal{D}$, если для любого $B \subset C$ и фиксированного $\varphi \in \mathcal{D}$ множество $\{\omega \in \Omega: \xi(\varphi, \omega) \in B\}$ содержится в Σ .

В случае, если пространство $\mathcal{D}$ состоит из функций одного переменного, соответствующая обобщенная случайная функция называется p -адическим обобщенным случайным процессом. Если же пространство $\mathcal{D}$ является пространством функций многих переменных, ξ называется p -адическим обобщенным случайным полем.

Основное содержание статьи можно охарактеризовать как исследование граничных задач для обобщенных стохастических псевдодифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{A}\Psi = \Phi, \quad (2.1)$$

где Φ — p -адический белый шум, которой определен ниже, и $\mathbf{A}$ — псевдодифференциальный оператор (над полем p -адических чисел) в открытом множестве $O \subset Q_p^n$, т.е. оператор вида

$$(\mathbf{A}\psi)(x) = \int_{Q_p^n} a(\xi, x) \tilde{\psi}(\xi) \chi(-\xi \cdot x) d^n \xi, \quad x \in O,$$

действующий на комплекснозначные функции $\psi(x)$ p -адического аргумента $x \in O$. Здесь функция ψ предполагается заданной на всем пространстве Q_p^n , вне O она продолжена нулем, $\tilde{\psi}(\xi)$ — ее преобразование Фурье:

$$\tilde{\psi}(\xi) = \int_O \psi(x) \chi(\xi \cdot x) d^n x,$$

где $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$ и χ — аддитивный характер χ_p группы Q_p [1]. Функция $a(\xi, x)$, $\xi \in Q_p^n$, $x \in O$, называется символом оператора $\mathbf{A}$. В случае $n = 1$ и $a(\xi, x) = |\xi|_p^\alpha$, $\alpha \in R$, псевдодифференциальный оператор A называется оператором Владимирова и обозначается $\mathbf{D}^\alpha$ (см. [1, 3]). По поводу p -адического анализа мы отсылаем к книге [1].

3. p -АДИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НА Q_p

В этом разделе построено и исследовано p -адическое броуновское движение на Q_p , которое получено как решение стохастического псевдодифференциального уравнения — аналога уравнения Ланжевена. Сначала докажем его существование, а затем дадим определение. p -Адическое броуновское движение на Z_p было построено в [2].

Пусть даны вероятностное пространство (Ω, Σ, P) и измеримое пространство $(C, \mathcal{B})$, где C — поле комплексных чисел, а $\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств из C . Пусть дан p -адический обобщенный случайный процесс

$$\Phi(\varphi; \omega) = \langle \Phi(t; \omega), \varphi(t) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(Q_p), \quad \omega \in \Omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Обобщенный случайный процесс $\{\Phi(\varphi; \omega), \varphi \in \mathcal{D}(Q_p)\}$ называется гауссовским, если для любого конечного набора функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ из $\mathcal{D}(Q_p)$ и любого борелевского множества $B \subset C^n$ мера множества $\mathcal{A} = \{\omega \in \Omega: (\Phi(\varphi_1; \omega), \dots, \Phi(\varphi_n; \omega)) \in B\}$ выражается формулой

$$P\{\mathcal{A}\} = \frac{\det \Lambda}{(2\pi)^n} \int_B e^{-\langle \Lambda z, z \rangle} dz \wedge d\bar{z}, \quad (3.1)$$

