Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Крым, Гладкие многообразия кинематического типа, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 2, 264–281

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:27:30

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

Предлагается общий подход к описанию различных отношений типа причинности на гладких многообразиях. Каузальная структура может быть задана либо аксиоматически (конусом в касательном пространстве), либо псевдометрикой сигнатуры $(+ \dots -)$ или $(+ \dots - 0 \dots 0)$. В последнем случае многообразие приобретает структуру расслоенного пространства со слоями “абсолютной одновременности”. Гладкая структура (атлас) многообразия непосредственно связана с его каузальной структурой.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Данная статья посвящена рассмотрению отношений типа причинности на гладком многообразии. Интерес к этому направлению возник благодаря созданию специальной и общей теории относительности, однако далеко не все типы причинности (каузальной структуры) на многообразии были рассмотрены до настоящего времени. В данной статье мы восполним этот пробел. Кроме того, будет показано, что между каузальной и гладкой структурами на многообразии имеется определенная связь, существенная при построении теорий, имеющих целью объединить фундаментальные взаимодействия, включая гравитацию.

1.2. Напомним вкратце, с какими проблемами столкнулись предыдущие работы, направленные на объединение фундаментальных взаимодействий. Исторически первой работой на эту тему была статья Калуцы [1], однако построенная теория носила существенно приближенный характер. В 1926 г. Фок [2] показал, что траектория движения заряженной частицы может быть строго описана как геодезическая линия нулевой длины (“световая”) в пятимерном многообразии. Клейн [3] независимо от Фока использовал тот же самый метрический тензор на пятимерном многообразии для вывода четырехмерных уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла. Клейн не рассматривал уравнений геодезических, а ограничился замечанием, что уравнения движения частиц обычным образом следуют из уравнений Эйнштейна. Во всех этих работах считалось, что

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

метрический тензор имеет сигнатуру $(+ - - -)$, т.е. пятая координата пространственноподобна. Предполагалось, что метрический тензор не зависит от пятой координаты и что $g_{55} = 1$. Оба эти условия инвариантны.

В 1956 г. Румер [4] попытался отказаться от инвариантного условия $g_{55} = 1$. Пятую координату он также считал пространственноподобной. Румер получил классические уравнения движения заряженной частицы, но (как и Фок) только в предположении, что в пятимерном многообразии они являются геодезическими нулевой длины, т.е. световыми. Это обстоятельство совершенно непонятно с физической точки зрения. Румер выписал в явном виде уравнения Эйнштейна для пятимерного пространства с введенным им метрическим тензором. К сожалению, полученная Румером система уравнений не эквивалентна уравнениям Максвелла и Эйнштейна в присутствии электромагнитного поля.

Эйнштейн и Бергман в 1938 г. [5] предложили считать пространство-время циклически замкнутым в направлении пятой координаты. Они сделали это, для того чтобы обосновать независимость всех наблюдаемых физических величин от пятой координаты. Следуя Клейну и Фоку, период в направлении пятой координаты можно принять равным $\hbar/mc$. Румер также считает пространство-время замкнутым как цилиндр в направлении пятой координаты, но с периодом $\hbar$. Однако у Румера пятая координата имеет физический смысл и размерность действия, а объявлять действие циклическим некорректно, т.к. принцип наименьшего действия при этом теряет смысл. Кроме того, действие не является независимой переменной. Еще более серьезное возражение против подхода Румера состоит в том, что пятимерное пространство-время он рассматривает как конфигурационное пространство для выбранной частицы, причем метрический тензор зависит от отношения заряда данной частицы к ее массе. Однако если бы каждая частица двигалась в своем собственном конфигурационном пространстве и общее для всех частиц пространство-время не имело бы физического смысла, то как могли бы частицы взаимодействовать между собой?

В 1960-е годы некоторым математикам, а именно Буземану [6] и Пименову [7] (см., кроме того, [8]), стало ясно, что дальнейшее обобщение теории относительности требует предварительного изучения отношения причинности на многообразиях. Для этого Буземан и Пименов предложили независимо довольно близкие наборы аксиом, из которых наиболее общими следует признать аксиомы Пименова. Последний указывает, что дополнительная координата не может быть ни времени-, ни пространственноподобной: “Обычная риманова геометрия пригодна для моделирования величин только двух наименований: вещественного и мнимого. Физически это отвечает моделированию только двух физических размерностей. Но теория электромагнетизма, кроме размерности “время” и размерности “пространство”, встречается еще по крайней мере с одной размерностью “электричество”. Поэтому, в широком смысле слова, теория электромагнетизма и невырожденная риманова геометрия не гомологичны” [7, с. 424].

На этой основе Пименов строит объединенную теорию гравитационных и электрома-

гнитных взаимодействий. Пятая координата у Пименова считается независимой, как и должно быть в геометрии. Однако Пименову не удалось получить классических уравнений движения заряженной частицы. Кроме того, в его работе не используется принцип наименьшего действия. В уравнения типа Эйнштейна Пименов вводит формально построенный объект, который не является тензором Риччи ни для одной из двух рассматриваемых в его работе связностей. Поэтому, хотя в результате и получается система уравнений Эйнштейна и Максвелла, вывод этих уравнений у Пименова был проведен с нарушением традиций математической физики.

2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С ОТНОШЕНИЕМ ПРИЧИННОСТИ

В линейном пространстве отношение частичного порядка следует выбирать так, чтобы оно было согласовано с линейной структурой и с топологией на этом пространстве [9, 10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – линейное пространство с топологией Δ и отношением частичного порядка $<$. Тройку $(L, \Delta, <)$ назовем линейной кинематикой, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) отображение сложения $+: L \times L \rightarrow L$ непрерывно;
- 2) при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ отображение умножения на α непрерывно;
- 3) отношение порядка транзитивно: из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$;
- 4) отношение порядка строгое: $a < a$ невозможно;
- 5) $\forall a, b \in L: a < b \Rightarrow \forall u \in L \quad a + u < b + u$;
- 6) $\forall a, b \in L: a < b \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha a < \alpha b$, где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$;
- 7) $\forall a \in L$ и $\forall U \in \Delta: a \in U \Rightarrow \exists b \in U: a < b$;
- 8) прошлое нулевой точки $Q_0^+ := \{u \in L \mid u < 0\}$ открыто.

