Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, В. А. Гейлер, Калибровочно-периодические точечные возмущения на плоскости Лобачевского, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 3, 368–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:32:26

© 1999 г.

Й. Брюнинг*, В. А. Гейлер†

КАЛИБРОВОЧНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Изучаются периодические точечные возмущения оператора Шредингера с однородным магнитным полем на плоскости Лобачевского. Доказано, что лакуны спектра возмущенного оператора параметризуются элементами K_0 -группы некоторой C^* -алгебры, ассоциированной с оператором. В частности, если упомянутая алгебра обладает свойством Кадисона, то спектр оператора имеет зонную структуру.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H – периодический оператор Шредингера с магнитным полем на евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$; как хорошо известно, структура спектра этого оператора критическим образом зависит от потока η магнитного поля через элементарную ячейку решетки периодов потенциала. Если число η рационально, то спектр H имеет зонную структуру, в противном случае спектр H содержит участки, являющиеся канторовским множеством [1]. Дискретная версия оператора H (так называемый оператор Харпера) имеет чисто канторовский спектр при почти всех значениях η [2–4]. Ситуация иная в случае периодического оператора Шредингера H с магнитным полем на плоскости Лобачевского. Например, спектр дискретной версии H с группой периодов, равной модулярной группе $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, имеет зонную структуру при всех значениях потока η [5]. Для оператора H с гладким потенциалом, инвариантным относительно кокомпактного действия некоторой вполне разрывной группы, достаточные условия зонности спектра были указаны в [6–8]. С другой стороны, весьма интересный класс периодических операторов Шредингера получается с помощью точечных возмущений, которые доставляют большой набор явно решаемых моделей [9–11]. Следует отметить, что точечные возмущения двумерного оператора Шредингера с магнитным полем широко используются в теоретической физике для исследования транспортных свойств двумерных систем (см., например, обзоры [12, 13] и библиографию в них).

В настоящей статье доказывается, что лакуны спектра точечного периодического возмущения оператора Шредингера с магнитным полем на плоскости Лобачевского параметризуются элементами K_0 -группы некоторой ассоциированной с оператором

*Humboldt-Universität, Institut für Mathematik, Berlin, BRD

†Мордовский государственный университет, Саранск, Россия

C^* -алгебры. В частности, если эта алгебра имеет свойство Кадисона, то спектр соответствующего оператора имеет зонную структуру (широкий класс алгебр со свойством Кадисона указан в [7] и [8]). Помимо прочего, этот результат представляется интересным в контексте вопроса о влиянии искривления двумерной электронной системы на ее спектральные и транспортные свойства [14–16, 8].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной статье плоскость Лобачевского X реализована как верхняя полуплоскость Пуанкаре $\{z = x + iy \in \mathbf{C} : y > 0\}$ со стандартной метрикой

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2} (dx^2 + dy^2),$$

так что кривизна X равна $R = -2/a^2$. В этом случае расстояние между точками $z, z' \in X$ имеет вид

$$d(z, z') = a \operatorname{Arch} \left[1 + \frac{|z - z'|^2}{2yy'} \right],$$

а инвариантная площадь дается формулой

$$d\sigma = \frac{a^2}{y^2} dx \wedge dy.$$

По определению постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, ортогональное к X , представляет собой 2-форму

$$\mathbf{B} = B \frac{a^2}{y^2} dx \wedge dy,$$

где $B \in \mathbf{R}$ есть напряженность поля. Форма $\mathbf{B}$ точна, т.е. $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$, где 1-форма $\mathbf{A}$ называется векторным потенциалом поля $\mathbf{B}$. Для векторного потенциала мы используем так называемую калибровку Ландау

$$\mathbf{A} = Ba^2 y^{-1} dx.$$

Гамильтониан H^0 свободной квантово-механической частицы, движущейся по плоскости X в поле $\mathbf{B}$, представляет собой замыкание симметричного оператора

$$\frac{1}{a^2} \left\{ -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2iby \frac{\partial}{\partial x} + b^2 \right\}$$

