Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Ярунин, Низкотемпературная квазиклассика для квантовых макроскопических эффектов, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 2, 308–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:00:10

© 1999 г.

В. С. Ярунин*

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ КВАЗИКЛАССИКА ДЛЯ КВАНТОВЫХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

Рассматриваются квантовые системы с двумя масштабами времени для “быстрых” (квантовых) и “медленных” (квазиклассических) степеней свободы с частотами колебаний Ω и $\omega \ll \Omega$, соответственно. Статистическая сумма представляется в виде интеграла по траекториям с использованием как обычных когерентных состояний для бозонов и фермионов, так и их обобщения для случая нетривиальной алгебры наблюдаемых. Вычисление интеграла по “быстрым” траекториям приводит к нелокальному (по мнимому времени) эффективному действию для “медленных” (квазиклассических) переменных, которое принимает локальную форму в низкотемпературном приближении. Это низкотемпературное адиабатическое приближение выражается неравенством $\beta\Omega \gg 1 \gg \omega/\Omega$ и служит основой для квазиклассического описания в представлении интегралов по траекториям. В рамках этой концепции рассмотрены три сложные системы физики конденсированных сред так, что “медленные” и “быстрые” переменные представлены локализованными и зонными электронами в решетчатой модели Андерсона, бозонами конденсата и “надконденсата” в модели Боголюбова (с нарушенной трансляционной симметрией) и длинноволновыми фононами и электронами в больших молекулах при электрон-фононных оптических переходах. Соответствующие макроскопические квантовые явления представляют собой кондо-реорганизацию спектра коррелированных электронов, бозе-конденсацию в неоднородной среде и хаотизацию вибронного спектра молекул.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод интегралов по траекториям служит удобным средством для построения квазиклассического приближения в квантовой механике и статистической физике [1]. Он описывает высоковозбужденные квантово-механические, а также высокотемпературные квантово-статистические состояния. Помимо этого, можно построить низкотемпературное квазиклассическое приближение для сложных систем физики конденсированных сред, обнаруживающих макроскопические квантовые эффекты при низких темпера-

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
E-mail: yarunin@thsun1.jinr.dubna.su

турах. Целью данной работы является обоснование в рамках адиабатической картины в “температурном времени” подхода, основанного на разделении “медленных” и “быстрых” степеней свободы системы с частотами ω и $\Omega \gg \omega$, соответственно. В терминах квазиклассической нелинейной двухмасштабной по времени динамики такое разделение удобно сформулировать для интегралов по траекториям в когерентном [2] представлении. Усреднение по “быстрым” переменным с энергиями возбуждений (частотами) Ω приводит к движению “медленных” переменных, описываемому эффективным действием с запаздыванием по времени. Локальное по времени описание этого движения справедливо в случае больших Ω , так что условие малых температур $\beta\Omega \gg 1$ обеспечивает “медленное” адиабатическое квазиклассическое движение, свойственное квантовым макроскопическим явлениям. Непертурбативный анализ “медленной” подсистемы является составным элементом адиабатического приближения.

В работе предложенный подход применен к трем физическим примерам. Эти примеры, рассмотренные в разделах 3, 4 и 5, касаются электронной проводимости, бозе-конденсации атомов и электрон-фоонного взаимодействия в больших молекулах.

Общая схема низкотемпературного адиабатического приближения изложена в разделе 2. Она основана на применении непертурбативных функциональных методов вычисления интегралов по траекториям в представлении когерентных состояний [3, 4]. Показано, что запаздывающее (нелокальное по времени) действие для “медленных” переменных путем соответствующего квазиклассического анализа приближенно может быть приведено к локальной форме.

Эффект Кондо для магнитной восприимчивости, обусловленный рассеянием зонных электронов на локализованных, наблюдался в редкоземельных материалах [5]. Периодическая модель Андерсона для этих двух типов электронов использована в разделе 3 при описании этого эффекта. В пункте 3.1 для “медленных” локализованных электронов использовано $SU(2|1)$ -когерентное представление хаббардовских переменных. Адиабатическое рассмотрение локализованных электронов как “медленных” переменных для статистической суммы, представленной интегралом по траекториям, обнаруживает в системе температурную аномалию кондо-типа (пункт 3.2).

Идея Боголюбова [6] о s -числовом описании бозе-эйнштейновской конденсации обсуждается в адиабатическом приближении в духе двухмасштабной по импульсам динамики бозонов [7]. В пункте 4.2 рассмотрение обобщено для систем с нарушенной трансляционной инвариантностью. Представлено низкотемпературное приближение для

“медленных” частиц конденсата и “быстрых” надконденсатных частиц. В пункте 4.3 это приближение применено к сверхтекучему жидкому ^4He в пористых стеклах при сравнении его с аналогичным эффектом (пункт 4.1) для сплошной среды. Кроме того, в пункте 4.3 рассматривается зависимость бозе-конденсации идеального газа от типа атомной ловушки и обсуждается низкотемпературный макроскопический квантовый эффект для плотности надконденсатных состояний в ней.

При электронных оптических переходах в больших молекулах значительная часть

энергии возбуждений передается фононной подсистеме, движение длинноволновой части которой, как показано в разделе 5, имеет квазиклассический характер. Электрон-фононное взаимодействие (пункт 5.1) и необратимая нелинейная динамика фононов (пункт 5.2) приводят к экспериментально наблюдаемому размытию оптического спектра.

В заключении приводятся краткий обзор квазиклассических идей в методе интеграла по траекториям и сопутствующие комментарии.

2. ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ “МЕДЛЕННЫХ” ПЕРЕМЕННЫХ

Обратимся к сложным квантовым системам, содержащим “медленные” (F) и “быстрые” (b) переменные. Основные свойства рассматриваемых систем могут быть описаны гамильтонианом

$$H = \sum_r \omega_r F_r^0 + \sum_r \Omega_r b_r^+ b_r + \sum_r g_r [(b_r^+)^m F_r^- + F_r^+ (b_r)^m], \quad \omega \ll \Omega. \quad (1)$$

Эта модель охватывает три типа систем при значениях m и F , выбранных следующим образом:

- 1) периодическая модель Андерсона для локализованных (F) и зонных (b) электронов; r – индекс узла решетки, $m = 1$, b – фермионы, F – хаббардовские переменные;
- 2) взаимодействие богوليубовского типа между классическими ($F = \text{const}$) частицами и бозонами (b); r – индекс квантового состояния, $m = 2$;
- 3) электрон (b)-фононное (F) взаимодействие в молекуле; r – номер атома, $m = 2$, F – бозоны.

Эти системы будут рассмотрены в разделах 3, 4 и 5, но предварительно основная идея будет пояснена в общей форме для (1).

Мы вычисляем статистическую сумму

$$Q = \text{Tr} \exp(-\beta H) = \int D\mu_F D\mu_b e^{S(0, \beta)} \quad (2)$$

системы S с действием

$$S(0, \beta) = \int_0^\beta L d\tau, \quad L = L_F + L_b + L_{F,b}, \quad L_b = -b^* K_\Omega b, \quad K_\Omega = \frac{d}{dt} + \Omega,$$

r -столбцовые обозначения опущены. Среднее по переменным b , b^* может быть вычислено с периодическими (бозоны, $\kappa = 1$) и антипериодическими (фермионы, $\kappa = -1$) граничными значениями, так что эффективное действие $S_{\text{ef}}(F)$ определяется формулами

$$\begin{aligned} Q &= \int D\mu_F e^{S_{\text{ef}}}, \quad e^{S_{\text{ef}}} = \int D\mu_b e^{S(0, \beta)}, \\ S_{\text{ef}} &= S_F - \kappa \ln(\text{Det } K_\Omega) + \int_0^\beta F^* K_\Omega^{-1} F d\tau, \\ K_\Omega^{-1} &= \int_0^\beta dt' e^{\Omega(t'-t)} [\theta(t-t') + (\kappa e^{\Omega\beta} - 1)^{-1}], \quad \text{Tr } K_\Omega^{-1} = \beta(\kappa e^{\beta\Omega} - 1)^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

для $m = 1$. Отношение детерминантов вычисляется по формуле [3]

$$\left(\frac{\text{Det } K_\Omega}{\text{Det } K_{\Omega_0}} \right)^\kappa = \exp \int_{\Omega_0}^\Omega \text{Tr } K_x^{-1} dx = \frac{1 - \kappa e^{-\beta\Omega}}{1 - \kappa e^{-\beta\Omega_0}}.$$

Что касается случая $m = 2$, то предметом рассмотрения будут парные корреляции бозонов $b^2 \rightarrow b_k b_{-k}$, так что

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\beta (b_k^* b_{-k}) M \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^* \end{pmatrix} dt, \quad D\mu_b = Db_k^* Db_k$$

и формула для отношения детерминантов имеет вид [4]

$$\left(\frac{\text{Det } M_0}{\text{Det } M} \right)^\kappa = \exp \left[- \int_0^g \text{Tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x} \right) dx \right], \quad M = \begin{pmatrix} K_\Omega & -gF \\ -gF^* & -K_{-\Omega} \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения для траекторий приводит к оператору M^{-1} :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^* \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} = \\ &= \exp \left(- \int_0^t m d\tau \right) \left[\int_0^t \exp \left(\int_0^\tau m d\tau' \right) \begin{pmatrix} -A \\ A^* \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} c \\ c^* \end{pmatrix} \right], \\ m &= \begin{pmatrix} \Omega & gF \\ -gF^* & -\Omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оба уравнения (3) и (4) содержат нелокальные (по мнимому времени) запаздывающие члены в S_{ef} с операторами K^{-1} и M^{-1} , обусловленными дифференцированием $M \sim K \sim d/dt$ траекторий F . Если предположить “медленность” траекторий F , то имеет место спектральное представление

$$(K_\Omega^{-1})_n = \frac{1}{-i\Omega_n + \Omega} \simeq \frac{1}{\Omega}, \quad \Omega_n = \frac{\pi}{\beta} \begin{cases} \frac{2n}{\beta}, & \text{если } \kappa = 1, \\ \frac{2n+1}{\beta}, & \text{если } \kappa = -1 \end{cases}$$