Обсудим вкратце, как устроено отношение частичного порядка, удовлетворяющее указанному набору аксиом. В линейном пространстве L (возможно, бесконечномерном) множество точек, следующих за данной точкой $a \in L$, образует выпуклый конус Q_a^+ с вершиной a , причем $a \notin Q_a^+$. Множество точек Q_0^+ , следующих за нулевой точкой $0 \in L$, называется *конусом будущего* кинематики L . Для любой точки $a \in L$ имеем $Q_a^+ = a + Q_0^+$. Множество точек, предшествующих данной точке $a \in L$, обозначается Q_a^- , причем $Q_0^- = -Q_0^+$ и $\forall a \in L$ имеем $Q_a^- = a + Q_0^-$.

Топология Δ линейного пространства L выбирается так, чтобы конус будущего Q_0^+ был открыт. Если пространство L конечномерно, то это позволяет установить связь между типом конуса будущего Q_0^+ и топологией в L . Именно, если конус будущего содержит прямые (такой конус напоминает “конек крыши”), то слабейшая топология в L антидискретна на любой прямой, содержащейся в конусе будущего. Если же аффинная размерность конуса будущего меньше размерности L , то топология в L содержит дискретные слои. Если конус будущего острый (т.е. не содержит прямых), имеет ту же

размерность, что и L , и его граница не содержит лучей, то слабейшая топология в L евклидова.

Наша цель – перенести отношение частичного порядка с конечномерной линейной кинематики $(L, <, \Delta)$ на гладкое многообразие M . При этом кинематика L будет использоваться в качестве картирующего множества (“модели”). Для того чтобы понятия непрерывности и гладкости отображений на многообразиях не зависели от типа конуса будущего в L , в следующем определении мы выбираем в L евклидову топологию. В евклидовой топологии конус будущего кинематики L открыт в своей аффинной оболочке, если только граница этого конуса не содержит лучей.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M – гладкое многообразие, L – линейная кинематика той же размерности. Пусть на M задано семейство непрерывных отображений $(P(U))_{U \in I}$, $P(U): TU \rightarrow L \ \forall U \in I$, причем каждый элемент $U \in I$ – связное открытое подмножество в M , таких, что:

- 1) $\bigcup_{U \in I} U = M$ (т.е. I – покрытие многообразия M);
- 2) $\forall U \in I$ и $\forall x \in U$ сужение $P(U)_x: T_x U \rightarrow L$ – невырожденное линейное отображение;
- 3) $\forall U, V \in I$ и $\forall x \in U \cap V$ отображение перехода $P(U)_x \circ P(V)_x^{-1}: L \rightarrow L$ сохраняет порядок в L .

Тогда M с указанным семейством отображений P назовем многообразием кинематического типа L . Семейство P будем называть кинематическим атласом на M .

В каждом касательном пространстве $T_a M$ многообразия кинематического типа L корректно определен конус $P(U)_a^{-1}(Q_0^+)$, являющийся прообразом конуса будущего нулевой точки кинематики L при отображении $P(U)_a$. В силу условия 3 этот конус не зависит от выбора области U ($a \in U$), поэтому обозначение области U мы будем опускать. Обозначим $Q_a^+ := P_a^{-1}(Q_0^+)$ и $Q_a^- := P_a^{-1}(Q_0^-)$. Семейство конусов Q_a^+ (и Q_a^-) непрерывно зависит от точки $a \in M$ в том смысле, что отображение $P(U)$ непрерывно.

ПРИМЕР 1. Любая линейная кинематика L является многообразием кинематического типа L , кинематический атлас которого состоит только из одного отображения $P_x := id_L - x \ \forall x \in L$. Отношение порядка (т.е. конус будущего Q_0^+) кинематики L выбирается произвольно, но так, чтобы оно удовлетворяло некоторым естественным аксиомам [9, 10]. Ньютоново отношение причинности задается условием $t > 0$, т.е. конусом будущего является полупространство, а эйнштейново отношение причинности задается эллиптическим конусом. Эти отношения причинности определяют разные слабейшие топологии кинематики L : для ньютоновой причинности это естественная топология $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_a^{n-1}$, где $\mathbb{R}_a$ – вещественная прямая с *антидискретной* топологией, $n := \dim L$, а для эйнштейновой причинности слабейшая топология евклидова. Эти типы причинности не исчерпывают всех возможностей.

ПРИМЕР 2. Пусть M – параллелизуемое многообразие размерности n и $X_1, \dots, X_n$ – линейно независимые в каждой точке непрерывные векторные поля на M . Пусть L –

линейная кинематика той же размерности. Отображение $P: TM \rightarrow L$, $P(Y) := (Y^1, \dots, Y^n)$, где

$$Y = \sum_{k=1}^n Y^k X_k,$$

определено на всем M . Пара (M, P) является многообразием кинематического типа L .

2.2. Ориентация времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (M, P) – многообразие кинематического типа L . Ориентацией времени многообразия M называется непрерывное векторное поле X на M такое, что $\forall a \in M \quad X(a) \in Q_a^+$. В частности, поле X нигде не обращается в нуль.

ТЕОРЕМА 1. На любом многообразии (M, P) кинематического типа L существует ориентация времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем вектор $\nu \in Q_0^+ \subset L$. У любой точки $a \in M$ существует окрестность U , на которой определено отображение $P(U)$ семейства P . Поэтому на U имеется непрерывное векторное поле Y_U , $\forall x \in U \quad Y_U(x) := P(U)_x^{-1}(\nu)$. Пусть $(\chi_U)_{U \in I}$ – разложение единицы, ассоциированное с покрытием I . Поскольку многообразие M локально компактно, можно считать, что покрытие I локально конечно. В силу выпуклости конуса Q_a^+ векторное поле

$$X := \sum_{U \in I} \chi_U Y_U$$

– то, которое требуется (в этой сумме в каждой точке только конечное число слагаемых отлично от нуля).

