Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, А. Трумен, Формулы замены переменных для фейнмановских псевдомер, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 3, 355–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:31:47

© 1999 г.

О. Г. Смолянов*, А. Трумен†

ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ФЕЙНМАНОВСКИХ ПСЕВДОМЕР

Выведены формулы преобразования фейнмановских псевдомер при нелинейных преобразованиях фазового пространства. В частности, предложен аналог формулы Раме-ра и обобщены формулы из работ [6] и [5].

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть E — локально-выпуклое пространство (ЛВП). Все ЛВП предполагаются вещественными и сепарабельными, если не указано иное. Обозначим символом E' пространство линейных непрерывных функционалов на E , наделенное слабой* топологией $\sigma(E', E)$. Если $x \in E$ и $g \in E'$, то по определению $\langle g, x \rangle = \langle x, g \rangle = g(x)$ и $\varphi_x(g) = \varphi_g(x) = e^{ig(x)}$. Символом $\mathcal{S}$ обозначается комплексное ЛВП некоторых борелевских функций на E , содержащее все функции φ_g .

Если Φ — линейный функционал на $\mathcal{S}$, то Φ называется также распределением (на E или из $\mathcal{S}'$). Преобразованием Фурье этого распределения называется отображение

$$g \in E' \longmapsto \Phi(\varphi_g) \in \mathbb{C}.$$

Мы предполагаем, что каждое распределение на E единственным образом восстанавливается по его преобразованию Фурье.

Наиболее известным примером является пространство $\mathcal{S}$ преобразований Фурье σ -аддитивных комплексных мер, определенное в [1] и [2]. Другой пример пространства $\mathcal{S}$ имеется в [3] (см. также нижеследующий пример 3.2).

Фейнмановской псевдомерой на E называется распределение на E , преобразование Фурье которого имеет вид

$$g \in E' \longmapsto e^{ib(g,g)/2 + ia(g)} \in \mathbb{C},$$

где b — вещественный билинейный функционал на $E' \times E'$, называемый ковариационным, и a — элемент из E , называемый средним. Очевидно, что преобразование Фурье фейнмановской псевдомеры похоже на преобразование Фурье гауссовой меры, но отличается

* Московский государственный университет, Москва, Россия

† University of Wales Swansea, Swansea, Great Britain

множителем i перед $b(\cdot, \cdot)$. Кроме того, билинейный функционал $b(\cdot, \cdot)$ не предполагается положительно-определенным.

В предлагаемой статье мы исследуем семейство фейнмановских псевдомер, индексированных парами (b, a) . Среди этих псевдомер особый интерес вызывают те, которые соответствуют незнакоопределенным ковариационным функционалам, т.к. они представляют собой так называемые симплектические, или гамильтоновы, псевдомеры Фейнмана. Мы выводим формулы преобразования фейнмановских псевдомер при, вообще говоря, нелинейных отображениях $E \mapsto E$ и при некоторых отображениях комплексификации пространства E . В частности, мы получаем точный аналог формулы Реймера, установленной в [4] для гауссовых мер, и формулы из [5] (см. также [6]).

Мы применяем метод, развитый в [7–9] и в [10], одна из идей которого была предложена в [11]. Наш подход является усовершенствованием подхода, использованного в [12] и [3] и существенно отличается от подхода [5]. Отметим, что наряду с определением фейнмановской псевдомеры посредством ее преобразования Фурье существуют и другие определения. Все они используют сходство фейнмановских и гауссовых мер. Например, интеграл Фейнмана может быть определен с помощью аналитического продолжения гауссова интеграла по некоторому параметру. Такое определение было предложено в [13] и [14] для интегралов Фейнмана с положительно-определенными и произвольными ковариационными функционалами, соответственно. Другое определение интеграла Фейнмана использует последовательности конечномерных интегралов. Именно такой подход был у Фейнмана. Можно использовать также центральную предельную теорему для псевдомер Фейнмана [15]. Тогда эти псевдомеры получаются как пределы последовательностей обычных (т.е. конечных и σ -аддитивных) комплексных мер.

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть S_1 – некоторое подпространство в $\mathcal{S}$. Функция $f: E \mapsto \mathbb{C}$ называется S_1 -мультипликатором, если для любой функции $\varphi \in S_1$ поточечное произведение $f\varphi$ принадлежит $\mathcal{S}$. Линейное пространство всех S_1 -мультипликаторов обозначается символом $\mathcal{P}(S_1)$. Мы предполагаем, что если $f\varphi_g \in \mathcal{S}$ для всех $g \in E'$, то $f \in \mathcal{P}(S_1)$. Для произвольных S_1 -мультипликатора f и распределения $v \in S'$ определен функционал fv на S_1 такой, что $\forall \varphi \in S_1$ справедливо равенство $\langle fv, \varphi \rangle = \langle v, f\varphi \rangle$.

