Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Арминьон, Гравитационные эффекты на световых лучах и потери энергии двойного пульсара в скалярной теории гравитации, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 139–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:09:36

© 2004 г.

М. Арминьон*

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ НА СВЕТОВЫХ ЛУЧАХ И ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ДВОЙНОГО ПУЛЬСАРА В СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Дано краткое изложение скалярной биметрической теории гравитации с выделенной системой отсчета. Для описания динамики использовано обобщение второго закона Ньютона. В статическом случае получены геодезическое движение и ньютоновское поле притяжения. В статическом сферическом случае найдена метрика Шварцшильда. Построены постньютоновское (ПН) и постминковское (ПМ) приближения, основанные на сопоставлении данной системе вспомогательного семейства систем. В ПН-приближении первого порядка для фотонов отсутствует эффект выделенной системы отсчета. Поэтому для фотонов получаются стандартные предсказания общей теории относительности. В ПМ-приближении нулевого порядка изолированная система теряет энергию путем квадрупольного излучения, причем монополярный и дипольный члены отсутствуют. Решение ньютоновской задачи двух тел с учетом этих потерь дает коэффициенты Петерса–Мэтьюса данной теории.

Ключевые слова: гравитация, асимптотическое приближение, постньютоновское приближение, гравитационное излучение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Считается, что скалярные теории не способны объяснить эффекты гравитации на световых лучах, предсказанные на основе общей теории относительности (ОТО) и получившие экспериментальное подтверждение. Действительно, наиболее очевидная ковариантная скалярная теория не предсказывает, к примеру, искривления световых лучей [1], но этот частный пример не доказывает, что *никакая* скалярная теория не может предсказать этого явления. Точно так же обычно полагают, что в скалярной теории должно иметь место монополярное и дипольное излучение и, следовательно, важную роль должны играть эффекты гравитационного излучения, что противоречит наблюдениям. Этот аргумент считается особенно убедительным в случае скалярной теории с *выделенной системой отсчета*. Например, Карлип [2] пишет: “В [скалярной] теории, не обладающей лоренц-инвариантностью, законы сохранения не налагают никаких ограничений на излучение. Поэтому монополярное излучение должно доминировать, а

*Laboratoire “Sols, Solides, Structures” (Unité Mixte de Recherche of the CNRS), Grenoble, France. E-mail: arminjon@hmg.inpg.fr

абберация должна иметь место во всех порядках”. Однако последнее утверждение имеет форму догадки, которую следует проверить для каждой конкретной теории.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы: 1) представить краткое изложение скалярной теории с выделенной системой отсчета [3]–[5] и доказательства того, что эта теория предсказывает стандартные эффекты ОТО на световых лучах [6]; 2) впервые исследовать гравитационные потери энергии на излучение в этой скалярной теории. В частности, будет показано, что это действительно *потери* и что в этой теории отсутствует монопольное и дипольное гравитационное излучение.

2. ОБЗОР СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ЭФИРА

Исходным пунктом при построении теории является *эвристическая интерпретация* гравитации как результата воздействия на материю силы давления со стороны вообразимой идеальной жидкости или “микроэфира” на масштабе, характерном для теории элементарных частиц. Эта интерпретация приводит к определенному набору уравнений; именно этот набор в действительности составляет содержание теории и должен оцениваться исходя из предсказаний, к которым он приводит, и сравнения этих предсказаний с экспериментальными данными. При таком эвристическом взгляде гравитация – это “сила Архимеда в эфире”; такого рода интерпретация ньютоновской гравитации была предложена Эйлером в 1746 году [7]. Построение теории в таком ключе было выполнено в работе [3], но формулировка уравнений движения была позднее модифицирована [4]¹⁾, для того чтобы получить уравнение сохранения энергии. Согласно [4] движение пробной частицы в общем случае подчиняется обобщенному второму закону Ньютона (в работе [3] это было верно лишь в статическом случае); то же верно и для светоподобных частиц (фотонов) [6]. При помощи предварительного рассмотрения среды из пыли из динамики пробной частицы были выведены динамические уравнения, применимые для непрерывной среды [5]. Эти динамические уравнения позволяют получить гравитационное обобщение уравнений Максвелла в данной теории, согласующееся с динамикой фотона, описываемой обобщением второго закона Ньютона (см. [8], часть 3).

2.1. Пространственно-временная метрика и полевое уравнение. Уравнения формулируются в *выделенной системе отсчета* E , являющейся системой покоя для тела отсчета M или “макроэфира”²⁾. Предполагается, что на теле отсчета M имеется евклидова метрика g^0 . Наблюдатели, связанные с системой отсчета E , измеряют пространственные расстояния, отвечающие метрике g^0 , а также измеряли бы “абсолютное время” T , если бы не было гравитации. Однако из “абсолютной” версии принципа эк-

¹⁾В данном случае даты публикаций вводят в заблуждение: первая версия работы [3] датируется 1992 годом.

²⁾С физической точки зрения о системе отсчета можно думать как о пространственной сети наблюдателей, у которых имеются линейки и часы, позволяющие измерять пространственно-временные координаты (z^μ) , $\mu = 0, \dots, 3$, таким образом, что каждый наблюдатель обладает постоянными пространственными координатами z^i , $i = 1, 2, 3$. Такие координаты называются *приспособленными к системе отсчета* (см. [9]). Трехмерное тело отсчета, ассоциированное с системой отсчета, можно определить как множество мировых линий наблюдателей и описывать пространственными координатами (z^i) .

вивалентности Эйнштейна следует, что физические эталоны длины (времени) сокращаются (растягиваются) в гравитационном поле [3]. Скалярное поле теории представляет собой либо фактор сжатия β временного интервала $dt_{\mathbf{x}}$ (из-за увеличения периода часов в гравитационном поле), измеряемого часами, находящимися в точке $\mathbf{x}$ и связанными с системой отсчета E , либо его квадрат $f = \beta^2$. Последняя величина определяет компоненту γ_{00} метрики γ физического, искривленного пространства-времени в любых координатах (x^μ) (где $x^0 = cT$, c – скорость света), связанных с системой отсчета E :

$$\frac{dt_{\mathbf{x}}}{dT} = \sqrt{f} \equiv \beta \leq 1. \quad (1)$$

Интерпретация гравитации как силы Архимеда приводит к определенному выражению для вектора гравитационного ускорения $\mathbf{g}$ в терминах градиента “давления эфира” p_e , причем оператор градиента определяется при помощи метрики $\mathbf{g}$ физического пространства [3]. Оказывается [4], что $\mathbf{g}$ имеет очень простой вид в терминах евклидовой метрики $\mathbf{g}^0$ и скаляра f :

$$\mathbf{g} = -\frac{c^2}{2}\nabla_0 f, \quad \nabla_0 f \equiv \text{grad}_{\mathbf{g}^0} f, \quad (\text{grad}_{\mathbf{g}^0} f)^i \equiv g^{0ij} f_{,j} \quad (2)$$

(матрица (g^{0ij}) является обратной к матрице (g_{0ij}) компонент евклидовой метрики $\mathbf{g}^0$). Согласно “абсолютной” версии принципа эквивалентности поле β также определяет растяжение бесконечно малого пространственного интервала dl , измеренного в направлении вектора $\mathbf{g}$, по сравнению с расстоянием dl^0 , вычисленным с помощью евклидовой метрики: $dl = dl^0/\beta$, в то время как бесконечно малые интервалы в перпендикулярных к $\mathbf{g}$ направлениях остаются неизменными. Это предположение можно выразить по-другому, сказав, что метрика $\mathbf{g}$ физического пространства в системе отсчета E находится в следующем отношении к евклидовой метрике $\mathbf{g}^0$ ³⁾:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^0 + \left(\frac{1}{f} - 1\right) \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \equiv \frac{\mathbf{g}^* \otimes \mathbf{g}^*}{\mathbf{g}^2}, \quad (3)$$

³⁾ Отметим, что уравнение (3) неприменимо при $\mathbf{g} = 0$. Действительно, предполагающееся сокращение происходит в направлении гравитационного ускорения $\mathbf{g}$ и, следовательно, оно априори не определено там, где $\mathbf{g} = 0$ (если только значение скалярного потенциала f не совпадает с его значением “на бесконечности” (т.е. $f = 1$): в этом случае сокращение вообще отсутствует). В общем, физически реалистическом случае вектор $\mathbf{g}$ обращается в нуль лишь в изолированных точках, например в одной точке между двумя массивными телами, а также в одной точке вблизи центра каждого массивного тела. В изолированной точке $\mathbf{x}$, где $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$, направление сокращения не является однозначно определенным. Вместе с тем уравнение (3) применимо в окрестности точки $\mathbf{x}$ и показывает, что метрика $\mathbf{g}$ имеет разрыв в этой изолированной точке, но остается ограниченной в ее окрестности. Поэтому такие геометрические элементы, как длина линии, определяются так же, как и в случае непрерывной метрики. Более того, исследование сферически-симметричного случая показывает, что с динамическими уравнениями также не возникает никаких трудностей. Более трудный случай соответствует сильно идеализированной ситуации “коллапса в свободном падении”, когда $\mathbf{g}$ обращается в нуль в области конечного объема [3]. Простое решение для этого случая при наличии сферической симметрии было дано в работе [3], причем предложенный способ решения можно обобщить на случай отсутствия какой-либо симметрии. Следует помнить, что в этой теории “истинная” геометрия описывается в терминах евклидовой метрики $\mathbf{g}^0$, тогда как $\mathbf{g}$ имеет лишь статус “эффективной метрики” – так же, как и в *релятивистской теории гравитации* (РТГ) [10], [11].