2.3. Обсудим достаточные для дальнейшего примеры отображений перехода $P(U)_x \circ P(V)_x^{-1}$ для различных типов линейных кинематик L .

2.3.1. Пусть конус будущего $Q_0^+ \subset L$ эллиптический. Тогда в силу известных теорем всякое линейное отображение, сохраняющее конус Q_0^+ , является преобразованием Лоренца с произвольной мультипликативной постоянной, т.е. линейные отображения, сохраняющие Q_0^+ , ортогональны в псевдометрике сигнатуры $(+ - \dots -)$, которая однозначно восстанавливается по конусу Q_0^+ с точностью до масштабирующего множителя.

2.3.2. Пусть конус будущего Q_0^+ содержит хотя бы одну прямую. Тогда [9, 10] слабая топология кинематики L содержит нетривиальное линейное антидискретное подпространство. Рассмотрим максимальное линейное подпространство l_0 , содержащееся в замыкании конуса будущего Q_0^+ кинематики L . Пусть $n := \dim L$, $k := \dim l_0$. Пусть $e_{n-k+1}, \dots, e_n$ – базис подпространства l_0 . Подпространство l_0 переходит в себя при линейных преобразованиях, сохраняющих порядок. Поэтому в системе координат, в которой координата с номером j определена как коэффициент при e_j ($j = n -$

$k + 1, \dots, n)$, матрица отображения перехода $P(U)_x \circ P(V)_x^{-1}$ имеет блочный вид

$$\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * & * \end{array} \right).$$

Левый верхний блок (квадратный, размерности $n - k$) является невырожденным линейным преобразованием. Правый верхний блок нулевой. Правый нижний блок (квадратный, размерности k) также является невырожденным линейным преобразованием. Известно, что такие матрицы образуют группу.

2.3.3. Пусть размерность конуса будущего Q_0^+ кинематики L меньше размерности пространства L . Тогда [9, 10] слабейшая топология кинематики L содержит нетривиальное линейное *дискретное* подпространство. Минимальное линейное подпространство l_0 , содержащее конус будущего Q_0^+ , переходит в себя при линейных преобразованиях, сохраняющих порядок. Пусть $n := \dim L$, $k := \dim l_0$, $e_1, \dots, e_k$ – базис подпространства l_0 . Тогда матрица отображения перехода $P(U)_x \circ P(V)_x^{-1}$ имеет блочный вид

$$\left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & * \end{array} \right).$$

Левый верхний блок (квадратный, размерности k) является невырожденным линейным преобразованием. Левый нижний блок нулевой. Правый нижний блок (квадратный, размерности $n - k$) также является невырожденным линейным преобразованием. Такие матрицы образуют группу.

2.3.4. Множество линейных изоморфизмов $L \rightarrow L$, сохраняющих частичный порядок в L , является группой, которую мы обозначим $GL(L, <)$. На многообразии M могут существовать такие кинематические атласы $(P(U))_{U \in I}$, что все отображения перехода принадлежат некоторой подгруппе H этой группы. Например, на параллелизуемом многообразии (пример 2) существует кинематический атлас, состоящий из одного отображения, и подгруппа H единичная. Верно и обратное: если на многообразии существует кинематический атлас такой, что все отображения перехода тождественные, то многообразие параллелизуемо.

Множество линейных изоморфизмов $L \rightarrow L$, сохраняющих определенные в пунктах 2.3.2 и 2.3.3 линейные подпространства l_0 , обозначим $GL(L, \text{Lin}(<))$. Это подгруппа группы $GL(L, <)$.

2.4. Локальный порядок.

2.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (M, P) – многообразие кинематического типа L , $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ – кусочно-гладкий путь. Путь γ называется направленным в будущее, если $\forall t \in [a, b] \quad \gamma'(t) \in Q_{\gamma(t)}^+$. Если путь γ не дифференцируем в точке t , то этому условию должны удовлетворять обе односторонние производные в точке t . Аналогично определяется путь, направленный в прошлое. Путь γ называется времениподобным, если он направлен в будущее или в прошлое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (M, P) – многообразие кинематического типа L , $U \subset M$, $x, y \in U$ и существует направленный в будущее путь $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ с началом x и концом y (т.е. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$). Тогда обозначим $x < y \pmod{\gamma}$. Аналогично, если путь γ направлен в прошлое, то обозначим $x > y \pmod{\gamma}$.

Очевидно, что $x < y \pmod{\gamma} \Leftrightarrow y > x \pmod{\gamma^{-1}}$ (достаточно пройти путь γ в обратную сторону).

Отношение $<$ хотелось бы интерпретировать как локальный порядок на M , однако такая интерпретация не всегда возможна.

2.4.2. Пусть $U \subset M$ – некоторая область, и пусть (M, P) – многообразие кинематического типа L такое, что замыкание конуса будущего кинематики L содержит нетривиальное линейное подпространство l_0 . Тогда на M возникает *распределение* $l_x := P_x^{-1}(l_0) \quad \forall x \in M$. Предположим, что распределение $(l_x)_{x \in U}$ гладкое и вполне голономное. Тогда на U существуют гладкие векторные поля X и Y такие, что $X(a), Y(a) \in l_a \quad \forall a \in U$, но $[X, Y]_a \notin \text{Cl } Q_a^+ \quad \forall a \in U$. Известно, что движение по интегральной кривой векторного поля $[X, Y]$ можно реализовать с помощью последовательных смещений вдоль интегральных кривых векторных полей X и Y . Поскольку $X(a), Y(a) \in \text{Cl } Q_a^+ \quad \forall a \in U$, смещения вдоль этих интегральных кривых можно сколь угодно точно аппроксимировать движением вдоль времениподобных путей в U , направленных в будущее. Однако тогда $\forall a, b \in U \quad \exists \gamma: a < b \pmod{\gamma}$ как бы ни мала была область U . В частности, в U имеются замкнутые времениподобные пути (т.е. такие, у которых начало и конец совпадают).

