Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Я. Савченко, Решение уравнения Кеммера и уравнения Брейта в плоско поляризованной волне, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 2, 282–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 08:29:25

© 1999 г.

О. Я. Савченко*

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕММЕРА И УРАВНЕНИЯ БРЕЙТА В ПЛОСКО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЕ

Приведены все решения уравнения Кеммера и уравнения Брейта для плоско поляризованной волны. Часть решений для случая, когда масса частицы стремится к нулю, в пределе совпадает с электромагнитным полем волны, которая действует на частицу.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кеммера [1], используемое для описания движения частицы со спином 1, дает не всегда положительную плотность вероятности. Скорость частицы, описываемой данным уравнением, не ограничена скоростью света [2, 3]. Поэтому вряд ли уравнение Кеммера достаточно точно описывает поведение этих частиц в релятивистской области. Для уравнения Брейта [4] частица имеет скорость, которая ограничена скоростью света, и плотность вероятности всегда положительна [3]. Однако уравнение Брейта не исследовалось так полно, как уравнение Кеммера. Полезно иметь как можно больше точных решений как уравнения Кеммера, так и уравнения Брейта, чтобы при анализе этих решений выявить их особенности. Это дает возможность сделать заключение о предпочтительности описания движения частицы со спином 1 уравнениями Кеммера или Брейта и облегчит поиски новых уравнений, более точно описывающих движение частиц со спином 1. В [5] найдена часть решений уравнения Кеммера для плоско поляризованной волны, в [3] найдены все решения уравнения Кеммера и часть решений уравнения Брейта для циркулярно поляризованной волны. В предлагаемой статье приводятся все решения уравнения Кеммера и уравнения Брейта для плоско поляризованной волны и приводятся те решения уравнения Брейта для циркулярно поляризованной волны, которые отсутствуют в работе [3].

Уравнение Кеммера в электромагнитном поле имеет вид

$$(\beta_i \hat{k}_i + k_0) \Psi = 0, \quad (1.1)$$

а уравнение Брейта –

$$(\alpha_i \hat{k}_i + \beta_4 k_0) \Psi = 0, \quad (1.2)$$

*Институт химической кинетики и горения, Сибирское отделение РАН, Новосибирск, Россия

где

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\gamma_i^{(1)} + \gamma_i^{(2)}), \quad \hat{k}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{ie}{\hbar c} \Phi_i, \quad k_0 = \frac{mc}{\hbar},$$

e и m – заряды и масса частицы, $\alpha_i = (\gamma_{i4}^{(1)} + \gamma_{i4}^{(2)})/2$, $\gamma_i^{(1)}$ и $\gamma_i^{(2)}$ – два набора гиперкомплексных единиц [4, 6], которые коммутируют друг с другом, Φ_i – компоненты четырехвектора электромагнитного поля. Здесь Ψ – матричнозначная волновая функция квантовой частицы. Симметричные и антисимметричные решения уравнений (1.1) и (1.2) имеют соответственно следующий вид [3]:

$$\Psi_s = (A_i s_i + F_{ij} s_{ij}) \Gamma, \quad \Psi_a = (B_i a_i + C a_0 + D a_5) \Gamma. \quad (1.3)$$

Гиперкомплексный множитель Γ , общий для этих решений, равен $(1 + i\gamma_{12}^{(1)})(1 + \gamma_4^{(1)}) \times (1 + i\gamma_{12}^{(2)})(1 + \gamma_4^{(2)})$; явный вид гиперкомплексных множителей $s_i, s_{ij}, a_i, a_0, a_5$, стоящих после компонент, не содержащих гиперкомплексных единиц, приведен в таблице.