где $\mathbf{g}^* \equiv (g_i)$, $g_i \equiv g_{ij}^0 g^j$ и $\mathbf{g}^2 \equiv g_{ij}^0 g^i g^j$. В любых координатах (x^μ) с $x^0 = cT$, связанных с системой отсчета Е, пространственно-временная метрика имеет вид

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(dx^0)^2 - dl^2, \quad dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4)$$

т.е. $\gamma_{00} = f$, $\gamma_{ij} = -g_{ij}$, $\gamma_{0i} = 0$. Равенство нулю компонент γ_{0i} в системе отсчета эфира Е является естественным следствием предположения о том, что в этой системе отсчета можно определить понятие одновременности с абсолютным временем T .

Во многих случаях можно пренебречь временным изменением “стандартного давления эфира” $p_e^\infty(T)$ [3], поскольку анализ космологических моделей [12] показывает, что такое изменение происходит на больших временных масштабах порядка 10^8 лет. Тогда уравнение для поля [3] можно переписать в виде [4]

$$\Delta f - \frac{1}{f} \left(\frac{f_{,0}}{f} \right)_{,0} = \frac{8\pi G}{c^2} \sigma, \quad x^0 = cT, \quad (5)$$

где $\Delta \equiv \text{div}_{\mathbf{g}^0} \text{grad}_{\mathbf{g}^0}$ – обычный оператор Лапласа, определенный при помощи евклидовой метрики $\mathbf{g}^0$, G – ньютоновская гравитационная постоянная, а $\sigma \equiv (T^{00})_E$ – плотность массы-энергии в системе отсчета эфира ($\mathbf{T}$ – это “тензор массы”, т.е. тензор энергии-импульса в единицах массы). Это уравнение является лишь пространственно-ковариантным. Непосредственно видно, что в любой статической ситуации уравнения (2) и (5) дают как раз *ньютоновское* гравитационное ускорение для заданной плотности массы-энергии $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$. Вместе с тем $\sigma \equiv T^{00}$ включает не только чистую энергию материи (например, для пыли последняя равна сумме массы покоя и кинетической энергии), так как она увеличивается также за счет самого гравитационного поля [4]. В статической сферически-симметричной ситуации пространственно-временная метрика (4), предсказываемая из полевого уравнения (5) и граничных условий ($f(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и $f(r)$ ограничено при $r \rightarrow 0$), легко получается в сферических координатах r , θ и φ для $\mathbf{g}^0$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2V(r)}{c^2} \right) c^2 dT^2 - \frac{1}{1 - 2V(r)/c^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (6)$$

где $V(r)$ – ньютоновский потенциал, соответствующий плотности $\sigma = \sigma(r)$:

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{GM(u)}{u^2} du, \quad M(r) \equiv 4\pi \int_0^r u^2 \sigma(u) du. \quad (7)$$

(Предполагается, что величина $M \equiv M(r)|_{r=\infty} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} M(r)$ конечна.) Так как речь идет о статическом решении, то подразумевается, что плотность массы-энергии σ не зависит от времени (и сферически-симметрична) *в выделенной системе отсчета*, т.е. массивное тело покоится в “эфире” или стационарно вращается относительно него. Если $\sigma(r) = 0$ при $r > R$, то $V(r) = GM/r$ при $r > R$; это *внешнее решение Шварцшильда*. Что касается шварцшильдовского внутреннего решения ОТО, оно известно лишь в случае, когда выполнено дополнительное условие $\sigma(r) = \text{const}$ при $0 \leq r < R$, но в этом случае формула (6) *не дает* шварцшильдовского внутреннего решения. Отметим, что, в отличие от ситуации в ОТО, формула (6) всегда справедлива при условии $M(r)|_{r=\infty} < \infty$, а разница между “внутренним” и “внешним” случаями исчезает.

2.2. Динамические уравнения.

2.2.1. *Движение пробной частицы.* Движение пробной частицы подчиняется естественному обобщению второго закона Ньютона, определенного в терминах *физической*, искривленной метрики. В случае постоянного гравитационного поля оказывается сравнительно легко распространить планковскую форму второго закона Ньютона ($\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$, где $\mathbf{F}$ – сила, а $\mathbf{P}$ – импульс), соответствующую специальной теории относительности, на ситуацию с гравитацией, поскольку временную производную вектора (типа $\mathbf{P}$) несомненно следует определить как “абсолютную производную”, индуцированную ковариантной производной по отношению к постоянной пространственной метрике $\mathbf{g}$. В координатах абсолютная производная вектора $\mathbf{w}$, зависящего от параметра ξ , вдоль траектории в римановом пространстве с фиксированной метрикой $\mathbf{g}$ имеет вид

$$\left(\frac{D_0 \mathbf{w}}{D\xi} \right)^i \equiv \frac{dw^i}{d\xi} + \Gamma_{jk}^i w^j \frac{dx^k}{d\xi}, \quad (8)$$

где Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля метрики $\mathbf{g}$. Такую производную использовали Ландау и Лифшиц [13], чтобы переписать пространственную часть геодезического уравнения движения Эйнштейна в виде второго закона Ньютона в постоянном гравитационном поле. В случае переменного гравитационного поля в системе отсчета Е (как и в любой другой возможной системе отсчета) все еще имеется корректно определенная пространственная метрика $\mathbf{g}$, но теперь она зависит от времени и имеется локальное время $t_{\mathbf{x}}$. В работе [14] было показано, что можно дать единственное определение временной производной $D\mathbf{w}/D\xi$ пространственного вектора $\mathbf{w}$, зависящего от параметра ξ , вдоль траектории в заданном пространстве М с метрикой $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\xi}$, зависящей от параметра ξ , при следующих существенных условиях: 1) производная должна быть пространственным вектором, линейно зависящим от $\mathbf{w}$; 2) она должна сводиться к абсолютной производной $D_0 \mathbf{w}/D\xi$, если $\mathbf{g}$ в действительности не зависит от ξ ; 3) она должна выражаться в терминах пространственной метрики $\mathbf{g}$ и ее производных; 4) она должна подчиняться правилу Лейбница дифференцирования скалярного произведения, т.е.

$$\frac{d}{d\xi} (g(\mathbf{w}, \mathbf{z})) = \mathbf{g} \left(\mathbf{w}, \frac{D\mathbf{z}}{D\xi} \right) + \mathbf{g} \left(\frac{D\mathbf{w}}{D\xi}, \mathbf{z} \right). \quad (9)$$

Это единственное определение имеет вид [14]

$$\frac{D\mathbf{w}}{D\xi} \equiv \frac{D_0 \mathbf{w}}{D\xi} + \frac{1}{2} t \cdot \mathbf{w}, \quad t \equiv \mathbf{g}_{\xi}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{\xi}}{\partial \xi}. \quad (10)$$

Для определения второго закона Ньютона траектория пробной частицы параметризуется локальным временем ($\xi = t_{\mathbf{x}}$), синхронизованным вдоль траектории в соответствии с определением Ландау и Лифшица [13]. В действительности определение (10) также справедливо (и единственно при перечисленных выше требованиях) для любой системы отсчета в любой теории с искривленной пространственно-временной метрикой [14]. В данном случае синхронизованное локальное время получается простым интегрированием уравнения (1) вдоль траектории, так как абсолютное время T глобально синхронизовано в системе отсчета эфира Е (поскольку предполагается, что компоненты γ_{0i} равны нулю в системе Е).