ТЕОРЕМА 2. Пусть (M, P) – многообразие кинематического типа L . Обозначим через l_0 максимальное линейное подпространство, содержащееся в замыкании конуса будущего кинематики L . Пусть распределение $l_x := P_x^{-1}(l_0)$, $x \in M$, голономно. Тогда для любой точки $x \in M$ существует окрестность U такая, что любой времениподобный путь в U не имеет точек самопересечения.

Если выполнены условия теоремы 2 и область U такая, как указано в теореме, то мы будем использовать обозначение $a < b \pmod{U}$. Отношение $<$ в этих условиях перестает зависеть от выбора пути γ , а зависит только от выбора области U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На достаточно малой области U голономное распределение l можно расширить до распределения S такого, что:

- 1) $\forall x \in U \quad l_x \subset S_x$;

- 2) $\forall x \in U$ S_x отделяет Q_x^+ от Q_x^- ;
 3) распределение S имеет коразмерность 1 и голономно.

Выберем произвольную точку $x \in M$. Конусы Q_x^+ и Q_x^- выпуклы, не пересекаются, и, следовательно, их можно отделить гиперплоскостью s_x (очевидно, что $l_x \subset s_x$). Эту гиперплоскость можно выбрать так, чтобы $s_x \cap (\text{Cl } Q_x^+ \cup \text{Cl } Q_x^-) = l_x$. Гиперплоскость s_x является касательным пространством в точке x к некоторому гладкому подмногообразию $N \subset M$ коразмерности 1. Подмногообразие N может быть выбрано так, чтобы оно содержало все интегральные подмногообразия распределения l , проходящие через любую точку N . Например, пусть $n := \dim M$, $k := \dim l_0$. В некоторой окрестности W точки x существует $(n - k - 1)$ -мерное гладкое подмногообразие P , трансверсальное к распределению l в W . Множество всех интегральных подмногообразий распределения l , проходящих через P , является требуемым многообразием N коразмерности 1 (для достаточно малой области W).

Рассмотрим “распределение” S касательных плоскостей к подмногообразию N . Поскольку семейства конусов $(Q_x^+)_{x \in U}$ и $(Q_x^-)_{x \in U}$ непрерывно зависят от точки x , то на достаточно малой области W гиперплоскости s_x отделяют Q_x^+ и Q_x^- для всех $x \in N$.

Рассмотрим семейство интегральных подмногообразий распределения l на W . Имеется диффеоморфизм $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что отображение φ переводит семейство интегральных подмногообразий распределения l на W в семейство линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Действительно, указанное семейство подмногообразий является $(n - k)$ -параметрическим C^1 -гладким семейством. Локально оно может быть задано набором отображений $f_r: \mathbb{R}^k \rightarrow M$, $r \in \mathbb{R}^{n-k}$, причем отображение f является C^1 -диффеоморфизмом. Заменяем карту на множестве W : координаты точки $a \in W$ суть (r, s) тогда и только тогда, когда $a \in \text{im } f_r$ и $f_r(s) = a$. В этой карте семейство интегральных подмногообразий распределения l задается уравнением $r(a) = r_0$, т.е. является семейством k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Все эти подпространства – эквидистантные поверхности в евклидовой метрике $\text{Diag}(1, \dots, 1)$. Дифференциал гладкого отображения $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенного равенством $\varphi(a) := (r, s)$, переносит эту метрику в W :

$$\langle u, v \rangle := (d_x \varphi(u), d_x \varphi(v)) \quad \forall u, v \in T_x W.$$

В указанной римановой метрике $\langle, \rangle$ на W интегральные подмногообразия распределения l являются эквидистантными поверхностями.

Построим семейство эквидистантных поверхностей (в указанной римановой метрике) для подмногообразия $N \subset W$ коразмерности 1, определенного выше. Обозначим семейство этих поверхностей $(N_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\delta, \delta)}$, $\delta > 0$. Они обладают следующим свойством: каждое подмногообразие N_ε содержит все интегральные подмногообразия распределения l , проходящие через любую точку из N_ε .

Поскольку семейства конусов $(Q_x^+)_{x \in W}$ и $(Q_x^-)_{x \in W}$ непрерывно зависят от точки x , имеется окрестность U точки x такая, что касательные пространства $T_x N_\varepsilon$ отделяют

конусы Q_x^+ и Q_x^- для всех $x \in U$. Обозначим распределение касательных пространств $T_x N_\varepsilon$ ($x \in U$) символом S .

Область U может быть выбрана настолько малой, что для любой точки $x \in U$ интегральное подмногообразие распределения S , проходящее через x , делит U на две компоненты связности.

Пусть γ – путь в U , направленный в будущее. Рассмотрим максимальное на U интегральное подмногообразие распределения S , проходящее через точку $x \in \text{im } \gamma$. Это подмногообразие делит U на две компоненты связности. Путь γ начинается в одной из этих компонент и заканчивается в другой. Следовательно, замкнутых времениподобных путей в U нет.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие многообразия кинематического типа (M, P, L) , которые удовлетворяют условиям теоремы 2.

2.4.3. СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЯ $<$:

1) отношение $<$ топологически не пусто, т.е. в любой окрестности U любой точки $a \in M$ найдутся точки $x, y \in U$ такие, что $x < y \pmod{U}$ (достаточно проинтегрировать введенную в пункте 2.2 ориентацию времени);

2) отношение $<$ антирефлексивно, т.е. для любой точки $x \in M$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что $-(x < x \pmod{U})$;

3) отношение $<$ локально транзитивно, т.е. для любой точки $a \in M$ существует окрестность U такая, что $\forall x, y, z \in U: x < y \pmod{U}$ и $y < z \pmod{U} \Rightarrow x < z \pmod{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M – многообразие, $<$ – отношение на M со свойствами 1–3. Тогда $<$ называется локальным порядком на M .

Итак, на всяком многообразии (M, P) кинематического типа L определен локальный порядок, зависящий от частичного порядка в L и кинематического атласа P . Мы не будем рассматривать глобальное транзитивное замыкание отношения $<$, т.к. такое замыкание может не быть отношением порядка (даже локальным) [11]. Например, на окружности можно задать локальный порядок, но не глобальный.