$s_{ij} = -s_{ji}$	Явный вид
s_t	$-i(\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$
s_x	$(1 + \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(1 - \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
s_y	$i(1 + \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(1 - \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
s_z	$(1 - \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$
s_{tx}	$-i(1 - \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(1 - \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
s_{ty}	$(1 - \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(1 + \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
s_{tz}	$-i(1 + \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$
s_{yz}	$i(\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)})(1 + \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
s_{zx}	$-(\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)})(1 - \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
s_{xy}	$-i(\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
a_t	$(1 - \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
a_x	$-i(\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)})(1 + \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
a_y	$(\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)})(1 - \gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)})$
a_z	$i(\gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
a_0	$i(1 + \gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} - \gamma_{31}^{(2)})$
a_5	$i(\gamma_3^{(1)} - \gamma_3^{(2)})(\gamma_{31}^{(1)} + \gamma_{31}^{(2)})$

Плотность вероятности ρ и скорость частицы $\vec{v}$ для уравнения Кеммера определяются через компоненты симметричного решения формулами

$$\begin{aligned} \rho_s &= i \operatorname{Im} \vec{A}^* \vec{E}, \\ \vec{v}_s &= c \frac{\operatorname{Im} (A_t^* \vec{E} + [\vec{A}^* \times \vec{H}])}{\operatorname{Im} \vec{A}^* \vec{E}}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

через компоненты антисимметричного решения формулами

$$\begin{aligned}\rho_a &= i \operatorname{Im} c^* B_t, \\ \vec{v}_a &= -c \frac{\operatorname{Im} C^* \vec{B}}{\operatorname{Im} c^* B_t},\end{aligned}\tag{1.5}$$

а для уравнения Брейта – через компоненты симметричного решения формулами

$$\begin{aligned}\rho_s &= A_i^* A_i + \vec{E}^* \vec{E} + \vec{H}^* \vec{H}, \\ \vec{v}_s &= -2c \frac{\operatorname{Re}(A_i^* \vec{A} - [\vec{E}^* \times \vec{H}])}{A_i^* A_i + \vec{E}^* \vec{E} + \vec{H}^* \vec{H}},\end{aligned}\tag{1.6}$$

через компоненты антисимметричного решения формулами [3]

$$\begin{aligned}\rho_a &= B_i^* B_i + C^* C + D^* D, \\ \vec{v}_a &= 2c \frac{\operatorname{Re} B_t^* \vec{B}}{B_i^* B_i + C^* C + D^* D},\end{aligned}\tag{1.7}$$

в которых

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}, \quad \vec{E} = E_{tx} \vec{i} + E_{ty} \vec{j} + E_{tz} \vec{k}, \quad \vec{H} = H_{yz} \vec{i} + H_{zx} \vec{j} + H_{xy} \vec{k},$$

а нижний индекс i , как и в (1.1)–(1.3), означает суммирование по индексам x, y, z, t (или по эквивалентным им индексам 1, 2, 3, 4).

Из (1.4) и (1.5) следует, что для уравнения Кеммера плотность вероятности не обязательно положительна, а скорость частицы может превышать скорость света [2, 5]. Из (1.6) и (1.7) следует, что для уравнения Брейта плотность вероятности всегда положительна, а скорость частицы не больше скорости света. Поэтому при выборе уравнения для частицы со спином 1 следует отдать предпочтение уравнению Брейта, а не уравнению Кеммера.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕММЕРА ДЛЯ ПЛОСКО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ

В плоской волне, поляризованной в плоскости xz и распространяющейся вдоль оси z , компоненты волновой функции частицы определяются двумя системами уравнений [3]:

$$\begin{aligned}k_0 \vec{E} + i \hat{k}_4 \vec{A} + \hat{k} A_4 &= 0, \\ k_0 \vec{H} - [\hat{k} \times \vec{A}] &= 0, \\ k_0 A_4 + (\hat{k} \cdot \vec{E}) &= 0, \\ k_0 \vec{A} - i \hat{k}_4 \vec{E} + [\hat{k} \times \vec{H}] &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

и

$$\begin{aligned}
k_0 B_4 + i\hat{k}_4 C &= 0, \\
k_0 \vec{B} + \hat{k} C &= 0, \\
k_0 C + (\hat{k} \cdot \vec{B}) - i\hat{k}_4 B_4 &= 0, \\
D &\equiv 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

при

$$\hat{k}_x = -\frac{ie}{\hbar c} \Phi_x(z+ct), \quad \hat{k}_y = 0, \quad \hat{k}_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{k}_4 = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.3}$$