(κ – индекс статистики переменной F), обусловленное неравенствами

$$\beta\Omega \gg 1 \gg \frac{\omega}{\Omega}, \quad (5)$$

требующими, чтобы величина $dF/dt \simeq \omega$ была пренебрежимо мала. Таким образом, выполняются приближения

$$\int_0^\beta F^* K_\Omega^{-1} F d\tau \simeq \frac{|F|^2 \beta}{\Omega}, \quad \begin{pmatrix} c \\ c^* \end{pmatrix} \simeq (\kappa e^{\beta m} - 1)^{-1} \int_0^\beta e^{m\tau} \begin{pmatrix} -A \\ A^* \end{pmatrix} d\tau \quad (6)$$

в формулах (3), (4), где для b заданы периодические (антипериодические) граничные условия. После несложных преобразований мы получаем окончательный результат для $m = 2$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\text{Det } M_0}{\text{Det } M} &= \frac{\text{sh}^2(\beta\Omega/2)}{\text{sh}^2(\beta E/2)}, \quad E = \sqrt{\Omega^2 - (g|F|)^2}, \quad \frac{1}{\text{Det } M} = \frac{\exp(\Omega\beta)}{4 \text{sh}^2(\beta E/2)}, \quad \kappa = 1, \\ \frac{\text{Det } M_0}{\text{Det } M} &= \frac{1 + \text{ch}(\beta\Omega)}{\text{ch}(\beta\Omega) + \text{ch}(\beta g|F|)}, \quad \text{Det } M = 2e^{-\beta\Omega} [\text{ch}(\beta\Omega) + \text{ch}(\beta g|F|)], \quad \kappa = -1, \\ S_{\text{ef}} &= S_a - \kappa \ln(\text{Det } M). \end{aligned} \quad (7)$$

Условия (5) выражают адиабатическое приближение для переменных статистики Гиббса во “мнимом времени”. Эти условия позволяют устранить запаздывание в эффективном действии S_{ef} и приводят к гамильтоновой теории с энергией $H_{\text{ef}}(F)$,

$$Q = \int D\mu_F e^{S_{\text{ef}}} \simeq \text{Tr } e^{-\beta H_{\text{ef}}}.$$

Правая часть неравенства (5) выражает адиабатическое приближение, левая часть – квазиклассическое приближение, обусловленное как низкой температурой, так и малой массой m в частоте $\Omega = \hbar/2m$ “быстрых” частиц (раздел 3), ненулевым импульсом спектра Боголюбова E_k (раздел 4) и малой частотой ω деформационных молекулярных фононов (раздел 5). Квазиклассическая сущность приближения (5) и последней формулы основана на большей близости “медленных” переменных к постоянным по сравнению с “быстрыми” траекториями, представляющими квантовые степени свободы. Заметим еще раз, что адиабатическое приближение (5) есть также низкотемпературное приближение, и это обстоятельство можно подчеркнуть, написав неравенство (5) в виде $\Omega^2 \gg \omega T$.

3. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АНДЕРСОНА

Двухмасштабная во времени динамика в периодической модели Андерсона образуется двумя типами электронов: локализованными электронами (описываемыми хаббардовскими X -операторами) и зонными электронами (описываемыми фермионными операторами b, b^+) в гамильтониане

$$H = \sum_{r\sigma} (E - \mu) X_r^{\sigma\sigma} - \mu \sum_{i\sigma} n_{i\sigma}^b + g \sum_{r\sigma} (b_{r\sigma}^+ X_r^{0\sigma} + X_r^{\sigma 0} b_{r\sigma}) - t \sum_{\langle rs \rangle \sigma} b_{r\sigma}^+ b_{s\sigma}. \quad (8)$$

Здесь t – константа перескока локализованных электронов, g – взаимодействие между ними и зонными электронами, $E < 0$ – уровень энергии локализованных электронов. Операторы Хаббарда определены следующим образом:

$$X^{\sigma 0} = |\sigma\rangle\langle 0|, \quad X^{\sigma\sigma'} = |\sigma\rangle\langle\sigma'|,$$

где $|0\rangle$ означает свободный узел (дырку) и $|\sigma\rangle$ есть состояние, занятое электроном со спином σ . Условия $\sigma = \pm, \sigma \neq 2$ в гамильтониане (8) подразумевают одночастичное заполнение узлов решетки, что соответствует большим ($U \gg t$) хаббардовским энергиям U , опущенным в формуле (8).

3.1. $SU(2|1)$ -представление для хаббардовских переменных. Алгебра X -операторов однозначно идентифицируется с представлением $su(2|1)$ -супералгебры,

$$Q_3 = \frac{1}{2}(X^{++} - X^{--}), \quad Q_+ = X^{+-}, \quad Q_- = X^{-+}, \quad B = \frac{1}{2}(X^{++} + X^{--}) + X^{00},$$

$$V_+ = X^{0-}, \quad V_- = -X^{0+}, \quad W_+ = X^{+0}, \quad W_- = X^{-0}$$

с четными (B, Q_3, Q_+, Q_-) и нечетными (W_+, W_-, V_+, V_-) генераторами [8, 9]. Следуя работам [10, 11], мы используем суперсимметричное $SU(2|1)$ -представление хаббардовских переменных в интеграле по траекториям для статистической суммы Q и обычные грассмановы образующие $b_{r\sigma}^*$, $b_{r\sigma}$ для зонных электронов:

$$Q = \text{Tr} \exp(-\beta H) =$$

$$= \int \prod_{r\sigma} d\mu_r db_{r\sigma}^* db_{r\sigma} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_r \int_0^\beta \frac{\dot{z}_r^* z_r - z_r^* \dot{z}_r + \dot{\xi}_r^* \xi_r - \xi_r^* \dot{\xi}_r}{1 + |z_r|^2 + \xi_r^* \xi_r} dt + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r\sigma} \int_0^\beta (\dot{b}_{r\sigma}^* b_{r\sigma} - b_{r\sigma}^* \dot{b}_{r\sigma}) dt - \sum_r \int_0^\beta h(z_r^*, \xi_r^*, z_r, \xi_r) dt +$$

$$\left. + \int_0^\beta \left(t \sum_{\langle rs \rangle \sigma} b_{r\sigma}^* b_{s\sigma} + \mu \sum_{r\sigma} b_{r\sigma}^* b_{r\sigma} \right) dt \right], \quad (9)$$

$$h(z_r^*, \xi_r^*, z_r, \xi_r) = \frac{\langle z_r, \xi_r | h | z_r, \xi_r \rangle}{\langle z_r, \xi_r | z_r, \xi_r \rangle} =$$

$$= \frac{(E - \mu)(1 + |z_r|^2)}{1 + |z_r|^2 + \xi_r^* \xi_r} + g \frac{b_{i\uparrow}^* \xi_r^* + z_{r\downarrow}^* \xi_r z_r + \xi_r b_{i\uparrow} + z_r^* \xi_r b_{i\downarrow}}{1 + |z_r|^2 + \xi_r^* \xi_r}.$$

Суперкогерентные состояния $|z, \xi\rangle$ нумеруются координатами на сфере обобщенного фазового пространства z, ξ , соответствующего генераторам Q_- и V_- . $SU(2|1)$ -инвариантная мера интегрирования в (9) имеет вид

$$d\mu_r = \frac{dz_r^* dz_r}{2\pi i} \frac{d\xi_r^* d\xi_r}{1 + |z_r|^2 + \xi_r^* \xi_r}. \quad (10)$$

С помощью двух последовательных преобразований в (9) можно одновременно привести меру (10) и кинетический член $SU(2|1)$ к виду, соответствующему независимым спину $SU(2)$ и бесспиновому фермиону

$$z \rightarrow z \sqrt{1 + \xi^* \xi}, \quad \xi \rightarrow \xi \sqrt{1 + |z|^2},$$

$$d\mu_r \rightarrow \frac{dz_r^* dz_r d\xi_r^* d\xi_r}{2\pi i (1 + |z_r|^2)^2}, \quad S_{\text{kin}} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_r \frac{\dot{z}_r^* z_r - z_r^* \dot{z}_r}{1 + |z_r|^2} + \frac{1}{2} \sum_r (\dot{\xi}_r^* \xi_r - \xi_r^* \dot{\xi}_r). \quad (11)$$

Как видно из (11), грассмановы траектории ξ_r^* , ξ_r соответствуют бесспиновым переменным и удовлетворяют антипериодическим граничным условиям $\xi(0) = -\xi(\beta)$,

$\xi^*(0) = -\xi^*(\beta)$, в то время как комплексные траектории z_r^* , z_r с периодическими граничными условиями $z(0) = z(\beta)$, $z^*(0) = z^*(\beta)$ соответствуют спиновым переменным X -подсистемы. Таким образом, амплитуда d_σ d -электрона разложена по полям ξ и z , представляющим зарядовую и спиновую степени свободы, соответственно.