2.4.4. Локальный порядок $<$ задает на многообразии отношение локальной эквивалентности, которая вводится следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x, y \in M$, $U \ni x$ – некоторая область на многообразии M , удовлетворяющая условиям теоремы 2. Обозначим $K_x^+ := \{a \in U \mid a > x \pmod{U}\}$, $K_x^- := \{a \in U \mid a < x \pmod{U}\}$. Примем, что $x \leq y \pmod{U}$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{Cl } K_y^-$, и $x \approx y \pmod{U}$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$ и $y \leq x$.

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЯ $\approx$:

1) рефлексивность, которая следует из того, что в любой окрестности данной точки есть точки прошлого и будущего данной точки в смысле локального порядка $<$; отношение $\leq$ также рефлексивно;

- 2) *симметричность, следующая непосредственно из определения;*
 3) *транзитивность, следующая из транзитивности отношения $\leq$.*

В классической специальной теории относительности, где конус будущего эллиптический, отношение $\approx$ тривиально: класс $x/\approx$ эквивалентности любой точки x состоит в точности из этой точки. В ньютоновой кинематике, где конусом будущего является полупространство, отношение $\approx$ трактуется как отношение одновременности. Класс $x/\approx$ любой точки x — гиперплоскость.

2.4.5. Известно, что всякий конус, содержащий прямые, является декартовым произведением острого конуса и аффинного подпространства. Поэтому, если конус будущего кинематики L содержит прямую, то на многообразии (M, P) кинематического типа L имеется распределение размерности m , где m — размерность максимального линейного подпространства, содержащегося в замыкании конуса будущего (в естественной топологии кинематики L это подпространство антидискретное). Пусть область U удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для любой точки $x \in U$ класс $x/\approx$ является подмногообразием, замкнутым в U . Это в точности максимальное (в U) интегральное многообразие указанного распределения, проходящее через точку x . Действительно, для любого пути, вектор скорости которого принадлежит распределению, найдутся сколь угодно близкие к нему пути, направленные в прошлое и будущее. Топологическое пространство $U/\approx$ является многообразием.

Обозначим через $\sim$ транзитивное замыкание отношения $\approx$ на всем M . Класс $x/\sim$ может не быть замкнутым в M , и фактор-пространство $M/\sim$ может не быть многообразием, даже если указанное распределение одномерно.

ПРИМЕР 3. Пусть M — цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. Зададим на M отображение P векторов $(u, \nu) \in T_{(\alpha, x)}M$:

$$P_{(\alpha, x)}(u, \nu) := \begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} & (x \geq x_0), \\ \begin{pmatrix} 1 & x - x_0 \\ x_0 - x & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} & (x \leq x_0), \end{cases}$$

где x — высота вдоль образующей цилиндра, α — угловая координата на окружности.

Выберем двумерную линейную кинематику L с конусом Q_0^+ в виде открытой полуплоскости (слабейшая топология в L есть $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_a$, где $\mathbb{R}_a$ — вещественная прямая с антидискретной топологией). Пара (M, P) является многообразием кинематического типа L . Чтобы найти классы $x/\approx$, найдем прообраз антидискретного слоя кинематики L при отображении P :

$$\begin{pmatrix} 1 & x - x_0 \\ x_0 - x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 - x \end{pmatrix}.$$

Это касательное векторное поле на M . Проинтегрируем его. Система дифференциальных уравнений $\dot{\alpha} = 1$, $\dot{x} = x_0 - x$ имеет общее решение $\alpha = t + c_1$, $x = x_0 - e^{-t+c}$.

Рис. 1

Рис. 2

Следовательно, классы отношения $\sim$ до высоты x_0 — спирали с бесконечным числом оборотов вокруг цилиндра, а выше x_0 — окружности. Фактор-пространство $M/\sim$ состоит из окружности и луча, содержащего свою вершину, причем любая окрестность вершины луча целиком содержит эту окружность. Это топологическое пространство не является многообразием и не вкладывается в M (рис. 1).

ПРИМЕР 4. Похожим образом можно превратить в многообразие кинематического типа $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_a$ и “цилиндр с разрезом” (рис. 2). Пусть отображение P такое же, как в примере 3 при $x \geq x_0$. Тогда фактор-пространство — просто $\mathbb{R}$ с обычным упорядочиванием, но классы эквивалентности $\sim$ различных точек, вообще говоря, не гомеоморфны друг другу.

2.5. Гладкие отображения многообразий кинематического типа. Пусть N — гладкое многообразие, (M, P) — многообразие кинематического типа L и $\varphi: N \rightarrow M$ — гладкое отображение. Тогда на N возникает кинематический атлас $(P(U) \circ d\varphi)_{U \in I}$. Он удовлетворяет условиям определения пункта 2.1, только если в каждой точке $x \in N$ дифференциал $d_x \varphi$ обратим. Тогда $(N, P \circ d\varphi)$ также оказывается многообразием кинематического типа L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (M, P) и (N, T) — гладкие многообразия кинематического типа L , $P = (P(U))_{U \in I}$, $T = (T(V))_{V \in I'}$. Говорим, что гладкое отображение $\varphi: N \rightarrow M$ есть диффеоморфизм многообразий кинематического типа, если φ — диффеоморфизм N

и M как гладких многообразий и

$$\forall U \in I, \forall V \in I' \text{ и } \forall x \in V \quad \varphi(x) \in U \Rightarrow (P(U)_{\varphi(x)} \circ d_x \varphi)^{-1}(Q_0^+) = (T(V)_x)^{-1}(Q_0^+).$$

Таким образом, отображения $P(U)_{\varphi(x)} \circ d_x \varphi \circ (T(V)_x)^{-1}$ суть линейные автоморфизмы кинематики L , сохраняющие частичный порядок в L . Отношения локального порядка на диффеоморфных многообразиях кинематического типа, очевидно, совпадают после отождествления этих многообразий с помощью диффеоморфизма φ . Будем говорить также, что N и M диффеоморфны с сохранением порядка.