Пусть $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ и g – отображение $(\alpha, \beta) \mapsto S'$. Тогда отображение g называется S_1 -дифференцируемым в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$, если для любой функции $\varphi \in S_1$ функция $t \in (\alpha, \beta) \mapsto \langle g(t), \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ дифференцируема в точке t_0 . Если при этом существует функция $\rho(t_0, g) \in \mathcal{P}(S_1)$ такая, что $g'(t_0) = \rho(t_0, g)g(t_0)$, то отображение g называется S_1 -дифференцируемым в смысле Фомина в точке t_0 и функция $\rho(t_0, g)$ – логарифмической производной отображения g в точке t_0 .

Отображение $F: E \mapsto E$ называется $\mathcal{S}$ -допустимым, если композиция $\psi \circ F$ принадлежит $\mathcal{S}$ для любой функции $\psi \in \mathcal{S}$ и отображение $\psi \in \mathcal{S} \mapsto \psi \circ F \in \mathcal{S}$ непрерывно. Для произвольных $\mathcal{S}$ -допустимого отображения $F: E \mapsto E$ и функционала $v \in S'$ определено распределение $vF^{-1} \in S'$ такое, что $\forall \psi \in \mathcal{S}$

$$\langle vF^{-1}, \psi \rangle = \langle v, \psi \circ F \rangle.$$

Это распределение называется образом v при отображении F .

Пусть $F: \mathbb{R}^1 \times E \mapsto E$ — отображение, для которого частное отображение

$$F(t, \cdot): g \in E \mapsto F(t, g) \in E$$

$\mathcal{S}$ -допустимо при всех $t \in \mathbb{R}^1$ и $F(0, \cdot) = I$, где I — тождественное отображение. Распределение $v \in \mathcal{S}'$ называется $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым ($\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым в смысле Фомина) вдоль F , если отображение

$$f_F^v: t \in \mathbb{R} \mapsto vF(t, \cdot)^{-1} \in \mathcal{S}'$$

$\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо ($\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо в смысле Фомина) в точке $t = 0$. В случае, когда распределение v $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо в смысле Фомина, логарифмическая производная $\rho(0, f_F^v)$ называется логарифмической производной распределения v вдоль F и обозначается символом β_F^v . Производная функции f_F^v называется $\mathcal{S}_1$ -производной распределения v вдоль F и обозначается символом v_F' .

Векторным полем на E называется отображение $E \mapsto E$. Линейное пространство всех векторных полей на E обозначается символом $\vec{E}$. Если $h \in \vec{E}$ и $F_h(t, x) = x - th(x)$ для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times E$ и если все отображения $F_h(t, \cdot)$ $\mathcal{S}$ -допустимы, то распределение $v \in \mathcal{S}'$ называется $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым ($\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым в смысле Фомина) вдоль векторного поля h , если оно $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо ($\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо в смысле Фомина) вдоль F_h .

Производная v вдоль F_h называется производной v вдоль h и обозначается символом $v'h$. Если распределение v $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо в смысле Фомина, то логарифмическая производная вдоль F_h называется логарифмической производной вдоль h и обозначается символом β_h^v . В частности, если $h(x) = h_0 \in E$ при всех $x \in E$, то распределение v называется $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым ($\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым в смысле Фомина) вдоль вектора h_0 . Соответствующая производная (логарифмическая производная) обозначается символом $v'h_0$ ($\beta^v(h_0, \cdot)$) и называется производной вдоль h_0 (логарифмической производной вдоль h_0).

Распределение $vF_h(t, \cdot)^{-1}$ обозначается символом v_{th} . Если $h(x) = h_0$ для всех $x \in E$, то используется обозначение v_{th_0} .

Предположим, что $h \in \vec{E}$ — такое векторное поле, что если $\varphi \in \mathcal{S}_1$, то функция

$$t \in \mathbb{R}^1 \mapsto \varphi(\cdot + th(\cdot)) \in (\mathcal{S}, \sigma(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$$

определена и дифференцируема. Тогда производная этой функции в точке $t = 0$ обозначается символом $\varphi'h$. Мы предполагаем, что сходимость последовательности элементов пространства $(\mathcal{S}, \sigma(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$ влечет за собой поточечную сходимость. Это значит, что функция $\varphi'h \in \mathcal{S}$ совпадает с обычной производной от φ вдоль векторного поля h . Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Распределение $v \in \mathcal{S}'$ является $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым вдоль h и имеет $\mathcal{S}_1$ -производную $v'h_0$ тогда и только тогда, когда $\forall \varphi \in \mathcal{S}_1$ справедливо равенство*

$$\langle v'h, \varphi \rangle = -\langle v, \varphi'h \rangle. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 2.1 следует из равенств

$$-\langle v, \varphi' h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle v, \frac{\varphi(\cdot - th) - \varphi(\cdot)}{t} \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{v_{th} - v}{t}, \varphi \right\rangle.$$

Действительно, если распределение v $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо вдоль h , то предел в правой части равен $\langle v' h, \varphi \rangle$. Обратно, из равенства (2.1) и вышеприведенных равенств следует, что $(v_{th} - v)/t \rightarrow v' h$ в топологии $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S}_1)$ при $t \rightarrow 0$, что означает $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемость распределения v вдоль h .