В определении импульса также не возникает неоднозначности. Оно имеет вид

$$\mathbf{P} \equiv m(v)\mathbf{v}, \quad m(v) \equiv m(v)|_{v=0} \cdot \gamma_v \equiv m(v)|_{v=0} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (11)$$

где скорость $\mathbf{v}$ пробной частицы (в системе отсчета E) измеряется при помощи локального времени $t_{\mathbf{x}}$, а ее модуль v определяется при помощи пространственной метрики $\mathbf{g}$:

$$v^i \equiv \frac{dx^i}{dt_{\mathbf{x}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{dx^i}{dT}, \quad v \equiv \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2} = (g_{ij}v^i v^j)^{1/2}. \quad (12)$$

Гравитационная сила считается равной $\mathbf{F}_g = m(v)\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ дается формулой (2), а также допускается наличие негравитационной силы $\mathbf{F}_0$. Таким образом, получаем следующее обобщение второго закона Ньютона:

$$\mathbf{F}_0 + m(v)\mathbf{g} = \frac{D\mathbf{P}}{Dt_{\mathbf{x}}}. \quad (13)$$

Для фотона скорость $\mathbf{v}$ по-прежнему определяется формулой (12), где вместо инерционной массы следует подставить массовое содержание энергии $E = h\nu$, а частота ν (число n колебаний в единицу времени) измеряется при помощи локального времени:

$$E \equiv h\nu, \quad \nu \equiv \frac{dn}{dt_{\mathbf{x}}}, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_0 + \frac{E}{c^2}\mathbf{g} = \frac{D\mathbf{P}}{Dt_{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{P} \equiv \frac{E}{c^2}\mathbf{v}. \quad (15)$$

Определяя “чистую энергию” (т.е. не включающую потенциальную энергию в гравитационном поле) точечной массы посредством формулы

$$E = m(v)c^2, \quad (16)$$

видим, что уравнение (15) применимо как к точечным массам, так и к фотонам. С учетом выражения (2) для вектора $\mathbf{g}$ и выражений (3) и (4) для метрики из формулы (15) вытекает, что свободные частицы ($\mathbf{F}_0 = 0$) движутся по пространственно-временным геодезическим в *статическом* гравитационном поле ($f_{,0} = 0$) (см. [14] в случае точечных масс и [3] в случае фотонов). Из формулы (15) с $\mathbf{F}_0 = 0$ также следует простое эволюционное уравнение для энергии E [4]:

$$\frac{d(E\beta)}{dT} = E \frac{\partial \beta}{\partial T}, \quad \beta \equiv \sqrt{f}. \quad (17)$$

С помощью этого уравнения второй закон Ньютона (15) можно переписать в виде, описывающем “координатное ускорение” для свободной пробной частицы (точечной массы или фотона) [6]:

$$\frac{du^i}{dT} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} + 2\beta_{,j}u^j \right) u^i - \Gamma_{jk}^i u^j u^k - \frac{1}{2}g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial T} u^k - \frac{c^2}{2}f(\nabla_0 f)^i. \quad (18)$$

2.2.2. *Динамика сплошной среды и сохранение энергии.* Уравнения (10) (с $\xi = t_{\mathbf{x}}$) и (15) (с $\mathbf{F}_0 = 0$) определяют второй закон Ньютона в выделенной системе отсчета для любой свободной пробной частицы. Следовательно, он справедлив и для пыли, представляющей собой сплошную среду, состоящую из когерентно движущихся не взаимодействующих частиц, у каждой из которых сохраняется масса покоя. Пыль характеризуется тензором массы

$$T^{\mu\nu} = \rho^* U^\mu U^\nu, \quad (19)$$

где ρ^* – плотность собственной массы покоя, а $U^\mu \equiv dx^\mu/ds$ – 4-скорость. Вне зависимости от выбранной формы пространственно-временной метрики γ (при условии $\gamma_{0i} = 0$ в выделенной системе отсчета) из данного обобщения второго закона Ньютона вытекает следующее динамическое уравнение для пыли [5]:

$$T_{\mu;\nu}^\nu = b_\mu, \quad (20)$$

где b_μ определяется выражением

$$b_0(\mathbf{T}) \equiv \frac{1}{2} g_{jk,0} T^{jk}, \quad b_i(\mathbf{T}) \equiv -\frac{1}{2} g_{ik,0} T^{0k}; \quad (21)$$

если не оговорено противное, индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики γ ; точка с запятой означает ковариантное дифференцирование с помощью связности Кристоффеля, ассоциированной с метрикой γ . Предполагается, что уравнение (20) с учетом определения (21) справедливо для любой материальной среды: оно учитывает эквивалентность массы и энергии и является выражением универсальности гравитации. Уравнение (20) справедливо в любых координатах (x^μ), приспособленных к системе отсчета E и удовлетворяющих условию $x^0 = \phi(T)$, где T – абсолютное время. (Скалярное полевое уравнение (5), напротив, справедливо при условии $x^0 = cT$.) В противоположность результатам работы [5], из (20) вытекает, что составляющие пыли частицы подчиняются второму закону Ньютона, а масса покоя сохраняется, т.е.

$$(\rho^* U^\nu)_{;\nu} = 0. \quad (22)$$

В сплошной среде общего вида уравнение (20) приводит к точному сохранению энергии, которое *заменяет* точное сохранение массы (22) [5]. С помощью соотношения

$$-\gamma = \gamma_{00} \cdot g = f \cdot \left(\frac{g^0}{f} \right) = g^0, \quad \gamma \equiv \det(\gamma_{\mu\nu}), \quad g \equiv \det(g_{ij}), \quad g^0 \equiv \det(g_{ij}^0), \quad (23)$$

справедливого для рассматриваемой пространственно-временной метрики (см. формулы (3) и (4)), в декартовых координатах (x^i) (т.е. таких, что $g_{ij}^0 = \delta_{ij}$) с $x^0 = cT$ находим из (20)

$$T_{0,\nu}^\nu = \frac{1}{2} f_{,0} T^{00} \equiv \frac{1}{2} f_{,0} \sigma, \quad (24)$$

$$T_{i,\nu}^\nu = \frac{1}{2} f_{,i} \sigma - \frac{1}{2} g_{ik,0} T^{0k} - \frac{1}{2} g_{jk,i} T^{jk}. \quad (25)$$

С помощью уравнения (5) для скалярного поля формулу (24) можно переписать в виде [4]

$$T_{0,\nu}^\nu + \frac{1}{8\pi G} \left\{ \left[\frac{\mathbf{g}^2}{c^2} + \frac{c^2}{4} \left(\frac{f_{,0}}{f} \right)^2 \right]_{,0} + \operatorname{div}_{\mathbf{g}^0} (f_{,0} \mathbf{g}) \right\} = 0. \quad (26)$$

Это соотношение является истинным уравнением сохранения для величины

$$\varepsilon \equiv c^2 T_0^0 + \frac{1}{8\pi G} \left[\mathbf{g}^2 + \frac{c^4}{4} \left(\frac{f_{,0}}{f} \right)^2 \right] \equiv \varepsilon_m + \varepsilon_g, \quad (27)$$

которую можно назвать плотностью полной энергии, тогда как $\varepsilon_m \equiv c^2 T_0^0$ и ε_g — это плотности энергии материи и чисто гравитационной энергии. Интегрируя (26) по фиксированной области Ω в предположении, что поток материи через ее границу $\partial\Omega$ отсутствует, получаем

$$\frac{dE}{dT} = -\Phi, \quad \Phi \equiv \frac{c^2}{8\pi G} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial T} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS, \quad E \equiv \int_{\Omega} \varepsilon dV, \quad (28)$$

где V и S — объемная и поверхностная меры, связанные с пространственной евклидовой метрикой $\mathbf{g}^0$ (в формулах (26)–(28) скалярное произведение и квадрат также относятся к $\mathbf{g}^0$).

3. ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИИ НА СВЕТОВЫХ ЛУЧАХ

Предсказание гравитационных эффектов на световых лучах делается в ОТО исходя из предположения о том, что мировыми линиями световых лучей являются нулевые геодезические пространственно-временной метрики и что имеется лишь одно статическое сферически-симметричное массивное тело (см., например, [1], [15], [16]). Это предположение представляется оправданным, поскольку ввиду известной (апостериори) малости этих эффектов отклонение от равномерного движения становится ощутимым, лишь когда луч находится очень близко от одного массивного тела, так что полем остальных тел действительно можно пренебречь, а малое отклонение от сферичности является эффектом второго порядка. Как уже отмечалось выше, в статической ситуации из принятого в нашей теории обобщения (15) второго закона Ньютона следует [3], что фотоны движутся по пространственно-временным геодезическим метрики γ , в действительности являющимся нулевыми геодезическими, поскольку скорость фотонов v , определенная по формуле (12), — это константа c ⁴). Более того, метрика γ (6), предсказываемая

⁴) В [3] фотоны определяются как светоподобные частицы в том смысле, что $v = c$, тем же способом, что и в ОТО. (Разумеется, соотношение $v = c$ равносильно утверждению, что касательный вектор к мировой линии частицы $\mathbf{U} = (U^\mu)$, где $U^\mu \equiv dx^\mu/d\xi$, является “изотропным” 4-вектором, т.е. $\gamma(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0$.) Предположение, что $v = c$, согласуется со вторым законом Ньютона (15), где $\mathbf{F}_0 = 0$. Действительно, координатное ускорение (18) можно переписать в виде

$$\frac{D\mathbf{v}}{dT} = \sqrt{f} \left(\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{c^2} \right), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{d\mathbf{x}}{dT},$$

где $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{g}, \mathbf{v})$. Вычисляя $d(v^2)/dT$, нетрудно проверить, что любое решение этого уравнения с такими начальными данными, что $v(T)|_{T=0} = c$, удовлетворяет условию $v = c$ в любой момент времени.

нашей теорией вне тела в сферически-симметричной ситуации, – это как раз метрика Шварцшильда. Поэтому можно ожидать, что эта теория должна предсказывать те же эффекты на световых лучах, что и стандартные эффекты, предсказанные в ОТО с использованием метрики Шварцшильда. Вместе с тем в данной теории с выделенной системой отсчета нельзя предполагать, что соответствующее тело покоится в выделенной системе координат Е: необходимо объяснить равномерное перемещение этого тела через “эфир”⁵⁾.

3.1. Асимптотическое постньютоновское приближение. Для такого объяснения надо развить приближенную схему, применимую при слабых гравитационных полях и низких скоростях небесных тел, т.е. “постньютоновскую” (ПН) приближенную схему. При этом следует максимально полно использовать строгие процедуры, используемые в настоящее время в прикладной математике, поскольку релятивистская небесная механика претендует на очень высокую точность. В таком ключе ПН-приближение впервые рассматривалось в рамках ОТО Футамазе и Шутцем [19]; другое, отчасти похожее на него, ПН-приближение было независимо предложено и развито для случая скалярной теории эфира в работах [6], [20]. Мы называем эту схему “асимптотической” ПН-схемой, так как она основана на обычном методе асимптотического разложения, применяющемся при решении граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Для световых лучей возникает описанная выше более простая ситуация, соответствующая светоподобной пробной частице, равномерно перемещающейся в системе отсчета Е. Поэтому достаточно привести лишь краткий обзор этой схемы.

3.1.1. Принцип асимптотического ПН-приближения. Так как уравнение (5) является гиперболическим уравнением второго порядка, то гравитирующая система баротропных идеальных жидкостей определяется в работе [20] при помощи начальных данных для f и $\partial_T f$ (для скалярного гравитационного поля) и при помощи начальных данных для давления p и абсолютной скорости $\mathbf{u} \equiv d\mathbf{x}/dT$ (для полей материи). Мы хотим описать гравитацию в *ньютоновском пределе*, в котором: 1) пространственная метрика $g(3)$ близка к евклидовой метрике g^0 , а локальное время (1) близко к абсолютному времени (оба условия выполнены при $f \rightarrow 1$); 2) поля материи близки к соответствующим ньютоновским полям. Для этого воспользуемся точным преобразованием подобия, имеющимся в ньютоновской гравитации [19], [20]: если $p^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \rho^{(1)} = F^{(1)}(p^{(1)})$ (плот-

⁵⁾Если “абсолютная” скорость тела v_B пренебрежима по сравнению с c , то можно считать, что величина v_B в действительности постоянна, по крайней мере при вычислении траекторий световых лучей. С другой стороны, эта теория предсказывает эффекты выделенной системы отсчета в небесной механике, которые должны быть малы, поскольку ньютоновская механика (в которой нет выделенной системы отсчета) уже является очень точной. Поэтому необходимо, чтобы скорость v_B действительно была мала. При согласовании уравнений движения для центров масс [17] с данными наблюдений можно будет определить наилучшее “подгоночное” значение абсолютной скорости $\mathbf{V}$ центра масс Солнечной системы, что позволит найти абсолютные скорости всех объектов Солнечной системы. Предварительное согласование (в предположении изолированности Солнечной системы и без учета собственного вращения небесных тел) дало значение $|\mathbf{V}| \simeq 3$ км/с [18]. Поэтому можно ожидать, что абсолютные скорости объектов Солнечной системы имеют тот же порядок величины, что и их орбитальные скорости, и, в частности, действительно малы по сравнению с c .

ность) и $U_N^{(1)}$ (ньютоновский потенциал) подчиняются уравнениям Ньютона–Эйлера, то для любого $\lambda > 0$ поля

$$\begin{aligned} p^{(\lambda)}(\mathbf{x}, T) &= \lambda^2 p^{(1)}(\mathbf{x}, \sqrt{\lambda}T), & \rho^{(\lambda)}(\mathbf{x}, T) &= \lambda \rho^{(1)}(\mathbf{x}, \sqrt{\lambda}T), \\ U_N^{(\lambda)}(\mathbf{x}, T) &= \lambda U_N^{(1)}(\mathbf{x}, \sqrt{\lambda}T), & \mathbf{u}^{(\lambda)}(\mathbf{x}, T) &= \sqrt{\lambda} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \sqrt{\lambda}T) \end{aligned} \quad (29)$$

также подчиняются этим уравнениям при условии, что уравнение состояния системы (S_λ) имеет вид $F^{(\lambda)}(p^{(\lambda)}) = \lambda F^{(1)}(\lambda^{-2} p^{(\lambda)})$. Это преобразование подобия определяет предел слабого поля самой ньютоновской теории: при $\lambda \rightarrow 0$ потенциал и плотность тел убывают как λ (тогда как размер тел остается неизменным), орбитальные скорости убывают как $\sqrt{\lambda}$, а временной масштаб соответственно растет как $1/\sqrt{\lambda}$. Поэтому для перехода к ньютоновскому пределу в скалярной теории мы просто применяем преобразование подобия (29) к начальным данным интересующей нас гравитирующей системы. При этом ρ становится плотностью собственной массы покоя, а вместо ньютоновского потенциала $U_N^{(\lambda)}$ нужно подставить $V^{(\lambda)} = (c^2/2)(1 - f^{(\lambda)})$ (коэффициент нужен для выполнения условия $V^{(\lambda)} \sim U_N^{(\lambda)}$ при $\lambda \rightarrow 0$). Таким образом, определена система (S_λ) , являющаяся решением указанной задачи (P_λ) с начальными значениями, и можно ожидать, что поля, являющиеся решениями, допускают разложения по степеням λ , главные члены которых имеют тот же порядок по λ , что и главные члены в (29). Другими словами, мы вводим вспомогательное *семейство* гравитирующих систем, причем считается, что реальная интересующая нас система соответствует заданному малому значению λ_0 параметра λ . Тогда, принимая $[M]_\lambda = \lambda[M]$ и $[T]_\lambda = [T]/\sqrt{\lambda}$ в качестве новых единиц для системы (S_λ) (где $[M]$ и $[T]$ – это исходные единицы массы и времени), легко проверить, что все поля имеют порядок λ^0 , а малый параметр λ пропорционален $1/c^2$ (действительно, $\lambda = (c_0/c)^2$, где c_0 – скорость света в исходных единицах). Поэтому вывод ПН-разложений первого порядка (1 ПН-разложений) и приближенных уравнений не составляет труда: *все поля* зависят от малого параметра $1/c^2$, и можно записать разложения первого порядка по этому параметру. Тем не менее полезно обсудить отдельно гравитационное излучение.

3.1.2. Вопрос о временной переменной в разложениях. Прежде всего, асимптотические разложения должны быть верны при фиксированных значениях временной и пространственных переменных. Как мы только что видели, разложения естественно формулировать в единицах, зависящих от малого параметра λ . Следовательно, выбор $x'^0 = T$ в качестве временной переменной не эквивалентен выбору $x^0 = cT$, поскольку отношение $x'^0/x^0 = 1/c = \lambda^{1/2}/c_0$ зависит от малого параметра. Заметим, что $T = \lambda^{1/2}T_0$ в переменных единицах, где T_0 – *истинное* время (т.е. измеряемое в фиксированных единицах), и, следовательно, величина $cT = c_0T_0$ пропорциональна истинному времени. Но истинные орбитальные скорости в системе (S_λ) ведут себя как $\lambda^{1/2}$, а истинные орбитальные периоды – как $\lambda^{-1/2}$. Поэтому именно T , а не $cT \sim T_0$, практически не меняется при изменении λ в течение одного орбитального периода заданного тела в *ньютоновском пределе*. Следовательно, в этом пределе и, стало быть, в ПН-разложениях следует выбрать $x'^0 = T$, а не $x^0 = cT$, в качестве временной переменной. Последний

выбор соответствует *постминковским* (ПМ) разложениям (с волновыми уравнениями для гравитационных потенциалов), встречающимся при изучении гравитационного излучения (см. раздел 4).