2.6. Упорядочивание кокасательного пространства. Мы имеем отношение локального порядка на многообразии M и частичный порядок на любом касательном пространстве $T_x M$. Нам понадобится также отношение порядка на кокасательном пространстве. Положим $\forall \omega \in T_x^* M \quad \omega > 0 \Leftrightarrow \forall u \in Q_x^+ \subset T_x M \quad \omega \cdot u > 0$ (где действие ковектора на вектор обозначается точкой). Иными словами, порядок в кокасательном пространстве определяется конусом, дуальным к конусу будущего в касательном пространстве. Непосредственно проверяется, что существует топология на $T_x^* M$, для которой это пространство является линейной кинематикой. Вообще говоря, при таком переходе из касательного пространства в сопряженное кинематический тип меняется, причем антидискретный слой переходит в дискретное расслоение и наоборот. Только если слабейшая топология в кинематике L евклидова, слабейшая топология в L^* та же самая.

3. ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

3.1. На каждом псевдоримановом многообразии M со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ сигнатуры $(+ - \dots -)$ и ориентацией времени X (непрерывным времениподобным векторным полем, не обращающимся в нуль) существует некоторая каноническая причинность. Она задается кинематическим атласом, определенным следующим образом.

У каждой точки $a \in M$ есть окрестность U , на которой геодезические с началом a не пересекаются. Обозначим через $P_x(\nu)$ вектор, полученный параллельным переносом вектора $\nu \in T_x M$ вдоль геодезической, соединяющей точки x и a в U , в точку a . Очевидно, что отображение P непрерывно и невырождено.

Обозначим $Q_x^+ := \{\nu \in T_x M \mid \langle \nu, \nu \rangle > 0 \text{ и } \langle X(x), \nu \rangle > 0\}$.

ЛЕММА. Пусть связность ∇ на M риманова (т.е. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ для любых векторных полей X, Y, Z). Тогда параллельный перенос P вдоль любой кривой γ сохраняет порядок: $P_x(Q_x^+) = Q_a^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – времениподобное параллельное векторное поле вдоль пути γ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \langle Y, Y \rangle = 2 \left\langle \frac{DY}{dt}, Y \right\rangle = 0,$$

т.е. $\langle Y, Y \rangle = \text{const}$ вдоль γ . Поскольку два времениподобных вектора не могут быть взаимно ортогональны, функция $\langle Y, X \rangle$ не обращается в нуль вдоль γ и, следовательно, сохраняет знак. Вместе с невырожденностью отображения P это доказывает утверждение леммы.

Касательное пространство $T_a M$ в любой точке $a \in M$ можно выбрать в качестве линейной кинематики L , поскольку все они имеют одно и то же отношение порядка. Очевидно, что конус $Q_a^+ \subset L$ эллиптический. Итак, у каждой точки $a \in M$ имеется окрестность U , на которой определено отображение P такое, что пара (U, P) является многообразием кинематического типа L . Если две такие области пересекаются, то соответствующие отображения согласованы между собой: $\forall x \in U \cap V \quad P(U)_x^{-1}(Q_0^+) = P(V)_x^{-1}(Q_0^+)$. Нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M — псевдориманово многообразие со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ сигнатуры $(+ - \dots -)$ и ориентацией времени X (непрерывным времениподобным векторным полем на M , не обращающимся в нуль). Пусть P — семейство всех построенных выше отображений. Тогда (M, P) является многообразием кинематического типа L , где в качестве L можно взять любое касательное пространство $T_a M$ с суженной на него псевдометрикой, причем конус будущего этой кинематики выбирается так, чтобы он содержал вектор $X(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Риманову связность, указанную в лемме, можно выбирать по-разному. Можно также менять семейство кривых, вдоль которых осуществляется параллельный перенос. При этом будут получаться различные кинематические атласы P . Однако все многообразия (M, P) будут диффеоморфны между собой как многообразия кинематического типа.

3.2. ПРОБЛЕМА. При каких условиях по данному многообразию (M, P) кинематического типа L можно построить кинематический атлас Z такой, что все отображения $Z(U): TU \rightarrow L$ являются дифференциалами некоторых гладких отображений $f: U \rightarrow L$ и (M, P) диффеоморфно (M, Z) с сохранением порядка? (См. также [7, с. 351 и 416].)

Ясно, что положительное решение этой проблемы возможно далеко не на всяком многообразии. С другой стороны, существование кинематического атласа не накладывает слишком сильных ограничений на строение многообразия в целом.

ПРИМЕР 5. Кинематическое упорядочивание можно ввести и на неориентируемом многообразии, например на листе Мебиуса. Достаточно отобразить конус будущего двумерной кинематики L на TM так, чтобы ось симметрии конуса была параллельна продольной линии листа Мебиуса. Слабейшая топология в L может быть как $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_a$, так и $\mathbb{R}^2$. Смена пространственной ориентации при движении конуса вдоль средней линии не имеет значения, т.к. ориентация времени сохраняется.

4. ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИЕ ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Здесь мы рассмотрим псевдоримановы многообразия с несколько ослабленными требованиями к псевдометрике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M – гладкое многообразие. Назовем M псевдометрическим, если на TM задана симметричная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ сигнатуры $(+ - \dots - 0 \dots 0)$, гладко зависящая от точки $x \in M$. Форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем называть скалярным произведением.

Будут рассматриваться только такие псевдометрические многообразия M , на которых существует *ориентация времени*, т.е. непрерывное векторное поле X такое, что всюду $\langle X, X \rangle > 0$. Обозначим $F_x := \{u \in T_x M \mid \langle u, u \rangle > 0\} \cup \{0\}$. Определим функцию $f_x: F_x \rightarrow \mathbb{R}$: $f_x(u) := \text{sgtr}(\langle X(x), u \rangle) \cdot \langle u, u \rangle^{1/2}$ ($\text{sgtr}(0) := 0$), $x \in M$. Конус будущего соответствующей линейной кинематики определяется естественным образом: $\forall u \in T_x M$ $u \in Q_x^+ \Leftrightarrow u \in F_x$ и $f_x(u) > 0$. Функция f_x обладает следующими свойствами:

- 1) $\forall u, v \in Q_x^+ \quad \langle u, v \rangle \geq f_x(u)f_x(v)$;
- 2) $\forall u, v \in Q_x^+ \quad f_x(u + v) \geq f_x(u) + f_x(v)$;
- 3) $\forall u \in F_x$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f_x(\alpha u) = \alpha f_x(u)$.