Пусть $h_0 \in E$ и $\varphi_g \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$ для любого $g \in E'$. Обозначим преобразование Фурье распределения $v \in \mathcal{S}'$ символом $\Psi(v)$ или Ψ_v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.

А. Если распределение $v \in \mathcal{S}'$ $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо вдоль $h_0 \in E$, то $\Psi_{v' h_0}(g) = -i\langle h_0, g \rangle \Psi_v(g)$ для любого функционала $g \in E'$.

Б. Если $v \in \mathcal{S}'$, $h_0 \in E$ и функция $i\langle h_0, \cdot \rangle \Psi_v(\cdot)$ является преобразованием Фурье некоторого распределения $\eta \in \mathcal{S}'$, то распределение v дифференцируемо вдоль h_0 и $\eta = -v' h_0$.

Допустим, что отображение $g \in E' \mapsto \varphi_g \in (\mathcal{S}, \sigma(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$ дифференцируемо по каждому направлению.

В. Если $i\langle \cdot, g_0 \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$, где $g_0 \in E'$, то $\forall v \in \mathcal{S}'$ функция Ψ_v дифференцируема вдоль g_0 и

$$\Psi'_v(g) g_0 = \Psi_{i\langle \cdot, g_0 \rangle v}(g) \quad (2.2)$$

для любого функционала $g \in E'$.

Г. Если функция Ψ_v дифференцируема вдоль g_0 , то $i\langle \cdot, g_0 \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$ и справедливо равенство (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.1 следует, что если распределение $v \in \mathcal{S}'$ дифференцируемо вдоль $h_0 \in E'$, то $\langle v' h_0, \varphi_g \rangle = -\langle v, \varphi'_g h_0 \rangle$. Правая часть этого равенства может быть представлена в виде

$$-\langle v, i\langle h_0, g \rangle \varphi_g \rangle = -i\langle h_0, g \rangle \langle v, \varphi_g \rangle = -i\langle h_0, g \rangle \Psi_v(g).$$

Это доказывает утверждение “А”. Утверждение “Б” доказывается аналогично. Действительно, если функция $i\langle h_0, \cdot \rangle \Psi_v$ является преобразованием Фурье некоторого распределения $\eta \in \mathcal{S}'$, то, с одной стороны, $i\langle h_0, g \rangle \Psi_v(g) = \langle \eta, \varphi_g \rangle$, а с другой стороны, как и при доказательстве утверждения “А”, устанавливаем, что $i\langle h_0, g \rangle \Psi_v(g) = \langle v, \varphi'_g h_0 \rangle$. Утверждения “В” и “Г” следуют из равенств

$$\Psi'_v(g) g_0 = \langle v, \varphi_\cdot \rangle'(g) g_0 = \langle v, i\langle \cdot, g_0 \rangle \varphi_g(\cdot) \rangle = \langle i\langle \cdot, g_0 \rangle v, \varphi_g(\cdot) \rangle = \Psi_{i\langle \cdot, g_0 \rangle v}.$$

Линейное подпространство H ЛВП E называется гильбертовым подпространством, если в H задана гильбертова норма, относительно которой H полно, и каноническое вложение $H \mapsto E$ непрерывно. Распределение $v \in \mathcal{S}'$ называется $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемым вдоль H , если v $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемо вдоль каждого элемента $h \in H$ и отображение $h \in H \mapsto v' h \in \mathcal{S}'$ непрерывно относительно топологии $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S}_1)$. Дифференцируемость вдоль H в смысле Фомина определяется аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть B – линейное симметричное непрерывное отображение $E' \rightarrow E$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $a \in E$. Фейнмановской α -мерой с ковариационным оператором B и средним значением a называется распределение $\Phi_{B,a,\alpha}$, преобразование Фурье которого имеет вид

$$\Psi(\Phi_{B,a,\alpha})(g) = e^{\alpha \langle Bg, g \rangle / 2 + i g(a)}.$$

Если $\alpha = -1$ и оператор B положительный, то $\Psi(\Phi_{B,a,\alpha})$ является преобразованием Фурье некоторой гауссовой меры на E (может быть, не σ -аддитивной). Следовательно, число $\langle \Phi_{B,a,\alpha}, \varphi \rangle$ естественно назвать интегралом от φ по такой гауссовой мере.

Если $\alpha = i$ и оператор B положительный, то $\Phi_{B,0,\alpha}$ – “классическая” псевдомера Фейнмана.