где Φ_x – четырехвектор волны. Решение систем уравнений (2.1), (2.2) можно найти в виде функций, зависящих только от $\eta = z+ct$, умноженных на $e^{ik_0 ct}$ или на $e^{-ik_0 ct}$. Первое решение дает компоненты состояния с положительной энергией, второе – с отрицательной. Из системы уравнений (2.1) следует, что ненулевые компоненты симметричного решения для частицы с положительной энергией и спином, ориентированным вдоль и против магнитного поля волны, определяются формулами

$$\begin{aligned}
A_t = \mp H_y &= \left(\pm \frac{i\Phi}{k_0} \mp \frac{\Phi'}{2k_0^2} - \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \right) \psi_{\pm}^{\pm} e^{ik_0 ct}, \\
A_z = \mp E_x &= \left(1 \mp \frac{i\Phi}{k_0} \pm \frac{\Phi'}{2k_0^2} + \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \right) \psi_{\pm}^{\pm} e^{ik_0 ct}, \\
A_x = \pm E_z &= -\left(\pm i + \frac{\Phi}{k_0} \right) \psi_{\pm}^{\pm} e^{ik_0 ct},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

а при отрицательной энергии частицы – формулами

$$\begin{aligned}
A_t = \mp H_y &= \left(\pm \frac{i\Phi}{k_0} \pm \frac{\Phi'}{2k_0^2} - \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \right) \psi_{\pm}^{\mp} e^{-ik_0 ct}, \\
A_z = \mp E_x &= \left(1 \mp \frac{i\Phi}{k_0} \mp \frac{\Phi'}{2k_0^2} + \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \right) \psi_{\pm}^{\mp} e^{-ik_0 ct}, \\
A_x = \pm E_z &= \left(\pm i + \frac{\Phi}{k_0} \right) \psi_{\pm}^{\mp} e^{-ik_0 ct},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\Phi = \frac{e}{\hbar c} \Phi_x, \tag{2.6}$$

а

$$\psi_{\pm}^{\pm} = \exp \left\{ \frac{i}{2k_0} \left(\pm \Phi + \int_{\eta_0}^{\eta} \Phi^2 d\eta \right) \right\}, \quad \psi_{\pm}^{\mp} = \exp \left\{ \frac{i}{2k_0} \left(\pm \Phi - \int_{\eta_0}^{\eta} \Phi^2 d\eta \right) \right\}. \tag{2.7}$$

Из систем уравнений (2.1), (2.2) следует, что для состояний с положительной энергией ненулевые компоненты симметричных решений со спином, ориентированным поперек

магнитного поля волны, и ненулевые компоненты антисимметричных решений определяются формулами

$$\begin{aligned} A_y &= \psi_0^+ e^{ik_0 ct} = C, \\ E_y &= -i \left(1 + \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \right) \psi_0^+ e^{ik_0 ct} = B_t, \\ H_x &= -i \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \psi_0^+ e^{ik_0 ct} = B_z, \\ H_z &= i \frac{\Phi}{k_0} \psi_0^+ e^{ik_0 ct} = B_x, \end{aligned} \quad (2.8)$$

а для состояний с отрицательной энергией ненулевые компоненты симметричного решений со спином, ориентированным поперек магнитного поля волны, и ненулевые компоненты антисимметричного решения – формулами

$$\begin{aligned} A_y &= \psi_0^- e^{-ik_0 ct} = C, \\ E_y &= i \left(1 + \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \right) \psi_0^- e^{-ik_0 ct} = B_t, \\ H_x &= i \frac{\Phi^2}{2k_0^2} \psi_0^- e^{-ik_0 ct} = B_z, \\ H_z &= i \frac{\Phi}{k_0} \psi_0^- e^{-ik_0 ct} = B_x, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\psi_0^\pm = \exp \left\{ i \left(\pm \frac{\int_{\eta_0}^{\eta} \Phi^2 d\eta}{2k_0} \right) \right\}. \quad (2.10)$$

Согласно (1.4), (1.5) и (2.8) скорость частицы с положительной энергией в симметричном состоянии при поперечной ориентации спина и в антисимметричном состоянии совпадает со скоростью классической частицы [5], ненулевые составляющие скорости которой определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{c} &= -\frac{2k_0 \Phi}{2k_0^2 + \Phi^2}, \\ \frac{v_z}{c} &= -\frac{\Phi^2}{2k_0^2 + \Phi^2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