Интеграл по траекториям b гауссов, он вычисляется в явном виде по формуле (3). Функциональный детерминант второй вариации действия b -электрона не зависит от X -переменных. В результате мы получаем следующее эффективное действие для подсистемы локализованных X -электронов:

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}^X = & \frac{1}{2} \sum_r \int_0^\beta \frac{\dot{z}_r^* z_r - z_r^* \dot{z}_r}{1 + |z|^2} dt + \frac{1}{2} \sum_r \int_0^\beta (\dot{\xi}_r^* \xi_r - \xi_r^* \dot{\xi}_r) dt + \\ & + N(E - \mu) - (E - \mu) \sum_r \int_0^\beta \xi_r^* \xi_r dt + \\ & + g^2 \sum_{\langle rs \rangle} \int_0^\beta \int_0^\beta dt dt' \xi_r(t) \xi_s^*(t') G_{rs}(t - t') (z_r(t) | z_s(t')). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что последний член в эффективном действии (12) записан в виде $SU(2)$ -матричного элемента

$$(z_r(t) | z_s(t')) = \frac{1 + z_r^*(t) z_s(t')}{\sqrt{(1 + |z_r(t)|^2)(1 + |z_s(t')|^2)}}. \quad (13)$$

Функция Грина $G_{rs}(\tau - \tau')$ есть пропагатор b -электронов,

$$\begin{aligned} G_{rs}(\tau - \tau') = & \frac{1}{N\beta} \sum_{q,n} \frac{\exp[-i\omega_n(\tau - \tau') + iq(r - s)]}{i\omega_n + t_q - \mu}, \\ \omega_n = & \frac{2n+1}{\beta} \pi, \quad t_q = -t \sum_Z e^{iq\Delta_Z}, \end{aligned} \quad (14)$$

где Δ_Z – расстояние между узлами решетки, Z – число ближайших соседей для узла. Следует отметить, что эффективное действие (12) нелокально по времени, как и S_{ef} в формуле (3), так что никакое гамильтоново движение не может быть ассоциировано с действием (12).

3.2. Адиабатическое приближение для температурной аномалии Кондо. Обратимся к адиабатическому приближению (5) для системы (8). Из формулы (14) следует, что эффективное действие (12) принимает локальный вид

$$Q \simeq \text{Tr} \exp(-\beta H_{\text{ef}}^X),$$

если выполняется неравенство

$$|\beta(\Omega - \mu)| \gg 1, \quad (15)$$

где $\Omega = Zt$ – полуширина зоны проводимости. В этом случае в низкотемпературном приближении получаем

$$G \rightarrow \delta(\tau - \tau') \frac{1}{N} \sum_q \frac{\exp[iq(r-s)]}{t_q - \mu}$$

и последнее слагаемое в формуле (12) для эффективного действия S_{ef}^X принимает вид

$$\frac{g^2}{N} \sum_{\langle rs \rangle} \int_0^\beta dt \xi_r(t) \xi_s^*(t) \sum_q \frac{\exp[iq(r-s)]}{t_q - \mu} (z_r(t) | z_s(t)). \quad (16)$$

Статический вариант среднего поля для спиновых переменных в выражении (16) приводит к приближению $(z_r(t) | z_s(t)) \rightarrow 1$. В результате получается эффективный гамильтониан для X -электронов

$$H_{\text{ef}}^X = (E_{\text{ef}} - \mu) \sum_r d_r^+ d_r - \sum_{\langle rs \rangle} t_{rs}^{\text{ef}} d_r^+ d_s, \quad (17)$$

где d_i^+ , d_i – операторы рождения и уничтожения бесспиновых фермионов и

$$E_{\text{ef}} = E - \frac{g^2}{N} \sum_q \frac{1}{t_q - \mu}, \quad t_{ij}^{\text{ef}} = \frac{1}{N} \sum_q \frac{\exp[iq(r-s)]}{t_q - \mu}.$$

Неравенство (15) представляет собой левую часть неравенства (5), в то время как правая часть (5) в данном случае принимает вид

$$|E - \mu| \ll \Omega = Zt. \quad (18)$$

Последнее неравенство есть условие “медленности” X -электронов. Это означает, что X -уровень является мелким по сравнению с полушириной Ω зоны b -электронов. Неравенство (18) регулирует знак сдвига энергии δE X -электронов в зоне проводимости b -электронов. В низкотемпературном пределе сдвиг энергии δE в зоне проводимости b -электронов двумерного проводника с плотностью состояний $\rho_b(\epsilon) = (1/2\Omega)\theta(\Omega^2 - \epsilon^2)$ имеет вид

$$\delta E = -g^2 \int \frac{\rho_b}{\epsilon - \mu} d\epsilon, \quad \rho_b = \frac{1}{2\Omega}. \quad (19)$$

В рамках низкотемпературного адиабатического приближения и приближения среднего поля (17) для X -электрона ситуации с глубоким ($\Omega \ll |E|$) или мелким ($\Omega \gg |E|$) d -электронными уровнями приводят к различным случаям. Они соответствуют узкой или широкой зонам b -электронов с различными интервалами ϵ в интеграле (19). Таким образом, формула

$$\delta E = -\frac{g^2}{2\Omega} \left\{ \int_{-\Omega}^{\mu-T} + \int_{\mu+T}^{\Omega} \right\} \frac{d\epsilon}{\epsilon - \mu} = -\frac{g^2}{2\Omega} \ln \left| \frac{\Omega - \mu}{\Omega + \mu} \right| < 0 \quad (20)$$

имеет место при условиях $E > \mu$, $\Omega \ll |E|$, $T < |E|$ и электронном числе заполнения $N < 1$. Далее, адиабатическое приближение (15) для мелкого X -уровня приводит к формуле

$$\delta E = -\frac{g^2}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega-2T} \frac{d\epsilon}{\epsilon - \mu} \simeq -\frac{g^2}{2\Omega} \ln \left| \frac{2T}{\Omega + \mu} \right| > 0 \quad (21)$$

при условиях $|E| \ll \Omega$, $T < \Omega$, $N > 1$. Перестройка спектра происходит при “температуре Кондо”

$$T_k = \frac{\Omega + \mu}{2} \exp \left(\frac{E - \mu}{g^2 \rho_b} \right), \quad (22)$$

определяемой соотношением $E - \mu + \delta E = 0$.

Таким образом, мы показали, что суперкогерентное $SU(2|1)$ -представление хаббардовских операторов в интеграле по траекториям для статистической суммы периодической модели Андерсона (8) в пределе $U \rightarrow \infty$ приводит к разделению зарядовой и спиновой переменных для X -электронов. Эти переменные представлены траекториями z и ξ , соответствующими $SU(2)$ -спину и бесспиновому фермиону. Приближения низких температур и спинового среднего поля для такого представления удовлетворяют адиабатической аппроксимации (см. (15), (18))

$$\beta|\Omega - \mu| \gg 1 \gg \frac{|E - \mu|}{\Omega} \quad (23)$$

для X -электронов в статистической сумме системы (8) и приводят к эффективному гамильтониану (17). Сдвиг δE уровня X -электрона вычисляется усреднением по степеням свободы b -электронов. При этом возможны две разные ситуации для случаев глубокого ($\Omega \ll |E|$, $N < 1$) и мелкого ($\Omega \gg |E|$, $N > 1$) уровней X -электронов. Независимость величины δE (20) от температуры обнаружена в первом случае. Во втором случае δE имеет кондовский тип поведения по температуре $\delta E \sim \ln T$.

Известно [5], что кондовская температурная аномалия свидетельствует об изменении проводимости, связанном со свойством X -электронов становиться “тяжелыми” частицами, что сопровождается пиком X -электронной плотности ρ_x . Это было подтверждено нахождением [11] для системы (17) пика $\rho_x(y)$, $y = \beta|\mu - \Omega|$ в точке $y = 1.7$. “Тяжелые” электроны “медленной” X -подсистемы проявляют макроскопический эффект в модели (8) при условии (23), являющемся условием низкотемпературной квазиклассики в духе неравенств (5).

4. БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

Известная модель Боголюбова [6] была первой микроскопической теорией бозе-эйнштейновской конденсации неидеального газа. В ней использовались s -числовое описание конденсата ($k = 0$) и операторы стандартного пространства Фока для надконденсатных бозонов. Действие для системы бозонов со взаимодействием $G(r - r')$ между

ними в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\beta dt \left[\int dr \psi(r, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(r, t) - H(t) \right], \quad r = (x, y, z), \quad H = H_0 + h, \\ H_0 &= \int dr \left[\frac{1}{2m} (\nabla \psi^*(r, t) \nabla \psi(r, t)) + \psi^* U(r) \psi \right], \\ h &= \frac{1}{2} \int dr dr' G(r - r') \psi^*(r, t) \psi^*(r', t) \psi(r', t) \psi(r, t), \end{aligned}$$

где U – потенциал внешнего поля. Заметим, что s -сдвиг [12] амплитуды бозе-операторов

$$\psi^+(r, t) = B_0^* + B^+(r, t), \quad [\psi(r), \psi^+(r')] = \delta(r - r') \quad (24)$$

приводит к модели Боголюбова [6] с квадратичной операторной формой относительно операторов B , B^+ и с квадратичной c -числовой формой относительно переменных B_0 , B_0^* .

4.1. Низкотемпературное приближение и квазиклассика. Заметим, что две компоненты B_0 , B бозе-поля $\psi(r, t)$ можно рассматривать как переменные двух подсистем в смысле адиабатического приближения раздела 2. При этом правая часть неравенства (5) обеспечивается условием $\omega \sim d/dt \sim 0$ для “медленной” подсистемы конденсата, поскольку амплитуды B_0 , B_0^* постоянны. Левая часть (5) обусловлена низкотемпературным неравенством $\beta E_k \gg 1$, где E_k – боголюбовский спектр надконденсатных возбуждений, так что неравенство (5) принимает вид

$$\beta E_k \gg 1 \gg \frac{\omega}{E_k} \simeq 0. \quad (25)$$

Очевидно, что можно точно вычислить след в статистической сумме модели Боголюбова по надконденсатным переменным. В методе интеграла по траекториям это усреднение приводит к эффективному действию $S_{\text{ef}}(\rho)$ для плотности конденсата $\rho = |B_0|^2$. Ниже кратко будут представлены основные этапы этого рассмотрения.