Иными словами, пара $(T_x M, f_x)$ является псевдометрической линейной кинематикой в смысле определения 5.1 из [9, 10]. Свойство 2 является неравенством Эйнштейна, которое заменяет неравенство треугольника (аксиома M_2 псевдометрической линейной кинематики). Свойство 3 является условием однородности псевдонормы f_x (аксиома M_3 , см. [9, 10]). Выпуклый конус Q_x^+ удовлетворяет аксиоме M_1 (см. [9, 10]):

$$\forall a \in Q_x^+ \quad \text{и} \quad \forall b \in T_x M \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : a + \alpha b \in Q_x^+.$$

Поскольку сигнатура скалярного произведения не зависит от точки, все кинематики $(T_x M, f_x)$ линейно изоморфны с сохранением порядка. Обозначим какую-нибудь из этих кинематик через L . Функция $f_x: F_x \rightarrow \mathbb{R}$, строго положительная на Q_x^+ и удовлетворяющая аксиомам M_2 и M_3 , называется *времениподобной нормой* (или *псевдонормой*) в $T_x M$.

Ранее нами была доказана теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Линейное пространство L с топологией, порожденной псевдонормой f , и отношением порядка, порожденным той же псевдонормой, является линейной кинематикой.*

Эта теорема была доказана в [9, 10] для бесконечномерного пространства L . В конечномерном случае она очевидна. Здесь мы докажем, что построенное выше семейство одинаковых конусов может быть задано с помощью кинематического атласа.

Выберем в области U n линейно независимых непрерывных векторных полей, $n := \dim M$. Приведем матрицу метрического тензора в каждом касательном пространстве

$T_x M$ к каноническому виду $\text{Diag}(1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0) = V_x^T g_x V_x$. Такое приведение (V_x) может быть осуществлено многими способами. В максимальном подпространстве, в котором метрический тензор имеет сигнатуру $(-\dots-)$, приведение V_x определено с точностью до ортогонального преобразования. В максимальном подпространстве, в котором метрический тензор вырожден, это приведение определено с точностью до невырожденного линейного преобразования. Поэтому базис в указанных подпространствах следует выбрать каким-то вполне определенным образом.

Векторы базиса в каждом касательном пространстве представим как линейную комбинацию выбранных ранее векторных полей. Рассмотрим максимальное подпространство, в котором метрический тензор имеет сигнатуру $(-\dots-)$. Пусть размерность этого подпространства равна m . Векторы базиса этого подпространства запишем как столбцы координат. Ранг этой прямоугольной матрицы равен m . Выберем из нее невырожденную квадратную матрицу порядка m . Окрестность U будем считать настолько малой, чтобы эта подматрица имела максимальный ранг на всем U . Выберем базис в рассматриваемом подпространстве так, чтобы в этой подматрице верхний правый угол был нулевым. Размерность группы ортогональных преобразований $O(m)$ как гладкого многообразия равна $m(m-1)/2$, и мы наложим такое же количество независимых условий на векторы базиса. Чтобы матрица приведения V_x была определена однозначно, достаточно фиксировать фазовые множители ± 1 векторов базиса. Их можно определить из условия $\langle X(x), u \rangle > 0$. (Если какой-то вектор базиса u оказался ортогональным $X(x)$, то мы несущественно изменим ориентацию времени X , чтобы на U поле X и этот набор векторов не были ортогональны. Изменение ориентации времени будем называть несущественным, если новая ориентация времени лежит в той же самой компоненте связности конуса $F_x \setminus \{0\}$ для всех $x \in M$.)

В максимальном подпространстве, в котором метрический тензор вырожден, на векторы базиса нужно наложить m^2 условий, поскольку размерность группы $GL(m)$ как гладкого многообразия равна m^2 . Потребуем, чтобы координаты векторов базиса этого подпространства образовывали подматрицу (выбираемую так же, как и выше), равную единичной диагональной матрице. Фазовые множители тем самым уже определены.

Касательные пространства в этих новых базисах можно просто отождествить. Отображение V , заданное в каждой точке $x \in U$ матрицей V_x , требуемое. Вообще говоря, эта векторнозначная 1-форма не замкнута. В силу произвольности области U кинематический атлас P построен. Отображения перехода, очевидно, удовлетворяют свойству 3 определения многообразия кинематического типа (и, в частности, условию пункта 2.3.2). Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть M – (псевдометрическое) многообразие со скалярным произведением $\langle, \rangle$ сигнатуры $(+\dots-0\dots0)$ и ориентацией времени X . Пусть P – построенный выше кинематический атлас. Тогда (M, P) является многообразием кинематического типа L , где в качестве L можно взять любое касательное пространство $T_a M$ с суженной на него псевдометрикой, причем конус будущего

этой кинематики выбирается так, чтобы он содержал вектор $X(a)$.

Отметим, что в силу вырожденности метрики на псевдометрическом многообразии, вообще говоря, нет симметричной римановой связности. Аналогом симметричной римановой связности может служить *косвязность*. Ее символы Кристоффеля определяются соотношением

$$2\Gamma_{k|ij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

где $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ — матрица метрического тензора. Аналогом ковариантного дифференцирования является следующая операция:

$$\frac{*DX}{dt} := \sum_{j=1}^m \frac{dX^j}{dt} \langle \partial_j, \cdot \rangle + \sum_{i,j,k=1}^m \frac{d\gamma^i}{dt} X^j \Gamma_{k|ij} dx^k.$$

Производная векторного поля есть ковекторное поле. Это определение не зависит от выбора локальных координат.