где Λ — положительно-определенная матрица,

$$(\Lambda z, z) = \sum_{i,j} \Lambda_{i,j} z_i \bar{z}_j$$

— квадратичная форма, $\Lambda^{-1} = G$, где G — положительно-определенная невырожденная матрица с элементами $G_{ij} = E\Phi(\varphi_i)\bar{\Phi}(\varphi_j)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, $dz \wedge d\bar{z} = 2^n dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. p -Адитическим белым шумом называется гауссовский обобщенный случайный процесс $\{\Phi(\varphi; \omega), \varphi \in \mathcal{D}(Q_p)\}$ со средним

$$E\Phi(\varphi) = 0$$

и ковариацией

$$E\Phi(\varphi)\bar{\Phi}(\psi) = \int_{Q_p} \varphi(t)\bar{\psi}(t) dt.$$

ТЕОРЕМА 3.1. p -Адитический белый шум $\Phi(\varphi; \omega)$ существует и однозначно определен своим средним и ковариацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теория меры в линейных топологических пространствах, изложенная, например, в [9], непосредственно применима к нашему случаю.

Если X — локально-выпуклое пространство, то стандартным образом вводится понятие меры цилиндрических множеств в сопряженном пространстве X' .

Пусть на X задан непрерывный, положительно-определенный, невырожденный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$. Тогда на X' существует единственная гауссовская мера цилиндрических множеств μ такая, что

$$\int_{X'} e^{i\langle \Phi, \varphi \rangle} \mu(\Phi) = e^{-B(\varphi, \varphi)/2}.$$

Если X — ядерное пространство, то в силу теоремы 2 работы [9, с. 428] любая гауссовская мера в X' является счетно-аддитивной.

В нашем случае мы имеем $X = \mathcal{D}(Q_p)$, и известно [3], что пространство $\mathcal{D}(Q_p)$ является ядерным. Поэтому в силу изложенного существует счетно-аддитивная мера μ на $\mathcal{D}'(Q_p)$ с ковариацией $B(\varphi, \psi)$.

В частности, мы можем взять

$$B(\varphi, \psi) = \int_{Q_p} \varphi(t)\bar{\psi}(t) dt.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим наиболее простую в своей постановке задачу, а именно будем искать p -адическое броуновское движение $\{\Psi(t; \omega), t \in Q_p\}$ как обобщенное решение уравнения типа (2.1) в классе непрерывных функций.

Отметим, что постановка тех или иных граничных задач для обобщенного псевдодифференциального уравнения зависит от его правой части Φ , диктующей вместе с оператором $\mathbf{A}$ выбор соответствующего функционального класса для Ψ .

Рассмотрим задачу Коши

$$\mathbf{D}_t \Psi = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \Phi, \quad (3.2)$$

$$\Psi(t; \omega)|_{t=0} = 0 \quad (3.3)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$. Здесь $\mathbf{D}_t$ – оператор Владимирова, $\Phi(\varphi; \omega)$ – p -адический белый шум $\Phi \in \mathcal{E}'$, где $\mathcal{E}'$ – пространство обобщенных функций с компактным носителем.

ТЕОРЕМА 3.2. *Решение задачи Коши (3.2), (3.3) существует в классе непрерывных функций $\mathcal{C}(Q_p)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фундаментальное решение оператора $\mathbf{D}_t$ найдено в [3]. Оно имеет вид

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{p-1}{p \ln p} \ln |t|_p.$$

Решение уравнения (3.2) в силу теоремы 1 работы [1, с. 173] существует в $\mathcal{D}'$ и для любого $\omega \in \Omega$ имеет вид

$$\Psi(t; \omega) = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} (\mathcal{E} * \Phi)(t; \omega) + C(\omega),$$

где $C(\omega)$ – случайная величина.

С точностью до константы это решение можно формально выразить через фурье-образ белого шума

$$\Psi(t; \omega) = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \int_{Q_p} \frac{\chi(kt) - 1}{|k|_p} \tilde{\Phi}(k; \omega) dk. \quad (3.4)$$

Покажем, что этот несобственный интеграл существует в $L^2(\Omega, \mathbf{P})$.

Рассмотрим последовательность случайных непрерывных функций $\{\Psi_n(t; \omega)\}$ вида

$$\Psi_n(t; \omega) = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \int_{B_n} \frac{\chi(kt) - 1}{|k|_p} \tilde{\Phi}(k; \omega) dk, \quad (3.5)$$

где $B_n = \{k \in Q_p: |k|_p \leq p^n\}$.