Вариационные уравнения $\delta S_{\text{ef}} = 0$ как приближенные для квазиклассического параметра $\rho(T)$ в пределе $N, V \rightarrow \infty$ для сверхтекучего ^4He дают

$$\begin{aligned} R &= \rho + r, \quad \frac{\mu}{g_0} - 2r = \rho \left[1 - \frac{D(\rho, \mu)}{g_0} \right], \\ D &= \frac{c}{2} \int k^2 \text{ch} \left(\frac{\beta E_k}{4} \right) \frac{g_k^2}{E_k} dk > 0, \quad r = \frac{c}{2} \int k^2 \Phi dk, \\ \Phi &= \frac{\omega_k - \nu}{E_k} \text{ch} \left(\frac{\beta E_k}{4} \right) - 1, \end{aligned} \quad (26)$$

где R – полная плотность ^4He , r – надконденсатная плотность, μ – химический потенциал бозонов.

Эти уравнения были выведены и исследованы в работах [13–15] для жидкого ^4He в отсутствие ($U = 0$) внешнего поля при подходящем выборе межбозонного взаимодействия. Между теоретическим E_k и экспериментальными спектрами [16, 17] обнаруживается согласие.

Теплоемкость

$$C_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}, \quad F = -\frac{1}{\beta} S_{\text{ef}}$$

может быть вычислена аналитически [18] с использованием приближенных решений [15, 19] вариационного уравнения $\delta S_{\text{ef}} = 0$. Различия между низкотемпературными ($T < T_c$) и высокотемпературными ($T > T_c$) решениями вариационных уравнений обнаруживаются благодаря наличию [13–15, 18] “квазиклассического” интеграла движения

$$\frac{d}{dt} \left[B_0^* B_0 + \int B^+(r) B(r) dr \right] = 0$$

для системы $H = H_0 + h$. Согласие между теоретическими [18] и экспериментальными [20] значениями C_v удовлетворительное при $0 < T < 1.5K$ и $T > 2.3K$, но не в окрестности критической температуры T_c .

Масштаб энергии надконденсатных возбуждений E_k в ^4He виден из значения максимума спектра $E_k|_{\text{max}} \simeq 15K$ нейтронного рассеяния [16]. Это означает, что неравенству для параметра $y = \beta E_k > 4$ удовлетворяют все значения переменных, кроме высоких температур и малых импульсов $E_k < 4T$. Для безразмерного параметра y

$$\begin{aligned} 4 < y < y_0, \quad T > T_c, \\ y_0 < y < \infty, \quad T < T_c \end{aligned}$$

граничное значение y_0 найдено в работе [18] эмпирически при сравнении экспериментальных и теоретических значений C_v и равно 4.4.

Ввиду большого интереса к бозе-конденсации ^4He в пористых средах и парах щелочных металлов в магнитных ловушках мы в следующем пункте обратимся к приближению Боголюбова в системах с нарушенной трансляционной симметрией, которая при-
суща обоим упомянутым случаям.

4.2. Модель Боголюбова бозе-конденсации в трансляционно-неинвариантных системах. Проделаем c -сдвиг (24) амплитуд бозе-операторов

$$\begin{aligned} \psi^+(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n=0} b_n^+(t) u_n(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\sum_{n \neq 0} b_n^+(t) u_n(r) + b_0^* u_0(r) \right), \\ b_0 &= \sqrt{N_0} e^{i\alpha}, \quad n = (n_x, n_y, n_z), \quad \int dr u_n u_{n'} = \delta_{n, n'} \end{aligned}$$

с использованием трехмерных одночастичных собственных функций u_n , являющихся решениями уравнений для бозона

$$\left\{ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} [E_n - U(r)] \right\} u_n = 0 \quad (27)$$

с уровнями энергии E_n . В случае фурье-разложения $u_n \rightarrow \exp(ikr)$ вклад в боголюбовскую энергию можно классифицировать следующим образом:

а) для обычных членов ($k_1 + k_2 = k_3 + k_4$) –

$$G(r - r') B_0^* B_0 B_0^* B_0, \\ G(r - r') [B^*(r) B(r) B_0^* B_0 + B^*(r') B(r') B_0^* B_0 + \text{h.c.}] ;$$

б) для слагаемых с нарушенной градиентной инвариантностью ($k_1 + k_2 = k_3 + k_4$) –

$$G(r - r') [B^*(r) B^*(r') B_0 B_0 + B(r) B(r') B_0^* B_0^*] ;$$

в) в случае нарушения градиентной и трансляционной симметрий –

$$G(r, r') [B^*(r) B_0^* B_0 B_0 + B(r')^* B_0^* B_0 B_0 + \text{h.c.}] \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \langle k, 0 | G | 0, 0 \rangle, & k_1 + k_2 \neq k_3 + k_4, & G = G(r, r'), \\ 0, & k_1 + k_2 = k_3 + k_4, & G = G(r - r'), \end{cases} \quad (28)$$

после вычисления интегралов по r, r' .

В общем случае использование собственных функций u_n приводит к приближению боголюбовского вида со взаимодействием h_B между бозонами

$$S_B = \int_0^\beta (L_0 - H_0 - h_B) dt, \quad L_0 = \int dr B \frac{\partial B^*}{\partial t}, \quad h_B = \frac{1}{2} \int dr dr' \epsilon(t), \\ H_0 = \int dr \left[\frac{1}{2m} (\nabla \psi^* \nabla \psi) + U(r) \left(\frac{N_0}{V} u_0^2 + \sqrt{\frac{N_0}{V}} (B e^{-i\alpha} + B^* e^{i\alpha}) u_0 + B^* B \right) \right] = \\ = \frac{N_0 w_{00}}{V} + \frac{1}{V} \sum_{n, n' \neq 0} b_n^* b_{n'} w_{nn'} + \sqrt{\frac{N_0}{V}} \sum_{n \neq 0} (b_n e^{i\alpha} + b_n^* e^{-i\alpha}) w_{0n}, \\ w_{nn'} = \frac{1}{2m} \int \nabla u_n \nabla u_{n'} dr + \int U(r) u_n u_{n'} dr, \quad (29)$$

$$\epsilon(t) = G(r - r') \left\{ \frac{N_0^2}{V^2} u_0^2(r) u_0^2(r') + \frac{N_0^{3/2}}{V^2} \sum_{n \neq 0} u_0(r) u_0(r')^2 u_n(r) (b_n e^{-i\alpha} + b_n^* e^{i\alpha}) + \right. \\ + \frac{2N_0}{V^2} \sum_{n, n' \neq 0} [u_n(r') u_{n'}(r') u_0^2(r) + \\ \left. + u_n(r') u_{n'}(r) u_0^2(r) (b_n^* b_{n'} e^{2i\alpha} + b_n b_{n'} e^{-2i\alpha}) \right\}.$$

Нарушение трансляционной инвариантности учитывается в линейных по b операторных слагаемых в H_0 и $\epsilon(t)$, N_0 есть число бозонов конденсата среди N частиц системы. Одночастичная энергия $w_{nn'}$ содержит как член кинетической энергии, пропорциональный ∇^2 , так и энергию во внешнем поле, пропорциональную $U(r)$.

В разреженных газах применимо δ -приближение для взаимодействия:

$$\begin{aligned} G(r-r') &\rightarrow G\delta(r-r'), \quad h_B = \frac{1}{2} \int dr dr' \epsilon(t) \rightarrow h_B^\delta, \\ h_B^\delta &= \frac{G}{2} \left[\frac{N_0^2}{V^2} \int dr u_0^4(r) + \frac{N_0^{3/2}}{V^2} \sum_{n \neq 0} (b_n e^{-i\alpha} + b_n^* e^{i\alpha}) \int dr u_0^3(r) u_n(r) + \right. \\ &\quad + \frac{2N_0}{V^2} \sum_{n, n' \neq 0} b_n^* b_{n'} \int dr u_0^2(r) u_n(r) u_{n'}(r) + \\ &\quad \left. + \frac{N_0}{V} \sum_{n, n' \neq 0} u_0^2(r) u_n(r) u_{n'}(r) (b_n^* b_{n'}^* e^{2i\alpha} + b_n b_{n'} e^{-2i\alpha}) \right]. \end{aligned}$$

В пределе $N, V \rightarrow \infty$ с масштабным преобразованием $b_n \rightarrow \sqrt{V} b_n$, $b_n^* \rightarrow \sqrt{V} b_n^*$ получаем

$$H_0 = \rho w_{00} + \sqrt{\rho} \sum_{n \neq 0} (b_n e^{-i\alpha} + b_n^* e^{i\alpha}) w_{0n} + \sum_{n, n' \neq 0} b_n^* b_{n'} w_{n, n'}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} h_B^\delta &= \rho^2 \gamma_0 + \rho^{3/2} \sum_{n \neq 0} (b_n e^{-i\alpha} + b_n^* e^{i\alpha}) \gamma_{0n} + \\ &\quad + 2\rho \sum_{n, n' \neq 0} \left[b_n^* b_{n'} + \frac{1}{2} (b_n^* b_{n'}^* e^{2i\alpha} + b_n b_{n'} e^{-2i\alpha}) \right] \gamma_{nn'}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{G}{2} \int dr u_0^4, \quad \gamma_{0n} = \frac{G}{2} \int dr u_0^3 u_n, \quad \gamma_{nn'} = \frac{G}{2} \int dr u_0^2 u_n u_{n'},$$

$\rho = N_0/V$ – плотность бозе-конденсата. Оператор H_0 – гамильтониан идеального бозе-газа, оператор h_B^δ обобщает боголюбовское взаимодействие через парные корреляции в δ -приближении, слагаемые с коэффициентами γ_{0n} и w_{0n} отвечают за нарушение трансляционной инвариантности.