3.1.3. Разложение метрики и полевого уравнения в выделенной системе отсчета. Лидирующий вклад возникает при разложении скалярного поля $f = \beta^2$ (или, точнее, поля $V = (c^2/2)(1 - f)$), потому что именно это поле ниже дает вклад первого порядка в разложение по $1/c^2$:

$$f = 1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{2A}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (30)$$

Пространственная метрика, получающаяся из евклидовой метрики при помощи (3), имеет вид

$$g_{ij} = g_{ij}^0 + \frac{2U}{c^2} h_{ij}^{(1)} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad h_{ij}^{(1)} \equiv \frac{U_{,i} U_{,j}}{g^{0kl} U_{,k} U_{,l}}, \quad (31)$$

где $g_{ij}^0 = g^{0ij} = \delta_{ij}$ в декартовых координатах, а пространственно-временная метрика легко находится из (4):

$$\gamma_{00} = f, \quad \gamma_{ij} = -g_{ij}, \quad \gamma_{0i} = 0. \quad (32)$$

Плотность массы-энергии $\sigma = T^{00}$ может быть записана в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (33)$$

где $\sigma_0 = \rho_0$ — сохраняющаяся плотность массы покоя, взятая в первом приближении. (Разлагая в случае идеальной жидкости энергетическое уравнение (26), находим, что ρ_0 подчиняется обычному уравнению непрерывности, а масса по-прежнему сохраняется в 1ПН-приближении.) ПН-разложение полевого уравнения (5) легко получается из (30) и (33). Так как в ПН-разложениях временная переменная $x'^0 = T$, то член с производной по времени входит в (5) с дополнительным множителем c^{-2} по сравнению с членом Δf , так что возникают уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta U &= -4\pi G \rho_0, \\ \Delta A &= -4\pi G \sigma_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

3.2. Эффекты слабого гравитационного поля для световых лучей.

3.2.1. ПН-уравнения движения фотона в выделенной системе отсчета. Нетрудно применить полученные результаты к случаю светоподобной частицы в поле сферического тела, равномерно перемещающейся со скоростью $d\mathbf{x}/dT \equiv \mathbf{V}$ в системе отсчета E [6]. Для фотона скорость u^i есть $O(c)$. Из (30) и (31) находим 1ПН-разложение координатного ускорения (18) для фотона. В декартовых координатах для метрики g^0 оно имеет вид

$$\frac{du^i}{dT} = U_{,i} - 2(U_{,j} u^j) \frac{u^i}{c^2} - ((U h_{ij}^{(1)})_{,k} + (U h_{ik}^{(1)})_{,j} - (U h_{jk}^{(1)})_{,i}) \frac{u^j u^k}{c^2} + O\left(\frac{1}{c}\right). \quad (35)$$

Ключевой момент заключается в том, что, как нетрудно проверить (см. [6], после формулы (36)), уравнение (35), вытекающее из второго закона Ньютона, *неотличимо от ПН-разложения уравнения для нулевых пространственно-временных геодезических*. Отметим, что ньютоновское гравитационное ускорение $\mathbf{g}_0 \equiv \nabla_0 U$ (с компонентами $U_{,i}$ в использованных декартовых координатах) входит в формулу (35) в том же порядке по λ или $1/c^2$, что и другие члены (т.е. в нулевом порядке, хотя в действительности эта формула соответствует приближению второго порядка: первое приближение просто дает $du^i/dT = 0$).

3.2.2. Переход к движущейся системе отсчета. Обозначим через E_V систему отсчета, связанную с массивным телом и движущуюся равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{V}$ относительно системы отсчета эфира E . От E к E_V можно перейти с помощью преобразования Лоренца плоской пространственно-временной метрики γ^0 (линейный элемент которой равен $(ds^0)^2 = c^2 dT^2 - dx^i dx^i$ в декартовых координатах для пространственной евклидовой метрики $\mathbf{g}^0$). В 1ПН-приближении фотон движется по нулевой геодезической физической пространственно-временной метрики γ ; при преобразовании Лоренца компоненты этого пространственно-временного тензора, разумеется, преобразуются как (дважды ковариантный) тензор. Отсюда легко получить ПН-уравнения движения фотона в системе отсчета E_V . Если пренебречь членами порядка $O(1/c^4)$, то после преобразования Лоренца компоненты $\gamma'_{\mu\nu}$ (за исключением членов порядка $O(1/c^3)$ в компонентах γ'_{0i} , не играющих роли в 1ПН-разложении нулевого геодезического уравнения [15]) зависят лишь от “ньютоновского” потенциала U , причем зависимость дается теми же уравнениями (30)–(32), что и в выделенной системе отсчета. В предположении сферической симметрии получаем простую формулу $U = GM_0/r$, где $M_0 \equiv \int \rho_0 dV$. В этом случае уравнения (30)–(32) дают 1ПН-разложение внешней метрики Шварцшильда. Хотя этот сферический потенциал, вообще говоря, не является постоянным в системе отсчета E , он действительно постоянен в системе отсчета E_V , движущейся вместе со сферическим массивным телом (например, Солнцем), создающим соответствующее поле, так что геодезическое уравнение совпадает с уравнением, выведенным из метрики Шварцшильда. Мы заключаем, что с той же точностью, что и в 1ПН-приближении ОТО (в частности, при пренебрежении компонентами γ_{0i} метрики, имеющими порядок $O(1/c^3)$), данная теория предсказывает в точности те же гравитационные эффекты для световых лучей, что и стандартные эффекты, получаемые в ОТО с помощью метрики Шварцшильда, причем это верно с учетом эффектов выделенной системы отсчета, поскольку они не дают вклада в этом приближении (подробнее см. [6]).

4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ (ИЗОЛИРОВАННАЯ СИСТЕМА)

В ОТО и других релятивистских теориях гравитации большая часть исследований гравитационного излучения проводится в рамках так называемого *приближения слабого поля*, которое заключается в линеаризации уравнений поля. В частности, для гравитационных потенциалов получаются уравнения Даламбера; именно это обстоя-

тельство открывает путь к изучению гравитационного излучения. Очевидно, что и в данной теории можно выполнить линейризацию нелинейного уравнения волнового типа (5).

4.1. Асимптотическое ПМ-приближение. В целях развития математически ясных приближенных схем представляется желательным найти асимптотический подход, позволяющий линейризовать полевые уравнения с сохранением их распространяющегося характера. Изложенная в п. 3.1 ПН-схема не подходит для этой цели, так как она приводит к уравнениям пуассоновского типа (34). Как уже отмечалось, это происходит из-за того, что для согласованности с ньютоновским пределом следует выбрать $x'^0 = T$ в качестве временной переменной в переменных единицах $[M]_\lambda = \lambda[M]$ и $[T]_\lambda = [T]/\sqrt{\lambda}$, в которых $\sqrt{\lambda} \sim c^{-1}$, а все поля имеют нулевой порядок. Из изложенного в п. 3.1.2 вытекает, что выбор $x^0 = cT$ в качестве временной переменной в различных разложениях, основанных на этих единицах, возможен лишь при отказе от предположения о малости скорости, которое следует заменить условием, что скорость имеет нулевой порядок (в исходных единицах).

4.1.1. Принцип асимптотического ПМ-приближения. Итак, определим семейство (S'_λ) гравитирующих систем идеальных жидкостей с помощью семейства начальных условий (в фиксированных единицах): потребуем, чтобы в начальный момент времени выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} p^{(\lambda)}(\mathbf{x}) &= \lambda^2 p^{(1)}(\mathbf{x}), & \rho^{(\lambda)}(\mathbf{x}) &= \lambda \rho^{(1)}(\mathbf{x}), \\ V^{(\lambda)}(\mathbf{x}) &= \lambda V^{(1)}(\mathbf{x}), & \partial_T V^{(\lambda)}(\mathbf{x}) &= \lambda \partial_T V^{(1)}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (36)$$

(Напомним, что $V \equiv (c^2/2)(1-f)$.) Эти условия описывают предел, в котором гравитационное поле становится слабым (из-за соответствующего уменьшения плотности), но в то же время скорость $u = |\mathbf{u}|$ не обязательно мала по сравнению с c , точнее говоря, u/c имеет конечный порядок величины, не зависящий от λ . Предполагается, что в течение рассматриваемого временного интервала поля, являющиеся решениями, по-прежнему имеют тот же порядок по λ , что и в уравнениях (36). Тогда в единицах $[M]_\lambda = \lambda[M]$ и $[T]_\lambda = [T]/\sqrt{\lambda}$ снова имеем $\sqrt{\lambda} \sim c^{-1}$, а все поля, *кроме скорости $\mathbf{u}$* , т.е. p , ρ , V , $\partial V/\partial x^0$, имеют нулевой порядок, а величина $\mathbf{u}$ порядка c .