Эти функции действительно непрерывны, т.к. фурье-образ $\tilde{\Phi}(k; \omega)$ белого шума принадлежит к локально-постоянным функциям $\mathcal{E}(Q_p)$ (см. [1, с. 128]), а функция

$(\chi(kt) - 1)/|k|_p \in L^1(B_n)$, тогда подынтегральная функция в (3.5) принадлежит $L^1(B_n)$, а значит, применим аналог теоремы Римана–Лебега [1, с. 127].

Покажем, что последовательность $\{\Psi_n(t; \omega)\}$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем квадратическом.

Из формулы (3.5) получаем

$$E|\Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t)|^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \right)^2 \int_{\Omega} \left| \int_{S_{n+1}} \frac{\chi(kt) - 1}{|k|_p} \tilde{\Phi}(k; \omega) dk \right|^2 P(d\omega),$$

где $S_{n+1} = B_{n+1} - B_n$. Поменяем порядок интегрирования и проинтегрируем по Ω . Тогда

$$\begin{aligned} E|\Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t)|^2 &= \left(\frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \right)^2 \int_{S_{n+1}} \frac{|\chi(kt) - 1|^2}{|k|_p^2} dk \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \right)^2 \int_{S_{n+1}} \frac{dk}{|k|_p^2}. \end{aligned}$$

Вычисляя этот p -адический интеграл, получаем

$$E|\Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t)|^2 \leq \frac{2(p-1)}{p+1} p^{-n}, \quad (3.6)$$

откуда видно, что в $L^2(\Omega, P)$ существует предел последовательности $\{\Psi_n(t; \omega)\}$, который и определяет несобственный интеграл (3.4).

Заметим, что тем самым доказано существование интеграла (3.4) и по вероятности.

Докажем теперь, что последовательность непрерывных функций $\{\Psi_n(t; \omega)\}$ сходится равномерно по $t \in Q_p$ для почти всех $\omega \in \Omega$ к функции $\Psi(t; \omega)$, которая определяется интегралом (3.4). Для этого достаточно выполнить условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\Psi - \Psi_n| > \varepsilon\} < \infty \quad (3.7)$$

для любого $\varepsilon > 0$ (см. [10, лемма 2, с. 20]).

Действительно, воспользовавшись неравенством Чебышева

$$P\{|\Psi - \Psi_n| > \varepsilon\} \leq \frac{E|\Psi - \Psi_n|^2}{\varepsilon^2}$$

и аналогично тому, как при доказательстве фундаментальности последовательности $\{\Psi_n(t; \omega)\}$, установив неравенство

$$E|\Psi - \Psi_n|^2 \leq \frac{2p}{p+1} p^{-n},$$

можно видеть, что условие (3.7) выполняется.

Таким образом, существует предел последовательности $\{\Psi_n(t; \omega)\}$. Он имеет вид (3.4), и последовательность $\{\Psi_n(t; \omega)\}$ сходится к нему равномерно почти для всех $\omega \in \Omega$. В соответствии с теоремой Лебега предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция.

Убедиться в том, что функция (3.4) является решением задачи Коши (3.2), (3.3), можно непосредственной подстановкой. На этом заканчивается доказательство теоремы 3.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. p -Адитическим броуновским движением на Q_p называется гауссовский случайный процесс $\Psi(t; \omega)$, $t \in Q_p$, такой, что:

- 1) $\Psi(0; \omega) = 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$;
- 2) $E\Psi(t) = 0$;
- 3) $E\Psi(t)\overline{\Psi}(s) = G_p(t, s) = (|t|_p + |s|_p - |s - t|_p)/2$.