4.3. Бозе-конденсация в пористых стеклах и в разреженных газах в ловушках. Общий анализ, предложенный в пунктах 4.1 и 4.2, был применен в работе [21] для пространственно-неоднородной сверхтекучей системы [22]. Сравнивались вариационные уравнения для трансляционно-инвариантной $G(r-r')$ и трансляционно-неинвариантной $G(r, r')$ систем с целью оценить влияние нарушения трансляционной инвариантности на температуру T_c сверхтекучего перехода. Матричный элемент $G_{k,0} = \langle k, 0 | G | 0, 0 \rangle$ в соотношениях (28), описывающий взаимодействие между конденсатными и надконденсатными частицами, ответствен за сдвиг T_c . Параметр x :

$$x = \frac{Y}{G_0}, \quad Y = \frac{c}{2} \int k^2 \frac{|g_{k,0}|^2}{E_k} dk, \quad c^{-1} = 2\pi^2 \hbar^3, \quad G_0 = \langle 0, 0 | G | 0, 0 \rangle,$$

есть мера этого влияния. С помощью формул (30), (31) экспериментальное [22] отношение температур перехода в однородном ($T_c|_{x=0}$) случае и в пористой среде (T_c) было представлено [21] как отношение плотностей бозе-конденсата

$$\frac{T_c}{T_c|_{x=0}} \simeq \frac{\rho}{\rho|_{x=0}} = 1 - \alpha(x) < 1. \quad (32)$$

Вычисление $\alpha(x)$ в формуле (32) приводит к оценке $x \simeq 0.1$, которая показывает 10%-ный вклад стенок пор в искажение потенциальной энергии $G(r - r') \rightarrow G(r, r')$.

Что касается бозе-конденсации атомов металлов в ловушках, то если пренебречь потенциалом взаимодействия G , квазиклассические свойства заметны благодаря присутствию потенциала ловушки $U(r)$. Бозе-конденсат идеального газа в ловушке с любым потенциалом описывается гамильтонианом (30).

Можно привести поучительное вычисление числа надконденсатных атомов для такого случая [23], когда

$$H_0 - \rho w_{00} = \sum_{n, n' \neq 0} (w_{nn} b_n^* b_n + b_n J_{nn'}^* + b_n^* J_{nn'}),$$

$$J_{nn'} = j_n + b_{n'}(1 - \delta_{nn'})w_{nn'}, \quad j_n = \sqrt{\rho}w_{0n}e^{i\alpha}.$$

Статистическая сумма системы имеет вид

$$Q_0 e^{-\rho w_{00}} = \text{Sp } e^{-\beta H_0} = \prod_{n, n' \neq 0} \int d\rho \int D^2 b_n D^2 b_{n'} \exp S_{nn'}(0, \beta) =$$

$$= \int d\rho \prod_{n, n' \neq 0} \int D^2 b_{n'} \frac{\exp \left(\int_0^\beta J_{nn'}^* \left(\frac{d}{d\tau} + w_{nn} \right)^{-1} J_{nn'} dt \right)}{1 - \exp(-\beta w_{nn})}, \quad (33)$$

$$\left(\frac{d}{d\tau} + w_{nn} \right)^{-1} = \int_0^\beta e^{w_{nn}(\tau-t)} [\theta(t-\tau) + (e^{\beta w} - 1)^{-1}] d\tau.$$

Воспользуемся квазиклассическим рассмотрением, принимая во внимание, что $d/dt \ll w_{nn}$ приближенно выполняется при квазиклассическом движении системы. В этом случае формула (33) дает

$$\text{Sp } e^{-\beta H_0} \simeq \int d\rho e^{S_{\text{ef}}} = \int d\rho \prod_{n, n' \neq 0} \frac{1}{1 - e^{-\beta w_{nn}}} \int D^2 b_{n'} \exp \left(\frac{\beta}{w_{nn}} J_{nn'}^* J_{nn'} \right).$$

Число надконденсатных частиц представляется выражением

$$\langle b_n^+ b_n \rangle|_{n \neq 0} \sim \frac{\partial \ln(\exp S_{\text{ef}})}{\partial(-\beta w_{nn})} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\exp(\beta w_{nn}) - 1} + \frac{|j_n|^2}{w_{nn}^2} + \sum_{n \neq n'} f \left(\beta w_{nn'}, \frac{w_{nn'}}{w_{nn}} \right), \quad (34)$$

$$f(a, b) = \frac{b^2}{\exp(a, b) - 1}.$$

Последним слагаемым в формуле (34) можно пренебречь при условии $w_{nn'} \ll w_{nn}$. Первое слагаемое в (34) дает главный вклад в величину $\langle b_n^+ b_n \rangle|_{n \neq 0}$ при температурах, близких к критической T_c , поскольку $|j_n| \sim w_{0n} \sqrt{\rho}$ и $\rho(\beta)$ обращается в нуль при $T = T_c$. Для параболической ловушки

$$U_\omega(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

этот “высокотемпературный” квазиклассический член приводит к значению $\langle b_n^+ b_n \rangle|_{n \neq 0} \sim (T)^3$, что соответствует результату, полученному в работе [24]. Напротив, второе слагаемое в формуле (34) происходит от множителя w_{0n} и дает большой вклад при малых температурах, являясь результатом s -сдвига (24) в условиях нарушенной трансляционной симметрии. Общие неравенства (5) для этой низкотемпературной квазиклассики имеют вид

$$\beta w_{nn} \gg 1 \simeq \frac{w_{0n}}{w_{nn'}} \gg \frac{w_{0n}}{w_{nn}}. \quad (35)$$

Если мы обратимся к теплоемкости идеального газа в ловушке, то заметим, что она имеет различную температурную зависимость для различных значений $w_{nn'}$ в различных внешних полях. Поэтому можно различать типы ловушек по измерениям C_v для бозе-газа в них.

Таким образом, “квазиклассическая” плотность конденсата ρ в приближении Боголюбова приводит к температурнонезависимому вкладу $|j_n|^2/w_{nn}^2$ в число надконденсатных частиц. Этот вклад, обусловленный нарушением трансляционной симметрии, может быть обнаружен при низких температурах как квантовое макроскопическое проявление бозе-конденсации идеального газа в ловушке.

5. КВАЗИКЛАССИКА ФОНОНОВ В БОЛЬШИХ МОЛЕКУЛАХ

Двухатомная молекула представляет собой пример адиабатической системы с “быстрыми” (электроны) и “медленными” (ядра) степенями свободы. Движение этих подсистем имеет квантовый (кроме точек поворота колебаний ядер) характер. Иная ситуация возможна в многоатомных молекулах, где имеются два вида движения ядер – валентные $\Omega_{a,b}$ и деформационные $\omega \simeq \Omega_a - \Omega_b \ll \Omega_{a,b}$ колебания, при этом “мягким,” ω -колебательным, модам может быть присущ квазиклассический характер движения. В частности, электронный отклик при поглощении когерентного света большой молекулой приводит к возбуждению оптически активных “мягких” фононов ω вследствие электрон-фононного взаимодействия. Люминесценция сопровождается перераспределением энергии между ω (деформационными) и $\Omega_{a,b}$ (валентными) степенями свободы благодаря фонон-фононному взаимодействию. Эти квазиклассические нелинейные фононные процессы в молекуле, соответствующие стадиям поглощения и люминесценции, выражают статистическую необратимость, описываемую с помощью интегрирования по замкнутому временному контуру.

Неравенства $n > 1$ и $n < 1$ для числа заполнения “мягкой” фононной моды

$$n = (e^{\omega\beta} - 1)^{-1}$$

определяют высоко- и низкотемпературные квазиклассические аппроксимации $\omega\beta < 1$ и $\omega\beta > 1$, соответственно. Адекватная нелинейная квазиклассическая динамика ядер может быть развита для любых значений n , однако, как будет показано, лишь низкотемпературному движению $n < 1$ соответствуют финитные траектории в квазиклассическом фононном фазовом пространстве. Адиабатическое квазиклассическое условие (5) в этом случае выглядит как

$$\Omega_{a,b}\beta > \omega\beta > 1 > \frac{\omega}{\Omega_{a,b}} \quad (36)$$

и экспериментально проявляется в размытии [25, 26] квантовой структуры спектральных линий поглощения и люминесценции оптической спектроскопии. Теоретический анализ, представленный ниже, следует работам [27, 28].

5.1. Электрон-фононное взаимодействие. Возьмем двухатомную молекулу с двумя электронными уровнями $E_1 < E_2$ и частотой колебаний ядер ω . Электронный переход происходит вследствие дипольного взаимодействия λ с заданным оптическим полем ψ . Гамильтониан электрон-фононной системы во внешнем поле имеет вид

$$h_0 = \begin{pmatrix} E_2 + \omega(c^+ + \Delta)(c + \Delta) & \lambda\psi \\ \lambda\psi^* & E_1 + \omega c^+ c \end{pmatrix}, \quad [c, c^+] = 1, \quad (37)$$

где Δ — сдвиг потенциальной кривой верхнего электронного состояния. Матричный элемент электрон-фононного перехода в представлении интегралов по траекториям в случае точного резонанса $\arg \psi = it(E_2 - E_1 + \Delta^2\omega)$ сводится к виду [29, 30]

$$T \exp \left[i \int_0^t \begin{pmatrix} \omega\Delta(c^* + c) & \lambda|\psi| \\ \lambda|\psi| & 0 \end{pmatrix} dt \right],$$

где произведение $\omega\Delta$ описывает электрон-фононное взаимодействие, в то время как $c(0)$ и $c^*(t)$ соответствуют начальному и конечному когерентным состояниям осциллятора.