Если $E = Q \times P$, где Q и P – ЛВП, $Q' = P$, $P' = Q$, $B: (q, p) \mapsto (p, q)$, $a = 0$ и $\alpha = i$, то $\Phi_{B,a,\alpha}$ называется симплектической или гамильтоновой псевдомерой Фейнмана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если при любом $g \in E'$ функция $\langle g, \cdot - a \rangle$ принадлежит $\mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$, то фейнмановская α -мера v с ковариационным оператором B и средним a $\mathcal{S}_1$ -дифференцируема в смысле Фомина вдоль любого элемента $h \in B(E')$ и ее логарифмическая производная вдоль h определяется формулой

$$\beta^v(h, \cdot) = \frac{1}{\alpha} \langle B^{-1}h, \cdot - a \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению “В” предложения 2.2 Ψ_v – дифференцируемая функция и $\forall h \in B(E')$

$$\Psi\left(\frac{1}{\alpha} \langle B^{-1}h, \cdot - a \rangle v\right) = \frac{1}{\alpha} [i \Psi'_v(B^{-1}h) - \langle B^{-1}h, a \rangle \Psi_v] = -i \langle h, \cdot \rangle \Psi_v.$$

В силу утверждения “А” предложения 2.2 правая часть этого равенства равна $\Psi(v'h)$. Утверждение предложения 2.3 теперь следует из единственности распределения, имеющего данное преобразование Фурье.

3. ФОРМУЛА РАМЕРА

В двух нижеследующих теоремах мы предполагаем, что $v \in \mathcal{S}'$, H – гильбертово подпространство ЛВП E и распределение v дифференцируемо вдоль H . Скалярное произведение в H обозначается символом $(\cdot, \cdot)_H$. Если $E = E_1 \times E_2$ и f – функция, заданная в E , то символы f'_1 , f'_2 и f''_{12} обозначают соответствующие “частные” производные в смысле Гато.

ТЕОРЕМА 3.1 (инфинитезимальная формула Рамера). Пусть F – отображение $\mathbb{R}^1 \times E \rightarrow E$ такое, что для каждого t из некоторой окрестности V некоторой точки $t_0 \in \mathbb{R}^1$ отображение $F(t, \cdot)$ $\mathcal{S}$ -допустимо и имеет дважды дифференцируемое обратное отображение $T(t, \cdot)$. Пусть, кроме того, векторное поле $k_t \in \vec{E}$, определенное в V формулой

$$T'_1(t, \cdot) = k_t(T(t, \cdot)),$$

таково, что $k_t(E) \subset H$ и производная поля k_t вдоль H в каждой точке $x \in E$ является оператором Гильберта–Шмидта в H . Пусть, наконец, существуют ортонормированный базис (e_n) в H и элемент $\eta \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$ такие, что для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}_1$ справедливо равенство

$$\eta\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} [\beta^v(e_n, T(t_0, \cdot))(e_n, T'_1(t_0, \cdot))_H + (T''_{12}(t_0, \cdot)T'_2(t_0, \cdot)^{-1}e_n, e_n)_H] \varphi.$$

Тогда функция $f_F^v: t \in \mathbb{R} \mapsto vF(t, \cdot)^{-1} \in \mathcal{S}'$ дифференцируема в точке t_0 и $\rho(t_0, f_F^v) = \eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя предложение 2.1, можно доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall h \in H$ и $\forall \varphi \in \mathcal{S}_1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \langle (h, e_n)_H v, \varphi' e_n \rangle &= -\langle (h' e_n, e_n)_H v, \varphi \rangle - \langle (h, e_n)_H v' e_n, \varphi \rangle = \\ &= -\langle (h' e_n, e_n)_H v, \varphi \rangle - (h, e_n)_H \langle \beta^v(e_n, \cdot) v, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\varphi' h = \varphi' \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n)_H e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n)_H \varphi' e_n,$$

справедливо равенство

$$\langle \varphi' h, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (h, e_n)_H v, \varphi' e_n \rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} [\langle (h' e_n, e_n)_H v, \varphi \rangle + (h, e_n)_H \langle \beta^v(e_n, \cdot) v, \varphi \rangle],$$

которое в силу предложения 2.1 означает, что

$$\langle v' h, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} [\langle (h' e_n, e_n)_H v, \varphi \rangle + (h, e_n)_H \langle \beta^v(e_n, \cdot) v, \varphi \rangle].$$

Это равенство, в свою очередь, показывает, что если определить векторное поле h , положив $h(\cdot) = G'_1(0, \cdot)$, где G – некоторое отображение $\mathbb{R}^1 \times E \mapsto E$, то

$$\langle v'_G, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} [\langle (G''_{12} e_n, e_n)_H v, \varphi \rangle + (G'_1, e_n)_H \langle \beta^v(e_n, \cdot) v, \varphi \rangle].$$

Если применить это равенство в случае, когда $G(t, \cdot) = T(t_0 + t, F(t_0, \cdot))$ (тогда $h(\cdot) = k_{t_0}$), то получится утверждение теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В естественных обозначениях

$$\rho(t_0, f_F^v)(x) = \text{tr}_H [\beta^v(\cdot, T(t_0, x)) \otimes T'_1(t_0, x) + T''_{12}(t_0, x) T'_2(t_0, x)^{-1}].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В предположениях теоремы 3.1 распределение v дифференцируемо вдоль F и $\forall \varphi \in \mathcal{S}_1$ справедливо равенство

$$\beta_F^v(x)\varphi(x) = \operatorname{tr}_H [\beta^v(\cdot, x) \otimes T_1'(0, x) + T_{12}''(0, x)T_2'(0, x)^{-1}] \varphi(x).$$