а составляющие скорости при продольной ориентации спина – формулами

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{c} &= -\frac{2k_0 \Phi}{2k_0^2 + \Phi^2 \pm \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi}, \\ \frac{v_z}{c} &= -\frac{\Phi^2 \pm \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi}{2k_0^2 + \Phi^2 \pm \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что абсолютная величина скорости безгранично увеличивается, когда зависимость Φ от η стремится к выражению $-\sqrt{2}k_0 \operatorname{tg} \sqrt{2}k_0 (\eta - \eta_0)$, где η_0 – постоянная, если спин ориентирован по магнитному полю волны, и к выражению $\sqrt{2}k_0 \operatorname{tg} \sqrt{2}k_0 \times$

$(\eta - \eta_0)$ при противоположной ориентации спина. Аналоги формул (2.11) и (2.12) для состояния частицы с отрицательной энергией имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{v_x}{c} &= \frac{2k_0 \Phi}{2k_0^2 + \Phi^2}, \\ \frac{v_z}{c} &= -\frac{\Phi^2}{2k_0^2 + \Phi^2}\end{aligned}\quad (2.13)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{v_x}{c} &= \frac{2k_0 \Phi}{2k_0^2 + \Phi^2 \mp \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi}, \\ \frac{v_z}{c} &= -\frac{\Phi^2 \mp \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi}{2k_0^2 + \Phi^2 \mp \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) следует, что изменение знака энергии эквивалентно изменению знака заряда частицы.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БРЕЙТА ДЛЯ ПЛОСКО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ

В плоской волне, поляризованной в плоскости xz , в случае, если волна распространяется вдоль оси z , компоненты волновой функции частицы определяются двумя системами уравнений [3]:

$$\begin{aligned}i\hat{k}_4 \vec{E} - [\hat{\vec{k}} \times \vec{H}] - k_0 \vec{A} &= 0, \\ i\hat{k}_4 \vec{H} + [\hat{\vec{k}} \times \vec{E}] &= 0, \\ i\hat{k}_4 A_4 - (\hat{\vec{k}} \cdot \vec{A}) &= 0, \\ i\hat{k}_4 \vec{A} - \hat{\vec{k}} A_4 + k_0 \vec{E} &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned}i\hat{k}_4 B_4 + (\hat{\vec{k}} \cdot \vec{B}) - k_0 C &= 0, \\ i\hat{k}_4 \vec{B} + \vec{k} B_4 &= 0, \\ i\hat{k}_4 C + k_0 B_4 &= 0, \\ i\hat{k}_4 D &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

при

$$\hat{k}_x = -\frac{ie}{\hbar c} \Phi_x(\eta), \quad \hat{k}_y = 0, \quad \hat{k}_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{k}_4 = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Из (3.1) следует, что волновые функции симметричного состояния, спин в которых ориентирован вдоль и против магнитного поля волны, определяются системами уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_t - \frac{\partial}{\partial z} A_z \pm i\Phi E_z &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_t + k_0 E_z &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_z - k_0 A_z \pm i\Phi A_t &= 0, \\ E_x = \pm A_z, \quad A_x = \mp E_z, \quad H_y = \mp A_t,\end{aligned}\tag{3.4}$$

а волновая функция симметричного состояния, спин в котором ориентирован поперек магнитного поля волны, — системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_y + k_0 E_y &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_y - \frac{\partial}{\partial z} H_x - k_0 A_y - i\Phi H_z &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} H_z + i\Phi E_y &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} H_x - \frac{\partial}{\partial z} E_y &= 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

которая совпадает с системой уравнений (3.2). Поэтому A_y , E_y , H_x и H_z совпадают соответственно с C , B_t , $-B_z$ и $-B_x$.