В случае многоатомной молекулы ω -колебание выделяется как оптически активное и рассматривается его взаимодействие с N парами фононов, имеющих частоты $\Omega_{a,b}$. Основная идея состоит в том, что электронный оптический переход в молекуле вызывает быстрые возбуждения системы ядер. Затем эти возбуждения трансформируются в нерегулярное движение ядер вследствие непертурбативного нелинейного взаимодействия между фононами (с межмодовым колебательным ангармонизмом μ). В итоге гамильтониан молекулы конструируется с помощью (2×2) -матрицы электронной системы (37)

и $2N + 1$ бозе-операторов a, b, c колебаний ядер в основном (h) и возбужденном (h_Δ) электронных состояниях:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h_\Delta + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (h - E), \quad E = E_2 - E_1,$$

$$h = \omega c^\dagger c + \sum_{g=1}^N (a^\dagger b^\dagger)_g \begin{pmatrix} \Omega_a & \mu c \\ \mu c^\dagger & \Omega_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_g, \quad \Omega_{a,b} \gg \omega.$$

Гамильтониан h описывает резонансное взаимодействие $\Omega_a - \Omega_b \simeq \omega$ оптически активного колебания ω с N парами франк-кондоновских колебаний $\Omega_{a,b}$, μ — постоянная взаимодействия между фононами. Сдвиг Δ координаты оптически активного колебания в верхнем электронном состоянии определен как

$$h_\Delta = h|_{c \rightarrow c+\Delta, c^\dagger \rightarrow c^\dagger+\Delta}.$$

При взаимодействии со слабым оптическим полем электрон-фононные возбуждения описываются корреляционной функцией

$$K(t) = (\text{Tr } \rho)^{-1} I(t), \quad I = \text{Tr} \left[\rho e^{-iHt} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{iHt} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (38)$$

$$K(t) = e^{-iEt} \text{Tr} \left[e^{-h(\beta+it)} e^{ih_\Delta t} \right], \quad \rho = e^{-\beta H}.$$

В формуле (38) выполнено усреднение по электронным переменным, при этом неунитарный характер эволюции ядер вытекает из-за различия гамильтонианов h и h_Δ .

5.2. Квазиклассическая хаотизация фононов. Теория необратимых процессов дает возможность классифицировать динамику фононов на различных стадиях оптического перехода. Она основана на предположении, что эволюция квантовой системы “вперед” и “назад” по оси времени описывается разными гамильтонианами, так что движение системы по замкнутому контуру времени неунитарно. Такая ситуация имеет место в процессе молекулярного поглощения и люминесценции. Этот механизм необратимого движения распространяет метод интегрирования по замкнутому контуру времени [31, 32] на вычисление статистической суммы в виде интеграла по траекториям. Нас интересует соответствие между необратимостью оптического электронного перехода и хаотизацией ядерных степеней свободы в больших молекулах [25, 26].

Для того чтобы избежать теории возмущений по сдвигу Δ и по константе ангармонического взаимодействия μ между модами, обратимся к функционально-интегральному представлению для функции $K(t)$

$$I(t) = \int d^2 z d^2 z' d^2 z'' \langle z | e^{it(h_\Delta - E)} | z' \rangle \langle z' | e^{-\beta h} | z'' \rangle \langle z'' | e^{-iht} | z \rangle =$$

$$= \int d^2 z d^2 z' d^2 z'' \int D^2 \phi_- D^2 \phi D^2 \phi_+ \exp(\Phi - iEt), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi &= iS^+(t, 0) + S(\beta, 0) - iS_{\Delta}^-(t, 0), \\ d^2 z &= d^2 z_c \prod_{g=1}^N (d^2 z_a d^2 z_b)_g, \quad d^2 z_{\kappa} = e^{-|\kappa|^2} \frac{d\kappa^* d\kappa}{i\pi}, \quad \kappa = a, b, c, \\ D^2 \phi_{\pm} &= D^2 c_{\pm} \prod_{g=1}^N (D^2 a_{\pm} D^2 b_{\pm})_g, \quad D^2 \phi = D^2 c \prod_{g=1}^N (D^2 a D^2 b)_g.\end{aligned}$$

Действия S^+ и S_{Δ}^- соответствуют движению колебательной подсистемы молекулы от момента времени 0 до момента t с гамильтонианом h , а далее от момента t до момента 0 с гамильтонианом h_{Δ} . Действие S соответствует тепловому равновесному состоянию с температурой β^{-1} . Граничные условия для траекторий выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned}a_{-}^*(t) &= z_a^*, & a^*(\beta) &= z_a'^*, & a_{+}^*(t) &= z_a''^*, \\ a_{-}(0) &= z_a', & a(0) &= z_a'', & a_{+}(0) &= z_a,\end{aligned}$$

и аналогично для $b, b_{\pm}, c, c_{\pm}$.

Интеграл по переменным $c, c_{\pm}, z_c, z_c', z_c''$ в выражении для $I(t)$ вычисляется точно:

$$\begin{aligned}I(t) &= n \exp(\omega\beta - iEt) \int d^2 z_{a,b} d^2 z_{a,b}' d^2 z_{a,b}'' \int D^2 \phi_{a,b}^- D^2 \phi_{a,b} D^2 \phi_{a,b}^+ \exp S_{\text{ef}}, \\ S_{\text{ef}} &= -i \int_0^t L_- d\tau + \int_0^{\beta} L d\tau + i \int_0^t L_+ d\tau + F, \\ L &= \sum_{g=1}^N \left[a^* \left(-\frac{d}{d\tau} - w_a \right) a + b^* \left(-\frac{d}{d\tau} - w_b \right) b \right]_g, \\ L_{\pm} &= \sum_{g=1}^N \left[a_{\pm}^* \left(i \frac{d}{d\tau} - w_a \right) a_{\pm} + b_{\pm}^* \left(i \frac{d}{d\tau} - w_b \right) b_{\pm} \right]_g, \\ F &= \int_0^{\beta} d\tau d\tau' f(\tau) f(\tau') [n + \theta(\tau - \tau')] + i n e^{i\omega t} \int_0^{\beta} f d\tau \int_t^0 (f_{-}^* - f_{+}^*) d\tau' - \\ &\quad - i n e^{-i\omega t} \int_0^{\beta} f^* d\tau \int_t^0 (f_{+} - f_{-}) d\tau' + \int_t^0 d\tau d\tau' [n(f_{-}^* - f_{+}^*)_{\tau} (f_{+} - f_{-})_{\tau'} + \\ &\quad + f_{-}(\tau') (f_{+}^* - f_{-}^*)_{\tau} \theta(\tau - \tau') + f_{+}^*(\tau) (f_{-} - f_{+})_{\tau'} \theta(\tau' - \tau)] - \\ &\quad - \mu \Delta \int_0^{\beta} (Q + Q^*) d\tau - i \mu \Delta \int_0^t (Q_{-} + Q_{-}^* - 2w\Delta) d\tau.\end{aligned}$$

Слагаемые в фазе F , билинейные по $f, f_{\pm}$, совпадают с аналогичными членами у Швингера [32], однако вместо феноменологических источников $K_{\pm}$ этой работы здесь возникает замкнутая система нелинейных уравнений для траекторий

$$\begin{aligned}f_{\pm} &= e^{i\omega r} Q_{\pm}, & f &= e^{w r} Q, & f^* &= e^{-w r} Q^*, \\ Q_{+} &= \sum_{g=1}^N q_g^+, & Q_{-} &= w\Delta + \sum_{g=1}^N q_g^-, & Q &= \sum_{g=1}^N q_g,\end{aligned}$$

$$q^{\pm} = \mu a_{\pm} b_{\pm}^*, \quad q = \mu a b^*.$$

Слагаемые, пропорциональные Δ и Δ^2 , описывают влияние электронного перехода на амплитуды ядер.

Воспользуемся теперь квазиклассическим приближением. Первый его шаг состоит в переходе к термодинамическому пределу $N \rightarrow \infty$ и вариационному принципу

$$\delta S^+ = 0, \quad \delta S = 0, \quad \delta S_{\Delta}^- = 0.$$

Можно выписать и проанализировать соответствующую систему замкнутых вариационных уравнений для переменных $a_{\pm}$, $b_{\pm}$, a , b и $a_{\pm}^*$, $b_{\pm}^*$, a^* , b^* . Можно заметить, что пары переменных $a_{\pm}$ и $a_{\pm}^*$, $b_{\pm}$ и $b_{\pm}^*$; a , b и a^* , b^* не являются канонически-сопряженными, потому что обсуждаемая система уравнений и система уравнений аналогичного вида

$$\delta(S^+)^* = 0, \quad \delta S^* = 0, \quad \delta(S_{\Delta}^-)^* = 0$$

не совпадают. Данное обстоятельство является результатом неунитарности эволюции, которая исчезает при $\Delta \rightarrow 0$. Следующий шаг квазиклассического приближения состоит в предположении, что при электронном переходе рождается много оптически активных фононов. Это условие может быть выражено неравенством $\Delta^2 \gg 1$ (в атомных единицах) и удовлетворяется при малой частоте ω , что соответствует деформационным степеням свободы движения ядер. Именно такая ситуация имеет место для молекул в экспериментах [25, 26], где наблюдались значения $\omega \sim 200 \text{ см}^{-1}$ и $\Omega_{a,b} \sim 1000 \text{ см}^{-1}$.