ТЕОРЕМА 3.3. Решение (3.4) задачи Коши (3.2), (3.3) определяет p -адическое броуновское движение на Q_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения следует из предыдущей теоремы. Выполнение свойств 1 и 2 определения 3.3 очевидно. Вычислим ковариацию

$$E\Psi(t)\overline{\Psi}(s) = \left(\frac{p}{\sqrt{2(p+1)}}\right)^2 \int_{\Omega} P(d\omega) \int_{Q_p} dk \frac{\chi(kt) - 1}{|k|_p} \widetilde{\Phi}(k; \omega) \int_{Q_p} dl \frac{\chi(-ls) - 1}{|l|_p} \overline{\widetilde{\Phi}}(l; \omega).$$

Меняя порядок интегрирования (это можно сделать в силу теоремы Фубини), проинтегрируем по ω , а затем по l и получим

$$E\Psi(t)\overline{\Psi}(s) = \left(\frac{p}{\sqrt{2(p+1)}}\right)^2 \int_{Q_p} dk \frac{(\chi(kt) - 1)(\chi(-kt) - 1)}{|k|_p^2}.$$

Этот интеграл можно представить в виде суммы трех интегралов вида

$$\int_{Q_p} dk \frac{\chi(kt) - 1}{|k|_p^2} = \frac{p+1}{p^2} |t|_p$$

(вычисление этого интеграла см. в [11]).

Этим завершается доказательство теоремы.

Приведем некоторые свойства p -адического броуновского движения (аналогичные свойства броуновского движения на Z_p были получены в [2]):

1. Если $|t|_p \neq |t'|_p$, то

$$G_p(t, t') = \frac{1}{2} \min(|t|_p, |t'|_p).$$

2. Дисперсия p -адического броуновского движения имеет вид

$$D_p(h) = E|\Psi(t+h) - \Psi(t)|^2 = |h|_p,$$

и верна адельная формула

$$\prod_p D_p(h) = 1, \quad h \in Q.$$

3. Если $|t_1|_p \leq |t_2|_p < |t_3|_p \leq |t_4|_p$, то случайный вектор

$$(\Psi(t_2; \omega) - \Psi(t_1; \omega), \Psi(t_4; \omega) - \Psi(t_3; \omega))$$

распределен по двумерному гауссовскому закону со средним $(0, 0)$. Кроме того,

$$E(\Psi(t_2) - \Psi(t_1))(\overline{\Psi}(t_4) - \overline{\Psi}(t_3)) = 0.$$

4. Процессы $\{\Psi(t; \omega), t \in Q_p \setminus \{0\}\}$ и $\{|t|_p \Psi(t^{-1}; \omega), t \in Q_p \setminus \{0\}\}$ имеют одно и то же распределение. Действительно,

$$\begin{aligned} E|t|_p \Psi(t^{-1}) &= E\Psi(t) = 0, \\ E|t|_p |s|_p \Psi(t^{-1}) \overline{\Psi}(s^{-1}) &= E\Psi(t) \overline{\Psi}(s). \end{aligned}$$

5. Для фиксированных a и λ из Q_p каждый из процессов

$$\begin{aligned} \Psi(t + a; \omega) - \Psi(a; \omega), \quad t \in Q_p, \\ |\lambda|_p^{-1} \Psi(\lambda_2 t; \omega), \quad t \in Q_p, \end{aligned}$$

является p -адическим броуновским движением, т.е. имеет среднее, равное нулю, и ковариационную функцию $G_p(s, t)$.

6. Для ковариационной функции p -адического броуновского движения верны формулы

$$\begin{aligned} G_p(rs, rt) &= |r|_p G_p(s, t), \quad r, s, t \in Q_p, \\ \mathbf{D}_s \mathbf{D}_t G_p(s, t) &= \mathbf{D}_t \mathbf{D}_s G_p(s, t) = \frac{p^2}{2(p+1)} \delta(s-t), \end{aligned}$$

где $\mathbf{D}_t$ — оператор Владамира.