Существуют три типа независимых решений систем уравнений (3.1)–(3.4): с положительной, отрицательной и нулевой энергиями. Компоненты первого и второго решений — функции, зависящие от $\eta = z + ct$, умноженные соответственно на $e^{ik_0 ct}$ и $e^{-ik_0 ct}$, а компоненты третьего решения зависят только от η . Рассмотрим сначала первое решение. При $\Phi = 0$ ненулевые компоненты симметричных решений со спином, ориентированным вдоль оси y или против нее, определяются формулами

$$E_x = \mp A_z = \mp i e^{ik_0 ct}, \quad E_z = \mp A_x = e^{ik_0 ct}\tag{3.6}$$

и

$$H_y = \mp A_t = \pm i e^{-ik_0 z}, \quad E_z = \mp A_x = e^{-ik_0 z}.\tag{3.7}$$

Верхние знаки в (3.6), (3.7) относятся к состояниям со спином, ориентированным вдоль y , нижние — против. Ненулевые компоненты трех симметричных состояний с нулевым средним спином и пяти антисимметричных состояний определяются формулами

$$H_z = e^{-ik_0 z} = B_x,\tag{3.8}$$

$$E_y = -i e^{ik_0 ct} = B_t, \quad A_y = e^{ik_0 ct} = C,\tag{3.9}$$

$$H_x = e^{-ik_0 z} = -B_z, \quad A_y = i e^{-ik_0 z} = C,\tag{3.10}$$

$$B_y = e^{ik_0 ct},\tag{3.11}$$

$$D = e^{-ik_0 z}.\tag{3.12}$$

Состояния с компонентами (3.7), (3.8) и (3.10) имеют нулевую полную энергию и импульс mc . Аналогов таких состояний нет ни для уравнения Дирака, ни для уравнения Кеммера. В плоско поляризованной волне, когда $\Phi \neq 0$, ненулевые компоненты симметричных состояний с ориентацией спина вдоль и против магнитного поля волны, которое направлено по оси y , определяются формулами

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{1}{k_0 \pm i\Phi_0} \left(\Phi \pm \frac{d}{d\eta} \right) \psi_{\pm}^{\pm} e^{ik_0 ct} = \mp A_t, \\ E_x &= \pm \frac{1}{k_0} \left[ik_0 + \frac{d}{d\eta} - i \frac{\Phi}{k_0} \left(\Phi \pm \frac{d}{d\eta} \right) \right] \psi_{\pm}^{\pm} e^{ik_0 ct} = \pm A_z, \\ E_z &= \psi_{\pm}^{\pm} e^{ik_0 ct} = \mp A_x, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\psi_{\pm}^{\pm}$ – решение уравнений

$$\left[\left(2 \frac{d}{d\eta} + ik_0 \right) \frac{1}{k_0 \pm i\Phi} \left(2 \frac{d}{d\eta} + ik_0 - i \frac{\Phi^2}{k_0} \right) + k_0 \mp i\Phi \right] \psi_{\pm}^{\pm} = 0. \quad (3.14)$$

Ненулевые компоненты первых двух симметричных состояний с поперечным спином и первых двух антисимметричных состояний определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_z &= \psi_0^+ e^{ik_0 ct} = -B_x, \\ E_y &= \left(\frac{\Phi}{2k_0} \psi_0^+ + \frac{1}{2} i \int_{\eta_0}^{\eta} \Phi \psi_0^+ d\eta \right) e^{ik_0 ct} = B_t, \\ H_x &= \frac{\Phi}{2k_0} \psi_0^+ e^{ik_0 ct} = B_z, \\ A_y &= -\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} \Phi \psi_0^+ d\eta e^{ik_0 ct} = C, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где ψ_0^+ – решение уравнения

$$\left(\frac{d}{d\eta} + ik_0 - i \frac{\Phi^2}{2k_0} \right) \psi_0^+ - \frac{1}{2} \Phi \int_{\eta_0}^{\eta} \Phi \psi_0^+ d\eta = 0. \quad (3.16)$$

Компоненты остальных состояний в плоско поляризованной волне не зависят от Φ и определяются формулами (3.9)–(3.12). Волновые функции с отрицательной энергией получаются из соответствующих волновых функций с положительной энергией заменой в них i на $-i$, Φ на $-\Phi$.