При анализе вариационных уравнений для траекторий следует сделать еще одно уточнение. Будут исследованы два альтернативных случая, соответствующих неравенствам

$$\Delta^2 > 1 > n = (e^{w\beta} - 1)^{-1}, \quad \Delta^2 > n > 1.$$

Данные неравенства позволяют пренебречь взаимодействием фононов на температурной части эволюции. Это означает, что температура не должна заметно отличаться от обычной $T_0 = 300 \text{ К}$. Замкнутое уравнение

$$\frac{d^2 u_{\pm}}{d\tau^2} - x_{1,2} \mu^2 u_{\pm} (2|u_{\pm}|^2 + \varepsilon_{1,2}^{\pm}) = 0, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^+ &= L_+, \quad \varepsilon_1^- = L_+ - \Delta^2, \quad \varepsilon_2^{\pm} = L_{\pm} - n^2 |\tilde{\Delta}|^2, \\ x_{1,2} &= \begin{cases} -1, & \text{если } n < 1, \\ 1, & \text{если } n > 1, \end{cases} \\ L_{\pm} &= \mp(n_b(0) - n_a(0)) + \left(\frac{\Omega}{2\mu}\right)^2, \quad \Omega = \omega - \Omega_a + \Omega_b, \\ u_{\pm} &= x_{1,2} v_{\pm}^*, \quad u_-(0) = -u_+(0)e^{-w\beta} + i\Delta, \quad u_-(t) = -u_+(t) + i\Delta, \end{aligned}$$

получается для обобщенных амплитуд ядер

$$\begin{aligned} u_+ &= - \int_0^\tau f_+ d\tau' + (n+1) \int_0^t (f_+ - f_-) d\tau' + \tilde{\Delta}(n+1), \\ u_- &= - \int_0^\tau f_- d\tau' - n \int_0^t (f_+ - f_-) d\tau - n\tilde{\Delta} + i\Delta, \\ \tilde{\Delta} &= i\Delta(e^{i\omega t} - 1). \end{aligned}$$

Уравнение (40) описывает квазиклассическое – усредненное по времени – движение фононов $\Omega_{a,b}$, обусловленное нелинейным фононным взаимодействием, рассмотренным после усреднения по электронным переменным (38). Такое же уравнение может быть получено для амплитуд $v_\pm$. Определение функции $x_{1,2}$ является весьма важным, поскольку оно определяет каноническое сопряжение. Можно заметить, что определение величин $x_{1,2}$ заменяет определения $(a_\pm^*)^*$ и $(b_\pm^*)^*$. В частном случае больших температур ($n > 1$) можно заметить, что выполняется обычное условие канонического сопряжения $(a_\pm^*)^* = a_\pm$, $(b_\pm^*)^* = b_\pm$. Это можно пояснить хорошо известным в спектроскопии фактом, что различие между поглощением и люминесценцией исчезает при достаточно высокой температуре, как будто сдвиг Δ становится малым и имеет место почти унитарная эволюция по замкнутому контуру времени.

Таким образом, знак “+” в уравнении (40) означает поглощение и знак “–” означает люминесценцию. Для случая низких температур ($x = -1$, $T < T_0$) имеет место апериодическое решение $u_\pm = |\varepsilon_1^\pm|^{1/2} \text{ch}^{-1}(\tau\mu|\varepsilon_1^\pm|^{1/2})$, для которого энергия нелинейного движения близка к нулю и $\varepsilon_1^\pm < 0$. Это решение описывает “солитоноподобные” возбуждения фононной системы с условием резонанса $\omega \leftrightarrow \Omega_a - \Omega_b$, выполняющимся при $\Delta\mu > \Omega$. Для случая больших температур ($x = 1$, $T > T_0$) имеет место апериодическое решение $|\varepsilon_2^\pm|^{1/2} \text{th}(\tau\mu|\varepsilon_2^\pm|^{1/2})$, для которого энергия нелинейного движения близка к нулю и $\varepsilon_2^\pm < 0$. Это решение описывает “кинкоподобные” возбуждения фононной системы с условием резонанса $\omega \rightarrow (\Omega_a - \Omega_b)$, $\omega \leftarrow (\Omega_a - \Omega_b)$, выполняющимся при $\Delta\mu n > \Omega$. Это решение не финитно на фазовой плоскости и распадная часть его траектории соответствует диссоциации.

Апериодические решения имеют бесконечный период, и в их окрестности происходит нерегулярное движение нелинейных осцилляторов. Это движение может объяснить отсутствие обычной фононной структуры электронных молекулярных спектров, наблюдавшееся в работах [25, 26]. Такая ситуация имеет место при $\Delta\mu > \Omega$ или $\Delta\mu n > \Omega$. В [25, 26] эти неравенства выполняются, поскольку величины сдвига $\Delta^2 \simeq 8$, ангармонизма $\mu \simeq 10 \text{ см}^{-1}$ и расстройки ферми-резонанса $\Omega \simeq 5 \text{ см}^{-1}$.

Таким образом, непертурбативный анализ молекулярного межмодового взаимодействия μ показывает, что “мягкая” фононная мода ω может претерпевать нерегулярное движение вследствие влияния сдвига Δ электронного терма при электронном переходе. Хаотизация молекулярных спектров может быть результатом этих процессов при включении в корреляционную функцию заданного поля ψ , ψ^* , как это было сделано

в гамильтониане H в формуле (37). В этом случае в правой части уравнения (40) появятся внешние силы и хаотизация в системе наступает в соответствии с общей теорией нерегулярной динамики [33].

Роль электрон-фоонного взаимодействия в молекуле зависит от его величины, которая определяется величиной сдвига Δ . Для малых сдвигов колебаний связи движение ядер почти гармоническое. Оно дает электронный отклик типа Раби, и электрон сильно взаимодействует с внешним полем. В двухатомных молекулах Δ мало ($\Delta < 1$) и теория возмущений по Δ в (38) приводит к обычной теории Ландау–Зинера.

В многоатомной молекуле ситуация такова. При большом сдвиге (деформационное колебание) электронный переход порождает множество фоонов, причем ангармоническое взаимодействие μ между ними существенно искажает вибрационную структуру спектра. Большая величина Δ связана с малостью частоты деформационного колебания ω . Если расстройка ферми-резонанса Ω мала по сравнению с произведением $\mu\Delta$, то электронный переход вызывает хаос в фоонной системе, который приводит к ситуации разупорядочения колебаний при электрон-фоонном переходе в молекуле в слабом внешнем поле.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе развито непертурбативное низкотемпературное описание квантовых коллективных эффектов, основанное на приближенном анализе двухмасштабной во времени динамики в интегралах по траекториям. Краткий обзор материала представлен в работе [34]. Некоторые комментарии и сравнение с известными подходами в квазиклассике даны ниже.

Разложение Вигнера–Кирквуда [35, 36], представление Вейля [37] и приближение когерентных состояний [38] по большей части формулировались для описания высокотемпературных и высоковозбужденных состояний квантовых систем. Метод самосогласованного эффективного потенциала (в духе работ Фейнмана [1, 39] о распределении квазивероятности) был развит для статистической суммы в виде интеграла по траекториям в работе [40]. Основная идея этого метода состоит в интегрировании по квантовым флуктуациям системы при конечной температуре, в то время как классическое поведение тех же степеней свободы исследуется отдельно. Таким способом были рассмотрены модели разреженного газа, ферромагнитной цепочки, синус–Гордон, ϕ^4 -поля [41, 42] и диссипативных квантовых систем [43].

В отличие от исследований [40–43], в разделах 3 и 5 данной работы рассмотрены сложные системы, в которых “медленные” и “быстрые” степени свободы отнесены к различным типам частиц. Усреднение по “быстрым” степеням свободы определяет масштаб времени для “медленных” частиц, что приводит к низкотемпературному приближению (5). Это приближение выражено неравенствами (23) и (36) в разделах 3 и 5, трактующих решетчатые и нуль-мерные задачи.

Разделение “медленных” и “быстрых” степеней свободы в интеграле по траекториям в переменных ω, k для амплитуды бозона было применено Поповым [7, 44] в теории трех-

мерной сверхтекучести. Была развита теория возмущений для двухточечной равновесной функции Грина и получен функционал энергии для теории сверхтекучести Ландау. Аналогичная идея о “медленных” и “быстрых” переменных использована в разделе 4 данной работы. В отличие от работ [7, 44] для статистической суммы “медленной подсистемы” в разделе 4 теория возмущений не использовалась, так что вариационное уравнение для конденсата (26) есть непертурбативное обобщение аналогичного уравнения работ [7, 44]. Низкотемпературное условие (25) представляет собой ограничение как для k (по образцу работ [7, 44]), так и для T одновременно в соответствии с общим условием (5). Заметим, что в разделе 4 некоторое количество конденсата присутствует и в разупорядоченной фазе, но оно убывает до нуля при увеличении температуры. Таким образом, “параметр порядка” ρ принимает участие в формировании высокотемпературного состояния подобно теории работы [17] (в отличие от более ранних рассмотрений бозе-конденсации).