7. Найдем переходную функцию p -адического броуновского движения. Для упрощения записи будем рассматривать вещественнозначное p -адическое броуновское движение. Комплекснозначное p -адическое броуновское движение представимо в виде

$$\Psi(t; \omega) = X(t; \omega) + iY(t; \omega),$$

где $X(t; \omega)$ и $Y(t; \omega)$ — независимые случайные процессы с нулевыми средними $EX(t) = EY(t) = 0$.

Нетрудно показать, что

$$EX(t)X(s) = EY(t)Y(s) = G_p(s, t).$$

Поэтому n -мерная плотность вероятности вещественного процесса имеет вид

$$p_{t_1 \dots t_n} = \frac{(\det \Lambda)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \Lambda(t_i, t_j) x_i x_j \right],$$

где Λ – матрица, обратная к матрице с элементами $G_p(t_i, t_j)$. Следовательно, двумерная плотность вероятности p -адического броуновского движения имеет вид

$$p_{ts}(x, y) = \frac{1}{(2\pi|t|_p)^{\frac{1}{2}} (2\pi(|s|_p - g_p(s, t)|t|_p))^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{x^2}{2|t|_p} - \frac{(y - g_p(s, t)x)^2}{2(|s|_p - g_p(s, t)|t|_p)} \right],$$

где

$$g_p(s, t) = \frac{G_p(s, t)}{|t|_p}.$$

Пользуясь определением плотности условной вероятности, получим плотность переходной функции

$$p(t, x; s, y) = \frac{p_{\xi_t \xi_s}(x, y)}{p_{\xi_t}(x)} = \frac{1}{(2\pi(|s|_p - g_p^2(s, t)|t|_p))^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(y - g_p(s, t)x)^2}{2(|s|_p - g_p^2(s, t)|t|_p)} \right].$$

8. Рассмотрим оператор $\mathbf{G}$ на $\mathcal{D}(Q_p)$, который определяется формулой

$$(\mathbf{G}\varphi)(t) = \int_{Q_p} G_p(t, s) \varphi(s) ds,$$

где $G_p(t, s)$ – ковариационная функция p -адического броуновского движения.

На множестве функций

$$\varphi \in \mathcal{D} : \int_{Q_p} \varphi(t) dt = 0$$

оператор $\mathbf{G}$ с точностью до множителя $1/2$ совпадает с оператором Владимирова – аналогом первообразной $\mathbf{D}^{-2}$ такой, что

$$\mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{D}^{-2} = 1$$

(подробнее см. в [1]).

4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА $Q_p \times Q_p$

В этом разделе исследуются граничные задачи для стохастических уравнений вида

$$\mathbf{A}\Psi = \Phi$$

с различными псевдодифференциальными операторами $\mathbf{A}$, действующими на функции двух p -адических аргументов. Мы рассмотрим p -адические стохастические уравнения, аналогичные некоторым основным уравнениям математической физики [12].

Сначала рассмотрим уравнение, решением которого является случайная функция двух переменных. В дальнейшем она называется случайным полем, которое является p -адическим аналогом броуновского листа [13].

Пусть имеем обобщенное стохастическое псевдодифференциальное уравнение

$$\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y u(x, y; \omega) = f(x, y; \omega) \quad (4.1)$$

— аналог уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) = f(x, y).$$

В уравнении (4.1) $x, y \in Q_p^2$, $\mathbf{D}_x$ — псевдодифференциальный оператор Владимирова, $f(x, y; \omega)$ — p -адический белый шум, т.е. гауссовское обобщенное случайное поле $\{f(\varphi; \omega)\}$ со средним $E\langle f, \varphi \rangle = 0$ и ковариацией

$$E\langle f, \varphi \rangle \langle f, \varphi' \rangle = \int_{Q_p^2} \varphi(x, y) \bar{\varphi}'(x, y) dx dy. \quad (4.2)$$

Доказательство существования $f(x, y; \omega)$ такое же, как и для белого шума, определенного в разделе 3.