Напомним, что если A – непрерывный линейный оператор в гильбертовом пространстве, то его детерминант $\det A$ может быть определен по формуле $\det A = \exp \operatorname{tr} \ln A$. Если $A = I + A_0$, то определитель Карлемана–Фредгольма порядка $n \in \mathbb{N}$ определяется равенством

$$\det_n(I + A_0) = \exp \operatorname{tr} \left[\ln A_0 - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \frac{A_0^j}{j} \right].$$

В частности, $\det_1(I + A_0)$ – это обычный детерминант и $\det_2(I + A_0)$ называется определителем Карлемана–Фредгольма без указания порядка.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и, кроме того, для каждого $t \in \mathbb{R}^1$ найдется функция $\eta_t \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$ такая, что $\forall \varphi \in \mathcal{S}_1$

$$\eta_t(\cdot)\varphi = \det_2 T_2'(t, \cdot) \exp \left\{ \int_0^t \operatorname{tr}_H \left[\beta^v(\cdot, T(\tau, \cdot)) \otimes T_1'(\tau, \cdot) + T_{12}''(\tau, \cdot)T_2'(\tau, \cdot)^{-1} \right] d\tau \right\} \varphi,$$

где произведение детерминанта Карлемана–Фредгольма $\det_2 \dots$ и $\exp(\dots)$ определено равенством

$$\begin{aligned} \det_2 T_2'(t, \cdot) \exp(\dots) \varphi &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \exp \sum_{n=1}^k \left((\ln(T_2'(t, \cdot)) - T_2'(t, \cdot) + I) e_n, e_n \right)_H \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \int_0^t \sum_{n=1}^k \left[\beta^v(e_n, T(\tau, \cdot)) (e_n, T_1'(\tau, \cdot))_H + (T_{12}''(\tau, \cdot)T_2'(\tau, \cdot)^{-1} e_n, e_n)_H \right] d\tau \right\} \varphi. \end{aligned}$$

Тогда $vF(t, \cdot)^{-1} = \eta_t v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f_F^v удовлетворяет уравнению

$$(f_F^v)'(t) = \rho(t, f_F^v) f_F^v.$$

Поэтому

$$vF(t, \cdot)^{-1} = f_F^v(t) = \exp \left[\int_0^t \rho(t, f_F^v) d\tau \right].$$

Теперь достаточно воспользоваться явным выражением для ρ , определяемым теоремой 3.1.

Теорема 3.2 является обобщением на некоторые распределения негауссовой версии теоремы Рамера [4]. Обобщение самой теоремы Рамера на случай фейнмановских псевдомер дается следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть E — гильбертово пространство и v — фейнмановская i -мера с единичным ковариационным оператором и нулевым средним. Пусть также выполняются условия теоремы 3.2. Тогда

$$vF(t, \cdot)^{-1} = \delta(t, \cdot)v,$$

где

$$\delta(t, x) = \det_2 T'_2(t, \cdot) \exp \left\{ i \operatorname{tr}_H \left[\frac{1}{2} (T(t, x) \otimes T(t, x) - x \otimes x) - T'_2(t, x) - I \right] \right\},$$

и определение правой части аналогично тому, которое использовалось в теореме 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 3.3 непосредственно следует из теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Аналоги теорем 3.2 и 3.3 справедливы и для определителей Карлемана–Фредгольма порядка $n > 2$.

ПРИМЕР 3.1. Пусть E — ЛВП. Функция $f: E \mapsto \mathbb{R}'$ называется исчезающей на бесконечности, если $\forall \epsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset E$ такое, что $|f(x)| < \epsilon$ при $x \notin K$. Множество всех функций на E , исчезающих на бесконечности, обозначается символом $F_0(E)$. Пусть $\mathcal{S}$ — комплексное линейное пространство всех ограниченных комплексных функций на E , наделенное топологией, определяемой семейством полунорм $\{p_f : f \in F_0(E)\}$, где для каждой $f \in F_0(E)$ и каждой $\varphi \in \mathcal{S}$

$$p_f(\varphi) = \sup_{x \in E} |\varphi(x)f(x)|.$$

Тогда $\mathcal{S}'$ — это векторное пространство всех комплексных мер Радона на E . Следовательно, “классическая” псевдомера Фейнмана не может быть распределением из $\mathcal{S}'$.