4.1.2. ПМ-приближение нулевого порядка. Поскольку все поля, кроме $\mathbf{u}$, снова имеют нулевой порядок в переменных единицах, их разложения (первого порядка), очевидно, имеют тот же вид (см. (30)–(33)), что и в случае ПН-разложения. Однако из-за того что $\mathbf{u}$ теперь имеет порядок $O(c)$, член σ_0 нулевого порядка в разложении (33) плотности активной массы-энергии $\sigma \equiv T^{00}$ больше не равен, как в случае ПН-приближения [20], члену ρ_0 нулевого порядка в разложении плотности массы покоя в выделенной системе отсчета. Напротив, σ_0 теперь содержит кинетическую энергию в релятивистской форме:

$$\sigma_0 = \rho_0(\gamma_v)_0 = \rho_0(1 - \mathbf{u}_0^2)^{-1/2} \equiv \tau, \quad (37)$$

где $\mathbf{u}_0$ — коэффициент при c в ПМ-разложении $\mathbf{u}$: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 c + O(c^{-1})$.

Так как $x^0 = cT$ теперь является временной переменной, то член с производной по времени в уравнении (5) для скалярного поля f теперь не содержит множителя c^{-2} ; следовательно, при разложении получается “волновое уравнение на плоском пространстве-времени” с оператором Даламбера:

$$\square U \equiv U_{,0,0} - \Delta U = 4\pi G\tau, \quad x^0 = cT. \quad (38)$$

Динамические уравнения (24), (25) в применении к идеальной жидкости переходят в точные уравнения [20]

$$\begin{aligned} \partial_T(\psi f) + \partial_j(\psi f u^j) &= \frac{\sigma}{2} \partial_T f + c^{-2} \partial_T p, \\ \partial_T(\psi u^i) + \partial_j(\psi u^i u^j) + \Gamma_{jk}^i \psi u^j u^k + \mathbf{t}_k^i \psi u^k &= \psi f g^i - g^{ij} p_{,j}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\psi \equiv \sigma + \frac{p}{c^2 f}, \quad \mathbf{t}_k^i \equiv \frac{1}{2} g^{ij} \partial_T g_{jk}.$$

При использовании ПН-приближения (временная переменная равна T , все поля имеют нулевой порядок) разложение этих уравнений в нулевом порядке дает [20] уравнение непрерывности и классическое уравнение гидродинамики в присутствии гравитационного ускорения $U_{,i}$. (С помощью уравнения непрерывности этому уравнению можно придать вид уравнения Эйлера.) Напротив, в ПМ-приближении (временная переменная равна $x^0 = cT$, а $\mathbf{u}$ имеет порядок c) получается “уравнение непрерывности”, в которое вместо плотности массы покоя нулевого порядка входит плотность τ (37):

$$\partial_0 \tau + \partial_j(\tau u_0^j) = 0, \quad x^0 = cT, \quad (40)$$

а также уравнение, означающее, что главная часть ускорения равна нулю:

$$\partial_0(\tau u_0^i) + \partial_j(\tau u_0^i u_0^j) = 0. \quad (41)$$

Действительно, неудивительно, что при отказе от ньютоновского предела мы не получаем ньютоновских уравнений! Асимптотическая схема ПМ-приближения, введенная (по-видимому, впервые) в п. 4.1.1, является более общей, чем изложенная в п. 3.1.1 асимптотическая ПН-схема, в том смысле, что величина скорости может иметь больший диапазон значений. Таким образом, из-за того что $\mathbf{u}$ имеет порядок c , ускорение $U_{,i}$ играет роль лишь в следующем порядке (1ПМ-приближение), но соответствующее уравнение, по-видимому, довольно сложно. Тем не менее нулевого порядка в ПМ-приближении оказывается достаточно, чтобы оценить главную часть радиационных потерь энергии.

4.2. ПМ-приближение нулевого порядка для радиационных потерь энергии. Рассмотрим изолированную самогравитирующую систему, к которой применима изложенная выше ПМ-схема (т.е. гравитационное поле мало, но орбитальные скорости не *обязательно* малы). Мы хотим исследовать асимптотическое поведение при $R_0 \rightarrow \infty$ скорости изменения энергии (28) в шаре $\Omega: |\mathbf{X}| \leq R_0$. Точнее, мы исследуем предел при $R_0 \rightarrow \infty$ *главной части* dE/dT при $\lambda \rightarrow 0$ в рамках ПМ-приближения. Таким образом, мы оценим поток Φ (28) в нулевом порядке ПМ-приближения (в 0ПМ-приближении). Из (2) и (30) находим

$$\Phi = \Phi_0(1 + O(c^{-2})), \quad \Phi_0 \equiv -\frac{1}{4\pi G} \int_{\partial\Omega} \partial_T U U_{,k} n^k dS. \quad (42)$$

4.2.1. Разложение запаздывающего потенциала. Интересующее нас решение уравнения (38) имеет вид запаздывающего потенциала

$$U(\mathbf{X}, x^0) = \int \frac{G\tau(\mathbf{x}, x^0 - |\mathbf{X} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{X} - \mathbf{x}|} dV(\mathbf{x}). \quad (43)$$

(Интеграл распространен на всю “запаздывающую систему”, которая, как и исходная система, ограничена в пространстве. Более того, мы будем предполагать, что точка $\mathbf{X}$ находится на большом расстоянии от запаздывающей системы.) Разложение U при $R_0 \equiv |\mathbf{X}| \rightarrow \infty$ получается с помощью стандартной процедуры (см., например, [21], с. 125–126), которой мы попытаемся придать математически ясную форму, не давая, впрочем, доказательства сходимости. Прежде всего запишем разложение запаздывающей плотности в ряд Тейлора в точке $x^0 - R_0$:

$$\tau(\mathbf{x}, x^0 - R) = \tau(\mathbf{x}, x^0 - R_0) + \delta R \partial_0 \tau(\mathbf{x}, x^0 - R_0) + \frac{\delta R^2}{2!} \partial_0^2 \tau(\mathbf{x}, x^0 - R_0) + \dots, \quad (44)$$

где $R \equiv |\mathbf{X} - \mathbf{x}|$, $R_0 \equiv |\mathbf{X}|$, $\delta R \equiv R_0 - R$. Подставляя в (44) разложение Тейлора первого порядка функции R в точке $\mathbf{X}$,

$$\delta R = \frac{X^i x^i}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0}\right), \quad (45)$$

получаем

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}, x^0 - R) = & \tau(\mathbf{x}, x^0 - R_0) + \partial_0 \tau(\mathbf{x}, x^0 - R_0) \left(\frac{X^i x^i}{R_0} \right) + \\ & + \frac{\partial_0^2 \tau(\mathbf{x}, x^0 - R_0)}{2!} \left(\frac{X^i X^j x^i x^j}{R_0^2} \right) + \dots + O\left(\frac{1}{R_0}\right), \end{aligned} \quad (46)$$

где многоточие символизирует опущенные члены порядка R_0^0 , содержащиеся в остатке бесконечного ряда (44). Записывая теперь разложение первого порядка для $1/|\mathbf{X} - \mathbf{x}|$ в точке $\mathbf{X}$,

$$\frac{1}{|\mathbf{X} - \mathbf{x}|} = \frac{1}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right),$$

и интегрируя, получаем ввиду (46) разложение U с точностью до $1/R_0$:

$$\frac{U(\mathbf{X}, T)}{G} = \frac{M}{R_0} + \frac{X^i \dot{d}_i}{cR_0^2} + \frac{X^i X^j}{2c^2 R_0^3} \ddot{J}_{ij} + \dots + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right), \quad (47)$$

где точка над символом означает производную по T , многоточие символизирует опущенные члены порядка $1/R_0$, возникающие из производных по времени порядка ≥ 3 в (44), и использованы обозначения

$$M \equiv \int \tau dV, \quad d_i(\mathbf{X}, T) \equiv \int x^i \tau(\mathbf{x}, cT - |\mathbf{X}|) dV(\mathbf{x}), \quad (48)$$

$$J_{ij}(\mathbf{X}, T) \equiv \int x^i x^j \tau(\mathbf{x}, cT - |\mathbf{X}|) dV(\mathbf{x}). \quad (49)$$