Обобщенное решение $u(x, y; \omega)$ уравнения (4.1) будем искать в классе непрерывных функций $\mathcal{C}(Q_p^2)$. Для этого уравнения рассмотрим задачу Гурса с граничными условиями

$$u(x, y; \omega)|_{x=0} = 0, \quad u(x, y; \omega)|_{y=0} = 0 \quad (4.3)$$

и при том, что $f(x, y; \omega) \in \mathcal{E}'(Q_p^2)$ — обобщенная функция с компактным носителем.

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Решение задачи Гурса для стохастического уравнения (4.1) существует в классе непрерывных функций и единственно для почти всех $\omega \in \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что фундаментальное решение для оператора $\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y$, удовлетворяющее уравнению

$$\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y \mathcal{E}(x, y) = \delta(x, y),$$

имеет вид

$$\mathcal{E}(x, y) = \left(\frac{p-1}{p \ln p} \right)^2 \ln |x|_p \ln |y|_p.$$

Фундаментальное решение не единственно, оно определяется с точностью до слагаемого, являющегося решением соответствующего однородного уравнения.

Решение уравнения (4.1) в $\mathcal{D}'(Q_p^2)$ можно записать в виде

$$u(x, y; \omega) = \left(\frac{p-1}{p \ln p} \right)^2 \int_{Q_p^2} \ln |x - x'|_p \ln |y - y'|_p f(x', y'; \omega) dx' dy' + C_1(x; \omega) + C_2(y; \omega)$$

для любых $\omega \in \Omega$.

Подчиняя это решение граничным условиям (4.3) и выражая его через преобразование Фурье белого шума f , получаем

$$u(x, y; \omega) = \int_{Q_p^2} \frac{(\chi(-kx) - 1)(\chi(-ly) - 1)}{|k|_p |l|_p} \tilde{f}(k, l; \omega) dk dl. \quad (4.4)$$

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 3.2, мы устанавливаем, что решение (4.4) непрерывно для почти всех $\omega \in \Omega$. Теорема 4.1 доказана.

Решение (4.4) задачи Гурса для псевдодифференциального стохастического уравнения (4.1) определяет гауссовское случайное поле

$$\{u(x, y; \omega), x, y \in Q_p^2\}$$

со средним

$$\mathbb{E}u(x, y) = 0$$

и с ковариацией, которая имеет факторизованный вид

$$\mathbb{E}u(x, y) \bar{u}(x', y') = \frac{p+1}{p^2} (|x|_p + |x'|_p - |x - x'|_p) (|y|_p + |y'|_p - |y - y'|_p). \quad (4.5)$$

Назовем это поле p -адическим броуновским листом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Введем оператор $\square_p$ (аналог гиперболического оператора), который определяется формулой

$$(\square_p \varphi)(r, t) = \int_{Q_p^2} du dv |u^2 - v^2|_p \tilde{\varphi}(u, v) \chi(-ur) \chi(-vt), \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{\varphi}(u, v) = \int_{Q_p^2} dr dt \varphi(r, t) \chi(ur) \chi(vt).$$

Уравнение

$$(\square_p \varphi)(r, t) = f(r, t)$$

можно понимать как аналог волнового уравнения. Для $p \neq 2$ это уравнение в ограниченной его характеристиками $u = \pm v$ области определяет случайное гауссовское поле как единственное решение, которое совпадает с решением задачи Гурса для уравнения (4.1) с нулевыми данными на характеристиках.

Действительно, если перейти к новым переменным

$$k = \frac{1}{2}(u + v), \quad l = \frac{1}{2}(u - v),$$

то оператор $\square_p$ переходит в оператор $\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y$.