Пусть $\mathcal{S}_1$ — линейное подпространство в $\mathcal{S}$, состоящее из тех функций f , для которых

$$\prod_{j=1}^n (1 + |g_j(\cdot)|) f \in \mathcal{S}$$

при любом $n \in \mathbb{N}$ и любых $g_1 \dots g_n \in E'$. Тогда $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемость вдоль $h \in E$ означает так называемую дифференцируемость в смысле Скорохода. $\mathcal{S}_1$ -дифференцируемость в смысле Фомина вдоль $h \in E$ совпадает со стандартной дифференцируемостью в смысле Фомина, означающей, что для любого борелевского множества $B \subset E$ существует

$$(v'h)(B) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(B + th) - v(B)}{t}.$$

ПРИМЕР 3.2 (ср. с [3]). Комплексная функция f на ЛВП G называется гладкой, если она имеет производные Гато всех порядков, причем для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $(x, h) \in G \times G \mapsto f^{(n)}(x)h \dots h \in \mathbb{C}$ непрерывна на каждом компактном множестве в $G \times G$.

Пусть E есть ЛВП и E'_τ – пространство всех линейных непрерывных функционалов на E , наделенное топологией Макки (т.е. сильнейшей локально-выпуклой топологией τ , для которой $(E', \tau)'$ канонически изоморфно E). Пусть $\mathcal{E}(E'_\tau)$ – комплексное линейное пространство всех гладких функций на E'_τ .

Для любых $\varphi \in \mathcal{E}(E'_\tau)$, $f \in F_0(E'_\tau)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и для каждого компактного множества K в E'_τ положим

$$P_{f,K,n}(\varphi) = \sup \{ |f(x)\varphi^{(n)}(x)h \dots h| : h \in K, x \in E \}.$$

Пусть $\mathcal{E}_f(E'_\tau)$ – линейное подпространство в $\mathcal{E}(E'_\tau)$, состоящее из всех функций $\varphi \in \mathcal{E}(E'_\tau)$, для которых $P_{f,K,n}(\varphi) < \infty$ при любых $f \in F_0(E'_\tau)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и компактном множестве $K \subset E'_\tau$. Функции $P_{f,K,n}$ – это полунормы на $\mathcal{E}_f(E'_\tau)$. Примем, что именно они определяют топологию в $\mathcal{E}_f(E'_\tau)$.

Пусть $\mathcal{S}$ – комплексное линейное пространство всех функций на E , которые являются преобразованиями Фурье элементов из $\mathcal{E}_f(E'_\tau)$. Топологию в $\mathcal{S}$ определим так, чтобы преобразование Фурье $\Psi: \mathcal{E}_f(E'_\tau) \mapsto \mathcal{S}$ было топологическим изоморфизмом.

Пространство $\mathcal{S}'$ содержит все меры Радона на E и “классические” фейнмановские псевдомеры (с подходящими ковариационными операторами). Заметим, что $\mathcal{S}$ содержит в качестве векторного подпространства пространство, определенное Альберерио и Хоэг-Кроном [1] как множество преобразований Фурье σ -аддитивных комплексных мер, но не совпадает с ним. Это значит, что совокупность функций, у которых существует интеграл Фейнмана, в нашем случае шире, чем в случае, исследованном Альберерио и Хоэг-Кроном.

4. ИЗМЕНЕНИЯ ФЕЙНМАНОВСКИХ ПСЕВДОМЕР, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть для каждого $\gamma \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ символом F_γ обозначено отображение $\mathbb{R}^1 \times E$ в E и $v \in \mathcal{S}'$. Предположим, что при любых $t \in \mathbb{R}^1$ и $\varphi \in \mathcal{S}_1$ функция $\gamma \in (\alpha, \beta) \mapsto \langle vF_\gamma(t, \cdot)^{-1}, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$ имеет аналитическое продолжение в некоторую область $W \supset (\alpha, \beta)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если для каждого $\gamma \in (\alpha, \beta)$ распределение v имеет логарифмическую производную вдоль F_γ и если для каждого $x \in E$ функция $\gamma \mapsto \beta_{F_\gamma}^v(x)$ допускает аналитическое продолжение на W , для которого $\beta_{F_\gamma}^v(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$ при $\gamma \in W$, то вполне естественно назвать $\beta_{F_\gamma}^v(x)$ логарифмической производной распределения v вдоль F_γ при любом $\gamma \in W$, а не только при $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Используя это понятие, можно естественным образом определить производные и логарифмические производные распределений на E вдоль некоторых векторов, принадлежащих комплексификации E_C пространства E , а также вдоль отображений $E_C \mapsto E_C$, которые могут быть получены из отображений $E \mapsto E$ аналитическим продолжением по какому-либо параметру и

расширением с E на E_C . Для таких производных справедливы аналоги вышеприведенных утверждений, отличающиеся от них только надлежащей модификацией исходных предположений. В частности, таким образом можно получить следующее утверждение (здесь и далее E – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_E$ и $\mathcal{S}$ – пространство, описанное в примере 3.2).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть A – ядерный нормальный оператор в E_C , отображение $I + A$ обратимо, и все собственные значения оператора A имеют неотрицательные мнимые части. Тогда для $v = \Phi_{I,0,i}$ справедливо равенство

$$(v, e^{i(A \cdot, A \cdot)_E/2 + i(A \cdot, \cdot)_E} \varphi)_E = \det(I + A)^{-1} (v(I + A), \varphi)_E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (α_n) – последовательность собственных значений оператора $I + A$ и (e_n) – базис в E , состоящий из собственных векторов оператора $I + A$. Для каждого $t \in [0, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\alpha_n(t) = \frac{1 + \alpha_n}{2} + \frac{1 - \alpha_n}{2} e^{it\pi/2}$$