Низкотемпературная квазиклассика для спиновых систем впервые была применена для периодической модели Андерсона в статье [45]. Значение спиновой (s - d)-электронной структуры для объяснения эффекта Кондо было отмечено в работе [46]. В разделе 3 дано изложение теории спин-зарядовых переменных в рамках $SU(2|1)$ -когерентного представления хаббардовского (s) электрона. Так, температурная зависимость энергии сдвига δE обусловлена полным эффективным взаимодействием между s - и d -электронами. Развитие этой техники интегрирования по траекториям в теории димеров можно найти в статье [47]. Применение интегралов по траекториям в когерентном представлении для хаббардовских переменных в теории электронных корреляций обнаруживает преимущество (см. $(t-J)$ -модель [48]) по сравнению с традиционной “slave”-бозонной [49] и “slave”-фермионной [50] техникой, приводящей к проблеме “констрейна” — учета связи в пространстве переменных.

Обобщение теории бозе-конденсации Боголюбова [6] для неоднородной среды в координатном представлении можно найти в книге [51]. Современные варианты этого подхода известны под названием ХФБ (Хартри–Фок–Боголюбов) [52] или ХФБ–Попова [53] методов. Модификация этих идей для бозе-конденсации в атомных ловушках на языке связанных нелинейных уравнений Шредингера для конденсата и надконденсата была предложена в работах [54, 55]. Особое внимание уделялось рассеянию бозонов для сил притяжения и отталкивания. Аналогичные проблемы рассматривались в статье [56].

Обобщение (30), (31) модели Боголюбова (раздел 4) основано на собственно-энергетическом представлении бозонов в неоднородной среде. Это представление позволяет выделить вклад нарушения трансляционной симметрии в наблюдаемые величины. Система вариационных уравнений для плотностей конденсата и надконденсата, приводящая к эффективному действию для конденсата, служит основным средством рассмотрения сверхтекучести в пористых стеклах.

Что касается больших молекул, экспериментальное размытие оптического спектра длинноволновыми фононами было обнаружено в работе [25] и подтверждено позже [26]. В отличие от известного [57] инфракрасного “теплового взрыва” в молекулах, этот эф-

фekt обнаруживается при электрон-фоонных оптических переходах в видимой области спектра. Сравнение этих двух явлений можно найти в статье [30].

Для решения всех рассмотренных в настоящей работе задач были использованы интегралы по траекториям в когерентном представлении. Это представление вводит соответствующее данной задаче квазиклассическое фазовое пространство траекторий и дает возможность использовать функциональные методы вычислений.

Квазиклассика для интегралов по траекториям в когерентном представлении $U^l(G)$ -групп (l – индекс представления) применялась с параметром l для спина $SU(2)$ -модели [58] и в общем случае в работе [59].

Благодарности. Автор считает своим долгом отметить важное значение его сотрудничества с В. Н. Поповым и Б. С. Непорентом при изучении проблем, затронутых в этой статье. С благодарностью отмечается плодотворная работа с В. Ивановым, Е. Кочетовым, В. Са-Яканитом и М. Журавлевым, а также полезные обсуждения с А. Васильевым, П. Кулишом, Н. Плакидой, В. Приезжевым и Г. Шляпниковым. При подготовке работы автор имел удовольствие пользоваться гостеприимством Г. Глайда в Делаваре и В. Тоньетти во Флоренции.

Список литературы

- [1] *R. Feynman, A Hibbs.* Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill Company, 1965.
- [2] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
- [3] *V. N. Popov, V. S. Yarunin.* Collective effects in quantum statistics of radiation and matter. Dordrecht: Kluwer, 1988.
- [4] *E. A. Kochetov, V. S. Yarunin.* Physica Scripta. 1995. V. 51. P. 46.
- [5] *Ю. Изюмов, М. Катцельсон, Ю. Скрыбин.* Магнетизм электронов. М.: Наука, 1994.
- [6] *Н. Н. Боголюбов.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77.
- [7] *В. Н. Попов.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
- [8] *E. A. Kochetov.* Phys. Lett. A. 1996. V. 217. P. 65.
- [9] *E. A. Kochetov, V. S. Yarunin, M. Ye. Zhuravlev.* $SU(2|1)$ path integral for heavy electrons in Anderson lattice. In: Proc. of 5-th Intern. Path Integral Conference. Eds. M. A. Smondyrev, V. S. Yarunin. Dubna: JINR, 1996.
- [10] *E. Kochetov, V. Yarunin, M. Zhuravlev.* Physica C. 1998. V. 296. P. 298.
- [11] *V. Ivanov, R. Pucci, V. Yarunin, M. Zhuravlev.* Int. J. Mod. Phys. B. 1997. V. 11. P. 1023.
- [12] *В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев.* ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1315.
- [13] *В. С. Ярунин.* ТМФ. 1993. Т. 96. С. 37.
- [14] *V. S. Yarunin, L. A. Siurakshina.* Physica A. 1995. V. 215. P. 261.
- [15] *В. С. Ярунин.* ТМФ. 1996. Т. 109. С. 295.
- [16] *N. Blagoveshchenskii, I. Bogoyavlenskii, L. Karnatsevich, Zh. Kozlov, V. Kolobrodov, V. Priezzhev, A. Puchov, A. Skomorokhov, V. Yarunin.* Phys. Rev. B. 1994. V. 50. P. 16550.
- [17] *H. Glyde.* Excitations in liquid and solid helium. Oxford: Clarendon Press, 1994.
- [18] *В. С. Ярунин.* Физика низких температур. 1998. Т. 24. С. 130.
- [19] *V. S. Yarunin.* Physica A. 1996. V. 232. P. 436.
- [20] *Б. Есельсон, Б. Григорьев, Б. Иванцов, Е. Рудаковский.* Жидкий и твердый гелий. М.: Стандартиздат, 1978.

- [21] *V. Sa-Yakanit, V. Yarunin, P. Nisamaneepong.* Phys. Lett. A. 1998. V. 237. P. 152.
- [22] *G. Wong, P. Crovelli, H. Cho, J. Reppy.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 65. P. 2410.
- [23] *V. Yarunin.* Bose–Einstein condensation of trapped atoms in a gravity field. In: Proc. of NASA/JPL 1998 Workshop on microgravity. USA, Oxnard (accepted).
- [24] *V. Bagnato, D. Pritchard, D. Kleppner.* Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 4354.
- [25] *Б. С. Непорент.* ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 172.
- [26] *Б. С. Непорент, С. В. Куля, А. Г. Спири.* Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48. С. 367.
- [27] *Б. С. Непорент, С. А. Федотов, В. С. Ярунин.* ЖЭТФ. 1991. Т. 99. С. 447.
- [28] *Б. Непорент, В. Ярунин.* Опт. и спектр. 1990. Т. 69. С. 339.
- [29] *В. Попов, В. Ярунин.* Когерентные коллективные эффекты в сверхпроводимости и нелинейной оптике. Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1994.
- [30] *V. Yarunin.* Physica A. 1993. V. 197. P. 260.
- [31] *Л. В. Келдыш.* ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515.
- [32] *J. Schwinger.* J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 407.
- [33] *А. Лихтенберг, М. Либерман.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [34] *V. Yarunin.* Adiabatics and quasiclassics in path integrals for quantum macroscopic phenomena. In: Proc. of 6-th Intern. Path Integral Conference. Florence, Italy (accepted).
- [35] *M. Hillery, R. O'Connell, M. Scully, E. Wigner.* Phys. Rep. 1984. V. 106. P. 122.
- [36] *E. Wigner.* Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [37] *Г. Вейль.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
- [38] *J. R. Klauder.* Coherent states. Singapore: World Scientific, 1985.
- [39] *Р. Фейнман.* Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
- [40] *A. Cuccoli, V. Tognetti, R. Vaia.* Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 8418.
- [41] *A. Cuccoli, R. Giachetti, V. Tognetti, R. Vaia, P. Verrucchi.* J. Phys.: Conds. Matter. 1995. V. 7. P. 7891.
- [42] *A. Cuccoli, R. Livi, M. Spissi, V. Tognetti, R. Vaia.* Int. J. Mod. Phys. B. 1994. V. 8. P. 2391.
- [43] *A. Cuccoli, A. Rossi, V. Tognetti.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. R4849.
- [44] *V. N. Popov.* Functional integrals and collective excitations. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [45] *V. S. Yarunin, M. Ye. Zhuravlev.* Effective hopping for localized electrons in periodic Anderson model. In: Thes. Intern. Seminar “Strongly correlated systems”. Ed. V. S. Udovenko. Dubna: JINR, 1994.
- [46] *А. Ф. Барабанов, А. М. Цвелик.* ФТТ. 1979. Т. 21. С. 3214.
- [47] *R. Pucci, V. Yarunin, M. Zhuravlev.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 3185.
- [48] *E. Kochetov, V. Yarunin.* Phys. Rev. B. 1997. V. 56. P. 2703.
- [49] *P. Coleman.* Phys. Rev. B. 1984. V. 29. P. 3035.
- [50] *C. Kane, P. Lee.* Phys. Rev. B. 1989. P. 6880.
- [51] *P. R. de Gennes.* Superconductivity of metals and alloys. New York: Benjamin, 1966.
- [52] *A. Minguzzi, M. Chiofalo, M. Tosi.* Phys. Lett. A. 1997. V. 236. P. 237.
- [53] *R. Dodd, M. Edwards, C. Clark, K. Burnett.* Collective excitations of Bose–Einstein condensed gases at finite temperatures. cond-mat/9708139, 19 Aug. 1997.
- [54] *Yu. Kagan, G. Shlyapnikov, J. Warlaven.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2670.
- [55] *Yu. Kagan, E. Surkov, G. Shlyapnikov.* Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. R1753.
- [56] *C. Law, H. Pu, N. Bigelow, J. Eberly.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 3105.
- [57] *М. В. Кузьмин, В. С. Летохов, А. А. Стучебрюхов.* ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 458.
- [58] *E. Kochetov.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 4667.
- [59] *E. Kochetov.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 4473.

Поступила в редакцию 2.X.1998 г.