Обратимся теперь к стохастическому уравнению

$$\Delta_p \psi(x, y; \omega) = f(x, y; \omega) \quad (4.7)$$

с псевдодифференциальным оператором (p -адический аналог оператора Лапласа), который определяется формулой

$$(\Delta_p \psi)(x, y) = \int_{Q_p^2} dk dl |k^2 + l^2|_p \tilde{\psi}(k, l) \chi(-kx) \chi(-ly). \quad (4.8)$$

Будем рассматривать отдельно два случая, которые связаны с существованием корней алгебраического уравнения

$$k^2 + l^2 = 0.$$

Это уравнение для $p \equiv 3 \pmod{4}$ имеет лишь тривиальное решение $k = 0, l = 0$ над полем p -адических чисел, а для $p \equiv 1 \pmod{4}$, кроме того, и нетривиальные решения $k = \pm ql, q^2 = -1: q \in Q_p$.

1. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$. Построим для этого случая фундаментальное решение оператора (4.8). Рассмотрим уравнение

$$\Delta_p \mathcal{E}(x, y) = \delta(x, y). \quad (4.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Функция*

$$\mathcal{E}(x, y) = \left(\frac{p-1}{p \ln p} \right)^2 \ln |x + qy|_p \ln |x - qy|_p \quad (4.10)$$

является фундаментальным решением оператора Δ_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это предложение доказывается непосредственной подстановкой функции (4.10) в уравнение (4.9).

Рассмотрим теперь стохастическое уравнение (4.7) и сделаем замену переменных

$$z = x + qy, \quad \bar{z} = x - qy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_p \psi(x, y; \omega) &\rightarrow \mathbf{D}_z \mathbf{D}_{\bar{z}} \varphi(z, \bar{z}; \omega), \\ f(x, y; \omega) &\rightarrow g(z, \bar{z}; \omega) = f\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2q}(z - \bar{z}); \omega\right), \\ \psi(x, y; \omega) &\rightarrow \varphi(z, \bar{z}; \omega) = \psi\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2q}(z - \bar{z}); \omega\right). \end{aligned}$$

Уравнение (4.7) примет вид

$$\mathbf{D}_z \mathbf{D}_{\bar{z}} \varphi(z, \bar{z}; \omega) = g(z, \bar{z}; \omega). \quad (4.11)$$

Для граничных условий

$$\varphi(z, \bar{z}; \omega)|_{z=0} = 0, \quad \varphi(z, \bar{z}; \omega)|_{\bar{z}=0} = 0$$

задача сводится к рассмотренной выше задаче Гурса.

2. Пусть $p \equiv 3 \pmod{4}$. Построим фундаментальное решение оператора (4.8). Рассмотрим уравнение

$$\Delta_p \mathcal{E}(x, y) = \delta(x, y). \quad (4.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Обобщенная функция*

$$\mathcal{E}(x, y) = -\frac{p^2 - 1}{p^2 \ln p^2} \ln |x^2 + y^2|_p \quad (4.13)$$

является фундаментальным решением оператора Δ_p для $p \equiv 3 \pmod{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Фурье функции $\ln |x^2 + y^2|_p$ имеет вид

$$F[\ln |x^2 + y^2|_p](k, l) = -\frac{p^2 \ln p^2}{p^2 - 1} |k^2 + l^2|_p^{-1}.$$

Поэтому для любой функции $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(Q_p^2)$ в силу определения оператора Δ_p имеем

$$\langle \Delta_p \mathcal{E}(x, y), \varphi(x, y) \rangle = \left\langle \int_{Q_p^2} \chi(-kx) \chi(-ly), \varphi(x, y) dk dl \right\rangle = \langle \delta(x, y), \varphi(x, y) \rangle,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим стохастическое псевдодифференциальное уравнение с оператором Δ_p при $p \equiv 3 \pmod{4}$ (уравнение эллиптического типа)

$$\Delta_p \psi(x, y; \omega) = f(x, y; \omega), \quad (4.14)$$

$$\psi(x, y; \omega)|_{x=0, y=0} = 0 \quad (4.15)$$

для любых $\omega \in \Omega$. Напомним, что $f(x, y; \omega)$ — это p -адический белый шум, определенный в начале раздела 4.