и для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times E$ примем, что

$$F(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) (e_n, x)_E e_n.$$

Тогда $F(0, \cdot) = I$, $F(1, \cdot) = I + A$ и можно воспользоваться теоремой 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 4.1 [5]. Пусть B – самосопряженный ядерный оператор в E_C , для которого отображение $I + B$ обратимо. Обозначим символом $\text{Ind}(I + B)$ число отрицательных собственных значений оператора $I + B$ с учетом их кратности. Тогда для $v = \Phi_{I,0,i}$ и всех $\varphi \in \mathcal{S}$ справедливо равенство

$$(e^{i(B \cdot, \cdot)_E/2} \varphi, v)_E = |\det(I + B)|^{1/2} e^{-\pi i \text{Ind}(I + B)/2} \int e^{i(x, (I + B)x)_E/2} \Psi^{-1} \varphi(dx). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно найти нормальный оператор A , для которого $(I + A)^2 = I + B$ и собственные значения которого имеют неотрицательные мнимые части. Для этого обозначим символами $b_1, b_2, \dots, b_n$ все отрицательные собственные значения оператора B такие, что $|b_j| > 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Примем, что A – оператор с теми же собственными векторами, что и B , и собственными значениями $\alpha_n = -1 + i\sqrt{1 + b_n}$. (Именно при этом получается показатель $-\pi i \text{Ind}(I + B)/2$ экспоненты.)

Заметим, что формулы, сходные с (4.1), справедливы, если A и B – операторы Гильберта–Шмидта, а не только ядерные, и если v имеет произвольное среднее значение. Кроме того, аналогичные формулы справедливы для гамильтоновых псевдомер Фейнмана.

В заключение покажем, как из наших результатов следуют формулы Мелера и их обобщения.

Прежде всего заметим, что существуют два типа “классических” формул Мелера. Формулы первого типа [16] описывают интегральное ядро оператора $\exp(-tH)$, где $H = (-d^2/dx^2 + x^2 - 1)/2$. Формулы Мелера второго типа определяют интегральное ядро оператора $\exp(-tL)$, где $L = (-d^2/dx^2 + 2xd/dx)/2$ (для простоты мы ограничились одномерным случаем). Очевидно, что если H – оператор в $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$, то L – его образ при изоморфизме гильбертовых пространств

$$L_2(\mathbb{R}^1, dx) \longmapsto L_2(\mathbb{R}^1, \pi^{-1/2} e^{-x^2} dx).$$

Чтобы получить формулу Мелера второго типа, достаточно заметить, что $\exp(-tL)$ дает решение задачи Коши для уравнения Колмогорова, которое ассоциировано со стохастическим уравнением

$$x(t) = b(t) - \int_0^t b(s) ds,$$

описывающим сдвиг винеровской меры. Ниже рассматриваются только формулы Мелера второго типа (они называются просто формулами Мелера). Мы покажем, как формулы Мелера можно обобщить на классические псевдомеры Фейнмана. Сначала, однако, рассмотрим общую ситуацию.

Для каждого распределения $\gamma \in S'$ определим его конечномерные проекции как образы γ при линейных непрерывных отображениях E на конечномерные линейные пространства. Если γ – фейнмановская α -мера с $\alpha = i$ и ковариационным оператором B и если P – линейное непрерывное отображение E на $\mathbb{R}^n$, то γP^{-1} – это фейнмановская α -мера на $\mathbb{R}^n$ с $\alpha = i$ и ковариационным оператором PBP^* , т.е. мера с плотностью

$$f_{\gamma, P}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det PBP^*} e^{in\pi/2} e^{-i((PBP^*)^{-1}x, x)_{\mathbb{R}^n}/2} \quad (4.2)$$

относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$. Эта формула и теорема 4.1 позволяют обобщить формулу Мелера (см. ниже).

Если $\gamma = v(I + A)$, то по теореме 4.1

$$\gamma = \det(I + A) e^{(A \cdot, A \cdot)_E/2 + i(A \cdot, \cdot)_E}.$$

Следовательно,

$$\beta^\gamma(h, \cdot) = i(h, \cdot)_E + i(Ah, Ah)_E + 2i(Ah, \cdot)_E$$

для любого $h \in E_C$. Допустим, что существует положительно-определенный оператор B в E такой, что

$$\langle Bh, h \rangle = \langle h, h \rangle + \langle Ah, Ah \rangle + 2\langle Ah, h \rangle$$

для каждого $h \in E$. Тогда формула для β^γ показывает, что γ – это фейнмановская α -мера с $\alpha = i$ и ковариационным оператором B . В таком случае формула (4.2) для

$f_{\gamma, P}$ является обобщением формулы Мелера в двух отношениях: во-первых, она справедлива не только для гауссовых мер и, во-вторых, она справедлива не только для сдвигов вдоль линейных векторных полей в пространстве непрерывных функций, заданных на сегменте вещественной оси (таким сдвигом винеровская мера может быть преобразована в меру, переходные вероятности которой определяются классической формулой Мелера [16]), но и для сдвигов вдоль линейных векторных полей на произвольных линейных пространствах.