Ненулевые компоненты симметричных состояний с нулевой энергией определяются формулами

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i\Phi}{k_0 \mp i\Phi} = \mp A_z, \\ H_y &= \frac{k_0}{k_0 \mp i\Phi} = \mp A_t, \end{aligned} \quad (3.17)$$

если спин ориентирован вдоль и против магнитного поля волны. Знак “—” относится к состоянию, ориентированному вдоль, а знак “+” — к состоянию, ориентированному против магнитного поля волны. Ненулевые компоненты симметричного состояния с поперечной ориентацией спина и ненулевые компоненты антисимметричного состояния определяются так:

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - \Phi^2}} = -B_x, \\ A_y &= \frac{\Phi}{\sqrt{k_0^2 - \Phi^2}} = C, \\ H_x = E_y &= -\frac{k_0}{(\sqrt{k_0^2 - \Phi^2})^3} \frac{d\Phi}{d\eta} = B_t = -B_z \end{aligned} \quad (3.18)$$

и

$$H_x = 1 = -B_z. \quad (3.19)$$

Скорость частицы с нулевой энергией зависит от Φ только в первом симметричном состоянии с поперечной ориентацией спина и в первом антисимметричном состоянии. Согласно формулам (1.4)–(1.7) и (3.18) эта скорость направлена по оси z , а ее величина определяется формулой

$$v = -\frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 + \frac{k_0^2 + \Phi^2}{|k_0^2 - \Phi^2|}} c, \quad (3.20)$$

где

$$\gamma = \frac{k_0}{|k_0^2 - \Phi^2|^{3/2}} \frac{d\Phi}{d\eta}. \quad (3.21)$$

Если же волновая функция частицы является суперпозицией волновых функций, компоненты которых определяются соответственно формулами (3.18) и (3.19), то скорость частицы находится по формуле

$$v = -\frac{2\gamma(\gamma - \beta)}{(\gamma - \beta)^2 + \gamma^2 + \frac{k_0^2 + \Phi^2}{|k_0^2 - \Phi^2|}} c, \quad (3.22)$$

где γ то же, что и в (3.21) а β — отношение амплитуд этих волновых функций. Из формул (3.20)–(3.22) следует, что скорость частицы в состоянии с нулевой энергией в любой момент времени определяется напряженностью поля волны в этот момент времени. Поэтому после окончания действия волны она будет такой же, какой была до начала действия.

Не исключено, что такое свойство состояний с нулевой энергией имеет общий характер. Поэтому интересно найти скорость частицы в этих состояниях в случае действия на частицу циркулярно поляризованной волны. Вектор-потенциал такой волны определяется следующим образом:

$$\Phi_x = \Phi_0 \sin \varphi, \quad (3.23)$$

$$\Phi_y = \Phi_0 \cos \varphi, \quad (3.24)$$

где Φ_0 — постоянная величина, φ — фаза волны, зависящая только от η . Из уравнений (3.3) работы [5], в которых ω заменено на $\varphi' = d\varphi/d\eta$, следует, что ненулевые компоненты симметричных состояний определяются формулами

$$\begin{aligned} H_{\parallel}^{\pm} &= e^{\pm i\varphi}, \\ H_{\perp}^{\pm} &= \mp i \left(1 + \frac{\Phi_0^2}{k_0^2} \right) e^{\pm i\varphi}, \\ A_z^{\pm} &= A_t^{\pm} = i \frac{\Phi_0}{k_0} e^{\pm i\varphi}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

если спин частицы ориентирован вдоль или против направления распространения волны, и формулами

$$\begin{aligned} H_z &= 1, \\ E_{\perp} &= H_{\parallel} = -i \frac{\Phi_0 \varphi'}{k_0^2 + \Phi_0^2}, \\ A_z &= A_{\perp} = \frac{\Phi_0^2 \varphi'}{k_0 (k_0^2 + \Phi_0^2)}, \\ A_{\parallel} &= -i \frac{\Phi_0}{k_0}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

если спин ориентирован поперек. Из уравнений (3.4) работы [5], в которых ω заменено на $d\varphi/d\eta$, следует, что ненулевые компоненты антисимметричных состояний имеют вид

$$\begin{aligned} B_{\perp} &= \psi_{\pm}, \\ B_t &= -B_z = \pm \frac{\Phi_0 \varphi'}{k_0 \sqrt{k_0^2 + \Phi_0^2}} \psi_{\pm}, \\ B_{\parallel} &= \pm i \sqrt{1 + \frac{\Phi_0^2}{k_0^2}} \psi_{\pm}, \\ C &= i \frac{\Phi_0}{k_0} \psi_{\pm}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$\psi_{\pm} = \exp \left(\pm \frac{i\varphi}{\sqrt{1 + \Phi_0^2/k_0^2}} \right), \quad (3.28)$$