4.2.2. Предельное значение потока. Дифференцируя по пространственным переменным, находим из определения (48)

$$\frac{\partial d_i}{\partial X^k} = \frac{-X^k}{cR_0} \dot{d}_i,$$

а также аналогичное выражение для J_{ij} . Поэтому ввиду (47) получаем

$$\frac{\partial_T U \partial_k U}{G^2} = \left[\frac{X^i \ddot{d}_i}{cR_0^2} + \frac{X^i X^j}{2c^2 R_0^3} \dot{J}_{ij} \right] \left[-\frac{X^l X^k \ddot{d}_l}{c^2 R_0^3} - \frac{X^l X^m X^k}{2c^3 R_0^4} \dot{J}_{lm} \right] + O\left(\frac{1}{R_0^3}\right). \quad (50)$$

(В силу (40) имеем $dM/dT = 0$.) Кроме того, имеем

$$\ddot{d}_i = 0. \quad (51)$$

Действительно, поскольку в определении (48) запаздывание равномерно, это утверждение является стандартным точным следствием уравнений (40) и (41) для сплошной среды с плотностью $\tau \equiv \sigma_0$, движущейся со скоростью $c\mathbf{u}_0$ (поле ускорений этой среды равно нулю ввиду (41)). С другой стороны, в п. 4.3 будет рассмотрена та же физическая система в *ньютоновском* приближении, когда τ в определении (48) приравнивается к ПН-плотности массы покоя нулевого порядка (что согласуется с (37) до тех пор, пока реальная скорость $\mathbf{u}$ пренебрежима по сравнению с c). Но ввиду сохранения полного импульса изолированной ньютоновской системы в этом приближении также верно соотношение (51).

Таким образом, дипольный член фактически отсутствует. Из (42), (50) и (51) следует, что

$$-4\pi G \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \Phi_0 = \frac{-G^2}{4c^5} \int (\dot{J}_{ij} n^i n^j)^2 d\omega, \quad (52)$$

где $d\omega$ – элемент телесного угла и $n^i \equiv X^i/R_0$. (Отметим, что тензор $\dot{\mathbf{J}}$ постоянен на сфере $|\mathbf{X}| = R_0$.) Из формулы интегрирования $n^i n^j n^k n^l$ ([22], формула (90.20)) вытекает, что

$$(\Phi_0)_{\text{lim}} = \frac{G}{60c^5} (2 \text{tr } \dot{\mathbf{J}}^2 + \text{tr}^2 \dot{\mathbf{J}}). \quad (53)$$

4.3. Коэффициенты Петерса–Мэтьюса двойной системы. Потери энергии $\dot{E} = -(\Phi_0)_{\text{lim}}$ представляют собой главную часть скорости изменения полной энергии нашей изолированной слабо гравитирующей системы, происходящего из-за испускания гравитационных волн. Как уже неоднократно отмечалось, эту систему возможно непротиворечивым образом рассматривать как в рамках ПМ-приближения, так и в рамках ПН-приближения. Более общее ПМ-приближение позволило нам вычислить потери энергии, и теперь мы воспользуемся ОПН-приближением (ньютоновским), чтобы выяснить, как потери энергии влияют на относительное движение в первом приближении. Такой способ действий основан на следующих допущениях: 1) энергия системы в ОПН-приближении (ньютоновская энергия, являющаяся точной константой в рамках ОПН-приближения) в действительности изменяется так же, как и точная энергия системы; 2) последнее изменение хорошо аппроксимируется с помощью ОПМ-вычислений⁶⁾. Рассмотрим подробнее двойную систему, состоящую из двух массивных тел, находящихся настолько далеко друг от друга, что приливные взаимодействия между ними пренебрежимо малы и каждое тело движется по заданной траектории. Предположим далее, что потери энергии не влияют на собственное вращение каждого тела, а влияют лишь на относительное движение двух тел, которое в этом случае можно анализировать в рамках ньютоновской задачи двух тел для двух точечных масс m_1 и m_2 , расположенных в точках $\mathbf{x}_1(T)$ и $\mathbf{x}_2(T)$. Однако так как величина $\dot{E}$ вычислялась в выделенной системе отсчета E , то указанная ньютоновская задача также формулируется в этой системе отсчета (которая на самом деле является инерционной системой отсчета для ОПН-приближения теории). Полагая

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}}, \quad (54)$$

имеем

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{k\mathbf{x}}{r^3}, \quad k \equiv G(m_1 + m_2), \quad r \equiv |\mathbf{x}|. \quad (55)$$

Тогда квадрупольный тензор имеет вид

$$\mathbf{J} = m_1 \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_2. \quad (56)$$

Вводя вектор центра масс $\mathbf{a}(T)$, удовлетворяющий соотношению $m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 = M \mathbf{a}$, где $M \equiv m_1 + m_2$, получаем

$$\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{J}} + M \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{J}} \equiv m_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) + m_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}). \quad (57)$$

⁶⁾ Отметим, что те же допущения следует сделать при применении квадрупольной формулы ОТО и что предположение 1 может показаться сильным. Априори можно было бы ожидать, что потери энергии в ОПМ-приближении влияют также и на члены высшего порядка (возможно, *только* на члены высшего порядка!) в ПН-энергии. Разумеется, ньютоновская энергия велика по сравнению с ПН-поправками к ней. Предположение 1 справедливо, если то же верно для соответствующих *скоростей изменения*, что должно выполняться, когда ПН-разложения однородны по времени.

Так как система изолирована, то скорость $\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{a}}$ постоянна. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{J}} = \ddot{\mathbf{J}}. \quad (58)$$

Из (54) находим, что

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mu \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (59)$$

Трижды дифференцируя (59) по времени, находим ввиду (55) и (58), что

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{2k\mu}{r^2} [3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{n})], \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad (60)$$

и, следовательно,

$$\text{tr } \dot{\mathbf{J}} = -\frac{2k\mu}{r^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{tr } \dot{\mathbf{J}}^2 = \frac{4k^2\mu^2}{r^4} [8\mathbf{u}^2 - 7(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2]. \quad (61)$$

Воспользовавшись (53), окончательно получаем

$$\dot{E} = -(\Phi_0)_{\text{lim}} = -\frac{8}{15} \frac{G}{c^5} \frac{k^2\mu^2}{r^4} \left[2\mathbf{u}^2 - \frac{3}{4}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 \right], \quad (62)$$

т.е. так называемые коэффициенты Петерса–Мэтьюса (см., например, [16], формула (10.84)) имеют вид

$$k_1 = 2, \quad k_2 = \frac{3}{4}, \quad k_{\text{dipole}} = 0. \quad (63)$$

В формулах (53) и (62) отсутствует часто встречающееся в литературе усреднение по орбите двойной системы. Если исходить из “квадрупольной формулы ОТО” (которая для ОТО в гармонических координатах и для РТГ эквивалентна нашей формуле (53); ср. формулу (110,16) в [13] и формулу (15.71) в [11], где в действительности нет усреднения по времени)

$$\dot{E} = -\frac{G}{45c^5} \text{tr} \left(\ddot{\mathbf{D}}^2 \right) = -\frac{G}{5c^5} \left(\text{tr } \dot{\mathbf{J}}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}^2 \dot{\mathbf{J}} \right), \quad \mathbf{D} \equiv 3 \left[\mathbf{J} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{J}) \mathbf{I} \right], \quad (64)$$

то применяя (61), приходим к соотношению

$$\dot{E} = -\frac{8}{15} \frac{G}{c^5} \frac{k^2\mu^2}{r^4} [12\mathbf{u}^2 - 11(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2], \quad (65)$$

в действительности совпадающему с формулой Петерса–Мэтьюса в ОТО в гармонических координатах [16] и в РТГ [11] без какого-либо усреднения по времени (в отличие от формулы (10.80) в [16]). Усреднение по времени может показаться физически оправданным, так как можно ожидать, что временной период гравитационных волн имеет тот же порядок, что и орбитальный период. Но, как было упомянуто в начале этого пункта, на самом деле представляется разумным допустить, что скорость радиационных потерь энергии равна скорости убывания ньютоновской энергии. Если допустить это равенство, то формула Петерса–Мэтьюса получается без какого-либо усреднения по времени.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы дали практически замкнутое изложение *скалярной теории эфира*: формулы (2) для гравитационного ускорения, (3) и (4) для метрики и (5) для скалярного поля можно принять в качестве аксиом. Была детализирована ее динамика (формулы (15) для пробной частицы и (20) для сплошной среды). Следует отметить, что эта динамика не зависит от предположений о виде метрики. Детальная мотивация теории, а также ее краткое изложение приведены в работах [12] и [8].