Вернемся теперь к классическим псевдомерам Фейнмана. Пусть $E = W_2^1(0, \infty)_0$ – пространство абсолютно непрерывных функций, заданных на $[0, \infty)$, обращающихся в нуль в точке 0 и имеющих квадратично интегрируемые производные первого порядка. Определим в E гильбертову норму

$$\|g\| = \left(\int_0^\infty |g'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пусть v – фейнмановская α -мера на E с $\alpha = i$ и единичным ковариационным оператором. Определим отображение $A: E \rightarrow E$ формулой

$$(Ah)(t) = - \int_0^t h(s) ds.$$

Обобщенная формула Мелера дает “переходную амплитуду” для фейнмановской псевдомеры $\gamma = v(I + A)$ на E . Эта “амплитуда” может быть найдена по двумерным проекциям γ , определенным с помощью отображений

$$P_{t_1, t_2}: h \in E = W_2^1(0, \infty)_0 \mapsto ((h, z_{t_1})_E, (h, z_{t_2})_E) \in \mathbb{R}^2,$$

где $t_1, t_2 \in (0, \infty)$, $t_1 \neq t_2$ и функция $z_t \in W_2^1(0, \infty)_0$ определяется равенством $z_t(\tau) = \min(\tau, t)$. Если $P = P_{t_1, t_2}$ и $t = t_1 - t_2$, то равенство

$$g(t, x, z) = \left(\int_{-\infty}^\infty f_{\gamma, P}(x, v) dv \right)^{-1} f_{\gamma, P}(x, z)$$

– это обобщенная формула Мелера для фейнмановской псевдомеры.

В данной статье мы рассматриваем метод определения конечномерных проекций для распределений, имеющих вид $\exp[-\langle C \cdot, \cdot \rangle]v$, где C – ядерный нормальный оператор в E и v – фейнмановская псевдомера. Аналогично можно исследовать распределение вида

$$e^{\beta_1 \langle C \cdot, \cdot \rangle} e^{\beta_2 \langle b, \cdot \rangle} v,$$

где $b \in E$ и $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. Более того, b может быть случайным элементом в E и исследование этого случая приводит к стохастическим версиям (обобщенных) формул Мелера (отметим, что стохастическая версия (обобщенной) формулы Мелера первого типа может быть получена с помощью известных решений стохастического уравнения Шредингера [17]).

Благодарности. Авторы благодарны проф. А. И. Кириллову за многочисленные полезные замечания, которые значительно улучшили текст статьи.

О. Г. Смолянов благодарит математический факультет Университета г. Свонзи (Уэльс, Великобритания) за гостеприимство и EPSRC (грант № GR/L31425), а также Российский фонд фундаментальных исследований (грант № 96-01-0030).

Список литературы

- [1] *S. Albeverio, R. Høgh-Krohn.* Mathematical theory of Feynman path integrals. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [2] *В. П. Маслов, А. М. Чеботарев.* ТМФ. 1976. Т. 28. № 3. С. 291–307.
- [3] *О. Г. Смолянов, М. О. Смолянова.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 1. С. 3–13.
- [4] *R. J. Ramer.* J. Funct. Anal. 1974. V. 15. № 2. P. 166–187.
- [5] *D. Elworthy, A. Truman.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 1984. V. 41. № 2. P. 115–142.
- [6] *S. Albeverio, Z. Brezezniak.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 5. P. 2135–2156.
- [7] *O. G. Smolyanov, H. V. Weizsaecker.* Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. 1999. V. 2. № 1. P. 51–79.
- [8] *O. G. Smolyanov, H. V. Weizsaecker.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1985. V. 321. № 1. P. 103–108.
- [9] *O. G. Smolyanov, H. V. Weizsaecker.* J. Funct. Anal. 1993. V. 118. № 2. P. 455–476.
- [10] *Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерном пространстве. М.: Наука, 1983.
- [11] *D. Bell.* Trans. Am. Math. Soc. 1985. V. 290. № 2. P. 841–845.
- [12] *Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, М. О. Смолянова.* Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 288–292.
- [13] *И. М. Гельфанд, А. М. Яглом.* УМН. 1956. Т. 11. № 1. С. 77–114.
- [14] *О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [15] *О. Г. Смолянов, А. Ю. Хренников.* ДАН СССР. 1985. Т. 281. № 2. С. 279–283.
- [16] *B. Simon.* Functional integration and quantum physics. New York: Acad. Press, 1979.
- [17] *В. П. Белаевкин, О. Г. Смолянов.* Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 5. С. 588–593.

Поступила в редакцию 5.VI.1998 г.,
после доработки 18.II.1999 г.