и вид

$$B_z = 1. \quad (3.29)$$

Ненулевые компоненты скорости частицы в состояниях (3.25)–(3.27) определяются соответственно следующими формулами:

$$v_z = 2 \left(\frac{k_0 \Phi_0}{k_0^2 + \Phi_0^2} \right)^2 c, \quad (3.30)$$

$$v_z = \frac{2(\Phi_0 \varphi')^2}{2(\Phi_0 \varphi')^2 + (k_0^2 + \Phi_0^2)^2} c \quad (3.31)$$

и

$$\begin{aligned}
v_{\perp} &= \frac{k_0 \Phi_0 \varphi' \sqrt{k_0^2 + \Phi_0^2}}{(\Phi_0 \varphi')^2 + (k_0^2 + \Phi_0^2)^2} c, \\
v_z &= \frac{(\Phi_0 \varphi')^2}{(\Phi_0 \varphi')^2 + (k_0^2 + \Phi_0^2)^2} c.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Индексы $\perp$ и $\parallel$ в формулах (3.27), (3.32) означают перпендикулярность и параллельность соответствующей компоненты электрическому полю волны. Из формул (3.30)–(3.32) следует, что после действия циркулярно поляризованной волны, как и в случае действия плоскополяризованной волны, скорость частицы остается такой же, какой она была до начала действия волны.

4. СКОРОСТЬ ЧАСТИЦЫ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ И УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В нерелятивистском случае, когда скорость определяется в линейном приближении вдоль поля волны, в состояниях с нулевым спином скорость частицы для уравнения Кеммера совпадает со скоростью классической частицы. Эта скорость направлена перпендикулярно электрическому полю волны, а величина скорости определяется формулой

$$v = \mp \frac{\Phi_0}{k_0} c, \tag{4.1}$$

где знак “ $-$ ” относится к состоянию с положительной энергией, а знак “ $+$ ” – с отрицательной энергией. В состояниях, в которых спин, равный единице, направлен вдоль или против магнитного поля волны, составляющие скорости частицы для уравнения Кеммера в нерелятивистском случае определяются следующим образом:

$$v_x = -\frac{\Phi}{k_0} c, \quad v_z = \mp \left(\frac{1}{2k_0^2} \frac{d\Phi}{d\eta} \right) c \tag{4.2}$$

для состояний с положительной энергией и

$$v_x = \frac{\Phi}{k_0} c, \quad v_z = \pm \left(\frac{1}{2k_0^2} \frac{d\Phi}{d\eta} \right) c \tag{4.3}$$

для состояний с отрицательной энергией. Если спин частицы направлен вдоль магнитного поля волны, v_z в формулах (4.2), (4.3) имеет верхний знак, а при противоположном направлении – нижний.

Ненулевые компоненты ψ^+ симметричного состояния с положительной энергией при ориентации спина вдоль и против магнитного поля волны для уравнения Брейта в линейном по полю приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
H_y &= \mp A_t = \frac{1}{k_0} \left(\Phi - \frac{1}{2} e^{-ik_0\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{ik_0\eta} \frac{d\Phi}{d\eta} d\eta \right) e^{ik_0ct}, \\
E_x &= \mp A_z = \left(\mp i + \frac{\Phi}{2k_0} \right) e^{ik_0ct}, \\
E_z &= \mp A_x = \left(1 \mp \frac{1}{2} e^{-ik_0\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{ik_0\eta} \Phi d\eta \right) e^{ik_0ct}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

и

$$\begin{aligned}
H_y &= \mp A_t = \left(\mp i + \frac{\Phi}{2k_0} \right) e^{-ik_0 z}, \\
E_x &= \mp A_z = -\frac{1}{k_0} \left(\Phi - \frac{1}{2} e^{ik_0 \eta} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-ik_0 \eta} \frac{d\Phi}{d\eta} d\eta \right) e^{-ik_0 z}, \\
E_z &= \mp A_x = \left(1 \pm \frac{1}{2} e^{ik_0 \eta} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-ik_0 \eta} \Phi d\eta \right) e^{-ik_0 z},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