Предсказания данной скалярной теории для световых лучей совпадают со стандартными предсказаниями, получающимися в ОТО с помощью метрики Шварцшильда. Причина этого заключается в том, что теория предсказывает шварцшильдовскую метрику (формула (6)), а эффекты выделенной системы отсчета не играют никакой роли в 1ПН-приближении *для фотонов*. То обстоятельство, что эта центральная метрика ОТО встречается также и в скалярной теории, в свою очередь, связано с наличием в ней выделенной системы отсчета, что позволяет постулировать гравитационное растяжение времени и сокращение длин, не налагая требования пространственно-временной ковариантности.

Для исследования гравитационного излучения была введена “асимптотическая” форма ПМ-приближения, основанная на явно заданном семействе задач с начальными условиями для системы идеальных жидкостей (формулы (36)). По-видимому, этот момент является новым. Мы не доказали ни существование решений, ни истинно асимптотический характер разложений, но нам кажется вероятным, что и то и другое могло бы быть доказано (в подходящих функциональных пространствах). Это подтверждает важная математическая работа [23], посвященная ОТО (где уравнения для гравитационного поля гораздо сложнее), но в ней рассматриваются лишь *вакуумные* уравнения Эйнштейна. Так же как и “асимптотическая” ПН-схема [20], предложенная ПМ-схема позволяет при помощи замены единиц взять $1/c^2$ в качестве малого параметра; при этом можно считать, что (практически) все поля имеют нулевой порядок, но теперь *все* поля зависят от малого параметра и, следовательно, должны участвовать в разложении. Различие между ПН- и ПМ-схемами заключается в том, что в последней временная переменная равна $x^0 = cT$, а не T , а скорость есть лишь $O(c)$. Последнее верно после замены единиц и в асимптотическом смысле (т.е. для вспомогательного однопараметрического семейства гравитационных систем); с физической точки зрения это означает, что поле скоростей *может* быть сопоставимым с c , но не обязательно *должно* быть таким. Поэтому ПМ-схема является *более общей*, чем соответствующая ПН-схема. По этой причине скорость изменения энергии, вычисленная в 0ПМ-приближении, может быть использована при исследовании временной эволюции системы, рассматриваемой в рамках ПН-приближения. Таким образом, представляется, что при изучении первого приближения “эффектов торможения излучением” в рамках данного подхода нет необходимости полностью анализировать релятивистскую проблему двух тел вплоть до порядка $1/c^5$ или выше. Такого рода полный анализ был произведен в ОТО (см. работу [24] и приведенные там ссылки), но он очень сложен.

С помощью ПМ-приближения было показано, что в этой скалярной теории с выделенной системой отсчета имеется поток гравитационной энергии, исходящей из изолированной слабо гравитирующей системы и уходящей на бесконечность, что этот предельный поток положителен (таким образом, система *теряет* энергию; см. (53)) и что он содержит лишь члены начиная с квадрупольного, а монопольный и дипольный члены равны нулю. Приравнивание этих потерь энергии к скорости изменения энергии в ньютоновском приближении дает формулу Петерса–Мэтьюса с правильно упорядоченными положительными коэффициентами, которая снова не содержит дипольного члена (формула (62)).

Поскольку эти коэффициенты отличаются от соответствующих коэффициентов в ОТО и РТГ, значение для потерь энергии, получающееся при применении формулы (62), отличается (хотя и имеет тот же порядок величины) от значения, получающегося при определении параметров системы двух тел из согласования [25] импульсных данных с “временной моделью”, основанной на ОТО. Однако для временной модели существенную роль играет лишь один тип входных данных, а именно список временных интервалов между последовательными импульсами, полученными от пульсара (*импульсные данные*). Поэтому если теория изменяется, то после согласования импульсных данных с временной моделью, основанной на новой теории, получатся новые значения и для параметров системы двух тел, например для эксцентриситета и масс двух тел. Поэтому нам представляется правдоподобным, что можно получить прекрасное согласование импульсных данных двойных пульсаров, построив временную модель, основанную исключительно на данной теории, тем же способом, как эти данные согласовали с ОТО [25]. На данный момент можно лишь утверждать, что эта теория предсказывает потери энергии того же порядка, что и ОТО, что согласуется с наблюдениями. Как подчеркивает Уилл [16], большинство альтернативных теорий не предсказывают для скорости изменения энергии величину того же порядка, что и ОТО, а нередко они даже предсказывают неправильный знак. Например, такова ситуация в биметрической теории Розена [26], которая выглядит гораздо более близкой к ОТО, чем настоящая скалярная теория.

Благодарности. Я благодарен рецензенту за предложение вычислить коэффициенты Петерса–Мэтьюса и за замечания, касающиеся результата, в частности, за вычисление, показывающее, что в случае двойного пульсара PSR 1913+16 потери энергии, предсказываемые скалярной теорией, оказываются примерно в шесть раз меньше, чем в ОТО, если остальные параметры системы определяются из согласования импульсных данных с основанной на ОТО временной моделью.

Список литературы

- [1] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. М.: Мир, 1977.
- [2] S. Carlip. Phys. Lett. A. 2000. V. 267. P. 81–87; gr-qc/9909087.
- [3] M. Arminjon. Rev. Roumaine Sci. Tech. Ser. Méc. Appl. 1997. V. 42. P. 27–57; <http://geo.hmg.inpg.fr/arminjon/publist.html#A18>.
- [4] M. Arminjon. Arch. Mech. 1996. V. 48. P. 25–52; <http://geo.hmg.inpg.fr/arminjon/publist.html#A15>.

- [5] *M. Arminjon*. An. Univ. Bucuresti Fizica. 1998. V. 47. P. 3–21; physics/9911025.
- [6] *M. Arminjon*. Rev. Roumaine Sci. Tech. Ser. Méc. Appl. 1998. V. 43. P. 135–153; gr-qc/9912041.
- [7] *L. Euler*. Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la matière. Von der Schwere und den Kraefte so auf die himmlischen Koepler wirken. In: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Tertia, Pars Prima. Leipzig und Bern: B. G. Teubner, 1911. P. 3–15; P. 149–156.
- [8] *M. Arminjon*. Remarks on the mathematical origin of wave mechanics and consequences for a quantum mechanics in a gravitational field. In: 6th Intern. Conf. “Physical Interpretations of Relativity Theory” (London, September 11–14, 1998), Supplementary Papers. Ed. M. C. Duffy. London: British Society for the Philosophy of Science, 1998. P. 1–17; gr-qc/0203104.
- [9] *C. Cattaneo*. Nuovo Cimento. 1958. V. 10. P. 318–337.
- [10] *А. А. Лозунов, Ю. М. Лоскутов, М. А. Мествришвили*. УФН. 1988. Т. 155. № 3. С. 369–396.
- [11] *А. А. Лозунов, М. А. Мествришвили*. Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [12] *M. Arminjon*. Phys. Essays. 2001. V. 14. P. 10–32; gr-qc/9911057.
- [13] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Теория поля. М.: Наука, 1967.
- [14] *M. Arminjon*. Arch. Mech. 1996. V. 48. P. 551–576; <http://geo.hmg.inpg.fr/arminjon/publist.html#A16>.
- [15] *С. Вейнберг*. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
- [16] *К. Уилл*. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [17] *M. Arminjon*. Equations of motion of the mass centers in a scalar theory of gravitation: Expansion in the separation parameter. Romanian J. Phys. (to appear); gr-qc/0202029.
- [18] *M. Arminjon*. Int. J. Mod. Phys. A. 2002. V. 17. P. 4203–4208; gr-qc/0205105.
- [19] *T. Futamase, B. F. Schutz*. Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2363–2372.
- [20] *M. Arminjon*. Romanian J. Phys. 2000. V. 45. P. 389–414; gr-qc/0003066.
- [21] *H. Stephani*. General Relativity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.
- [22] *В. А. Фок*. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматлит, 1961.
- [23] *T. Damour, B. Schmidt*. J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 2441–2453.
- [24] *T. Damour*. The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity. In: Three Hundred Years of Gravitation. Eds. S. W. Hawking, W. Israel. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 128–198.
- [25] *J. H. Taylor, J. M. Weisberg*. Astrophys. J. 1982. V. 253. P. 908–920.
- [26] *N. Rosen*. Ann. Phys. 1974. V. 84. P. 455–473.

Поступила в редакцию 25.X.2002 г.,
после доработки 29.VII.2003 г.