ТЕОРЕМА 4.2. Если $f(x, y; \omega) \in \mathcal{E}'(Q_p^2)$, то решение задачи (4.14), (4.15) существует в классе непрерывных функций $\mathcal{C}(Q_p^2)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение будем искать в $\mathcal{D}'$ в виде

$$\psi(x, y; \omega) = \mathcal{E}(x, y) * f(x, y; \omega) + C(\omega),$$

где $C(\omega)$ — случайная величина. Подставляя сюда выражение для фундаментального решения (4.13), получим

$$\psi(x, y; \omega) = -\frac{p^2 - 1}{p^2 \ln p^2} \int_{Q_p^2} \ln |(x - x')^2 + (y - y')^2|_p f(x', y'; \omega) dx' dy' + C(\omega).$$

С точностью до константы это решение выражается через преобразование Фурье белого шума следующим образом:

$$\psi(x, y; \omega) = \int_{Q_p^2} \frac{\chi(-(kx + ly)) - 1}{|k^2 + l^2|_p} \tilde{f}(k, l; \omega) dk dl. \quad (4.16)$$

Этот несобственный интеграл определен в $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Далее, проводя аналогичные рассуждения, что и в теореме 3.2, доказываем непрерывность решения (4.16) для почти всех $\omega \in \Omega$. Нетрудно убедиться, что (4.16) удовлетворяет (4.14), (4.15). Доказательство теоремы 4.2 закончено.

Стохастическая функция (4.16) определяет гауссовское случайное поле $\{\psi(z; \omega), z \in Q_p^2\}$, которое будем называть p -адическим броуновским движением Леви.

Среднее случайного поля ψ равно нулю:

$$E\psi(z; \omega) = 0, \quad (4.17)$$

где $z = (x_1, x_2) \in Q_p^2$, что непосредственно вытекает из (4.16).

Ковариация случайного поля ψ имеет вид

$$E\psi(z; \omega) \bar{\psi}(z'; \omega) = \frac{p^2 + 1}{p^4} (|(z, z)|_p + |(z', z')|_p - |(z - z', z - z')|_p). \quad (4.18)$$

Мы не будем приводить подробного вычисления ковариации, отметив лишь, что после интегрирования по ω задача сведется к вычислению интегралов вида

$$\int_{Q_p^2} d^2w \frac{\chi((w, z))}{|(w, w)|_p^2}.$$

По поводу вычисления таких интегралов см. [1] и [11].

Благодарности. Автор признателен И. В. Воловичу за помощь в работе над статьёй, а также В. С. Владимирову и С. В. Козыреву за чрезвычайно полезные советы.

Работа была поддержана грантом INTAS № 96-06-98.

Список литературы

- [1] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [2] А. Х. Бикулов, И. В. Волович. Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 3. С. 75–90.
- [3] В. С. Владимиров. УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 17–53.
- [4] S. Albeverio, W. Karwowski. Stoch. Proc. Appl. 1994. V. 53. P. 1–22.
- [5] W. Karwowski, R. Vilela Mendes. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 4637–4650.
- [6] M. D. Missarov. Ann. Inst. Henri Poincaré. 1989. V. 50. P. 357–367.
- [7] A. N. Kochubei. Potential Analysis. 1997. V. 6. P. 105–125.
- [8] А. Н. Кочубей. Изв. АН. Сер. матем. 1992. Т. 39. С. 1263–1280.
- [9] И. А. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции. Т. 4. М.: Физматгиз, 1961.
- [10] И. И. Гизман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.
- [11] А. Х. Бикулов. ТМФ. 1991. Т. 87. № 3. С. 376–390.
- [12] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
- [13] Ю. А. Розанов. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. М.: Наука, 1995.

Поступила в редакцию 9.II.1998 г.,
после доработки 28.XII.1998 г.