а симметричного состояния с нулевым спином и антисимметричного состояния – вид

$$\begin{aligned}
H_z &= e^{-ik_0 z} = B_x, \\
E_y &= \left(\frac{1}{2k_0} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-ik_0 \eta} \frac{d\Phi}{d\eta} d\eta \right) e^{ik_0 ct} = B_t, \\
H_x &= \frac{\Phi}{2k_0} e^{-ik_0 z} = -B_z, \\
A_y &= \left(-\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-ik_0 \eta} \Phi d\eta \right) e^{ik_0 ct} = C
\end{aligned} \tag{4.6}$$

и

$$\begin{aligned}
H_z &= -e^{-ik_0 z} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{ik_0 \eta} \Phi d\eta = B_x, \\
E_y &= -ie^{ik_0 ct} = B_t, \\
A_y &= e^{ik_0 ct} = C.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Из (4.4), (4.5) и (1.6) следует, что в плоско поляризованной гармонической волне с вектор-потенциалом $\Phi_x = (e/\hbar c)\Phi_0 \sin \omega \eta$, где Φ_0 и ω – постоянные; ненулевые составляющие скорости частицы определяются формулами

$$v_x = -\frac{\Phi_x}{k_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k_0^2 - \omega^2} \right) c \tag{4.8}$$

для состояния (4.4),

$$v_x = -\frac{1}{2} \frac{\Phi_x}{k_0} \frac{\omega^2}{k_0^2 - \omega^2} c \tag{4.9}$$

для состояния (4.5) и

$$v_z = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_0^2 - \omega^2} \frac{d\Phi_x}{d\eta} \right) c \tag{4.10}$$

для состояний (4.4) и (4.5); v_z имеет знак “+”, если спин частицы направлен вдоль магнитного поля волны, и знак “–”, если спин направлен противоположно. Скорости в симметричных состояниях (4.6), (4.7) и антисимметричных состояниях направлены по оси x . В симметричном состоянии скорость определяется следующим образом:

$$v_x = -\frac{\Phi_0}{2k_0} \frac{\omega^2}{k_0^2 - \omega^2} c, \tag{4.11}$$

а в антисимметричном —

$$v_x = -\frac{k_0 \Phi_0}{k_0^2 - \omega^2} c. \quad (4.12)$$

Из формул (4.8)–(4.12) следует, что для уравнения Брейта у частицы в поле волны существует резонансная частота $\nu_0 = mc^2/h$, связанная с переходом между состояниями с энергией mc^2 и нулевым импульсом и состоянием с нулевой энергией и импульсом mc . Этот резонанс не имеет аналогов ни для уравнения Дирака, ни для уравнения Кеммера. Скорости частиц в состояниях с отрицательной энергией для уравнения Брейта, как и для уравнения Дирака и уравнения Кеммера, лишь знаком отличаются от скоростей частиц в соответствующих состояниях с положительной энергией.

В ультрарелятивистском случае, когда на расстоянии порядка длины волны частица может набрать энергию, существенно большую собственной, интересен случай, когда набираемая энергия существенно меньше энергии кванта волны. При этом в пределе скорость частицы равна скорости света и направлена вдоль волны, если частица находится в симметричном состоянии. Ненулевые компоненты предельной волновой функции совпадают с электрическим и магнитным полями волны, если спин частицы ориентирован вдоль или против магнитного поля волны. Распределение плотности и потока импульса такой частицы совпадает с распределением плотности энергии и плотности потока импульса в волне. Это означает, что волновая функция заряженной частицы с предельно малой массой совпадает с электромагнитным полем волны, действующей на такую частицу.

Список литературы

- [1] *N. Kemmer.* Proc. Roy. Soc. A. 1937. V. 173. P. 91.
- [2] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1. М.: Наука, 1968.
- [3] *О. Я. Савченко.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 2. С. 200.
- [4] *Г. Бете, Э. Солпитер.* Квантовая механика атома с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
- [5] *О. Я. Савченко.* ТМФ. 1993. Т. 95. № 1. С. 51.
- [6] *А. Зоммерфельд.* Строение атома и спектры. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1956.

Поступила в редакцию 17.IV.1998 г.,
после доработки 13.X.1998 г.