5. ДОПУСТИМЫЕ КООРДИНАТЫ И ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ

5.1. Допустимые координаты. На многообразиях с отношением локального порядка было бы желательно вводить карты $h: U \rightarrow L$, которые непосредственно сохраняли бы локальный порядок. Однако таких карт, по-видимому, может не быть, т.е. это условие слишком жесткое и может сильно ограничить класс рассматриваемых многообразий и порядков [12]. Решение этого вопроса связано с проблемой пункта 3.2. Можно было бы также потребовать, чтобы дифференциалы карт $dh: TU \rightarrow L$ сохраняли построенное в пункте 2.1 семейство конусов в касательном расслоении данного многообразия. Однако можно показать, что такое условие в действительности эквивалентно требованию, чтобы отображения перехода для самих карт $h_1 \circ h_2^{-1}$ сохраняли порядок в L . Поэтому мы будем рассматривать на многообразии M карты вида $h: U \rightarrow L$, не требуя, чтобы локальный порядок в M сохранялся при отображении в L . Потребуем меньшего.

Мы видели в пунктах 2.4.5 и 2.3.2, что в линейных кинематиках, слабая топология которых содержит антидискретный слой, возникает естественно выделенное подпространство l_0 — максимальное линейное подпространство, содержащееся в замыкании конуса будущего линейной кинематики. В касательном расслоении TM многообразия кинематического типа L возникает поле линейных подпространств, $l_x := P_x^{-1}(l_0)$, $l_x \subset T_x M \ \forall x \in M$, т.е. распределение (не зависящее от выбора элемента $P(U)$ кинематического атласа).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкий атлас α из карт $h: U \rightarrow L$ на многообразии M называется допустимым, если все карты $h \in \alpha$ сохраняют распределение $l: \forall x \in \text{dom } h$ имеем $d_x h(l_x) = l_0$.

Если на многообразии M кинематического типа существует допустимый атлас, то координатные функции карт этого атласа можно перенумеровать так, что матрицы дифференциалов всех отображений перехода $h_1 \circ h_2^{-1}$ будут иметь блочный вид, как в пункте 2.3.2. Если указанное распределение голономно, то допустимый атлас существует. Достаточно взять в качестве координат со старшими номерами координаты на соответствующем интегральном подмногообразии.

Случай, когда размерность конуса будущего кинематики L меньше, чем размерность L , рассматривается аналогично.

5.2. Группа преобразований координат. Если на многообразии M есть гладкий атлас α такой, что все его карты имеют дополнительное свойство σ , то его можно расширить до гладкой структуры β всех тех гладко согласованных с α карт, которые обладают тем же свойством σ . В качестве свойства σ мы потребуем, чтобы каждая карта сохраняла определенное выше распределение $(l_x)_{x \in M}$, т.е. $\forall h \in \alpha$ и $\forall x \in \text{dom } h$ имеем $d_x h(l_x) = l_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M — гладкое многообразие с картирующим множеством L и гладкой структурой β . Преобразованием координат многообразия M мы назовем диффеоморфизм $\varphi: L \rightarrow L$ такой, что для любой карты h из гладкой структуры β композиция отображений $\varphi \circ h$ принадлежит той же гладкой структуре.

В выбранной нами гладкой структуре β это равносильно требованию, чтобы дифференциал $d\varphi$ сохранял l_0 , т.е. $d\varphi(l_0) = l_0$. Следовательно, в определенном выше допустимом атласе матрица Якоби отображения φ имеет блочный вид, приведенный в пункте 2.3.2 или 2.3.3, в зависимости от частичного порядка в L . Таким образом, мы ограничиваемся теми преобразованиями координат, которые сохраняют некоторую геометрическую структуру на многообразии. Эта геометрическая структура (распределение $(l_x)_{x \in M}$) связана с типом причинности в M . Такой подход имеет много общего с предложенной Пименовым *полуримановой геометрией* [13].

Однако между этими двумя подходами имеется существенное различие. В расслоенных пространствах структурная группа действует на каждом слое. Это так называемая *активная* точка зрения на преобразования координат. Но действие произвольного элемента структурной группы, вообще говоря, не является изометрией. Поэтому *инвариантность по отношению к действию структурной группы* приобретает в расслоенных пространствах совсем другой смысл.

Мы придерживаемся так называемой *пассивной* точки зрения на преобразования координат. Определенная выше группа преобразований координат не действует на касательном расслоении многообразия M . Она действует на некоторой гладкой структуре многообразия M , отображая карту в карту ($h \mapsto \varphi \circ h$). Такие преобразования не обязаны быть изометриями, и мы можем определять *инвариантность по отношению к преобразованиям координат* так, как это принято в физике. При таком подходе особое значение приобретает выбор гладкой структуры на многообразии [14–16].

Список литературы

- [1] *T. I. Kaluza*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1921. P. 966–972.
- [2] *V. Fock*. Z. Phys. 1926. V. 39. P. 226–232.
- [3] *O. Klein*. Z. Phys. 1926. V. 37. P. 895–906.
- [4] *Ю. Б. Румер*. Исследования по 5-оптике. М.: Гостехиздат, 1956.
- [5] *A. Einstein, P. Bergmann*. Ann. Math. 1938. V. 39. P. 683–701.
- [6] *H. Busemann*. Rozpr. Mat. 1967. № 53. P. 1–50.
- [7] *Р. И. Пименов*. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 6. С. 1–496.
- [8] *D. Finkelstein*. Phys. Today. 1972. V. 25. № 4. P. 51–52; № 8. P. 15.
- [9] *В. Р. Крым*. Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 246. С. 152–173.
- [10] *V. R. Krym*. Causal structures in linear spaces. gr-qc/9704016.
- [11] *М. А. Улановский*. Укр. геометр. сб. 1970. Вып. 7. С. 153–165; Вып. 9. С. 96–110.
- [12] *E. H. Kronheimer, R. Penrose*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1967. V. 63. P. 481–501.
- [13] *Р. И. Пименов*. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1968. Т. 14. С. 154–173.
- [14] *Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер*. Введение в риманову геометрию. Санкт-Петербург: Наука, 1994.
- [15] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
- [16] *R. E. Gompf*. J. Diff. Geom. 1983. V. 18. № 2. P. 317–328.

Поступила в редакцию 7.VIII.1998 г.,
после доработки 8.IX.1998 г.