с областью определения $C_0^\infty(X)$ [17]. Мы используем систему единиц, в которой $e = c = \hbar = 1$, $m = 1/2$, и обозначаем $b = Ba^2$. Хорошо известно, что $\mathcal{D}(H^0) \subset C(X)$ (см., например, [18]). Спектр H^0 состоит из двух частей [17]: конечного числа собственных значений (уровней Ландау)

$$E_n = a^{-2}(|b|(2n+1) - n(n+1)), \quad 0 \leq n \leq |b| - \frac{1}{2}$$

и непрерывного спектра

$$E(\nu) = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{4} + b^2 + \nu^2 \right], \quad 0 \leq \nu < \infty. \quad (1)$$

Основную роль в нашем исследовании играет резольвента $R^0(\zeta) = (H^0 - \zeta)^{-1}$ оператора H^0 . Интегральное ядро резольвенты (т.е. функция Грина $G^0(z, z'; \zeta)$ оператора H^0) найдено в [17], оно имеет вид

$$G^0(z, z'; \zeta) = \frac{\sigma^{-t}}{4\pi} \exp(ib\varphi) \frac{\Gamma(t+b)\Gamma(t-b)}{\Gamma(2t)} F\left(t+b, t-b; 2t; \frac{1}{\sigma}\right). \quad (2)$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция,

$$\sigma = \operatorname{ch}^2 \frac{d(z, z')}{2a}, \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{x - x'}{y + y'},$$

а функция $t = t(\zeta)$ при $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0)$ согласно (1) однозначно определена условием

$$\zeta = \frac{t(1-t) + b^2}{a^2}, \quad \operatorname{Re} t > 0.$$

В следующей ниже лемме перечислены свойства функции Грина G^0 , которые нам потребуются в дальнейшем; чисто технические доказательства этих свойств, опирающиеся на формулу (2), мы опускаем.

ЛЕММА 1.

1. Для любого $z \in X$ существует предел

$$q(\zeta) = \lim_{z' \rightarrow z} \left[G^0(z, z'; \zeta) - \frac{1}{2\pi} \ln d(z, z') \right],$$

который не зависит от z и равен

$$q(\zeta) = \frac{1}{4\pi} [\psi(t+b) + \psi(t-b) + 2C_E - \ln 4a^2]$$

(здесь $\psi(z) = [\ln \Gamma(z)]'$, а C_E — постоянная Эйлера).

2. $\operatorname{Re} q(\zeta) \rightarrow -\infty$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$.

3. Пусть K — компактное подмножество X и пусть z_0 — точка из X . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\zeta \in \mathbf{C}$ такого, что $\operatorname{Re} \zeta < 0$, существуют константы $c_1(K, z_0, \varepsilon, \zeta) \equiv c_1 > 0$ и $\tilde{c}_1(\varepsilon, \zeta) \equiv \tilde{c}_1 > 0$ такие, что

$$\sup\{|G^0(z, z'; \zeta)| : z' \in K\} \leq c_1 \exp(-\tilde{c}_1 d(z, z_0)),$$

как только $d(z, K) \geq \varepsilon$. Более того, если K, z_0 и ε фиксированы, то $c_1(\zeta) = o(1)$, а $\tilde{c}_1(\zeta) \rightarrow +\infty$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$.

4. Для любых $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0)$ и $z \in X$ интеграл

$$\int_X |G^0(z, z'; \zeta)|^2 d\sigma(z')$$

конечен и не зависит от z .

5. Пусть K – компактное подмножество X и z_0 – фиксированная точка в X . Тогда для любого $\zeta \in \mathbf{C}$ такого, что $\operatorname{Re} \zeta < 0$, существуют константы $c_2(K, z_0, \zeta) \equiv c_2 > 0$ и $\tilde{c}_2(\zeta) \equiv \tilde{c}_2 > 0$ такие, что

$$\left[\int_K |G^0(z, z'; \zeta)|^2 d\sigma(z') \right]^{1/2} \leq c_2 \exp(-\tilde{c}_2 d(z, z_0)).$$

Более того, $\tilde{c}_2(\zeta) \rightarrow +\infty$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$. Если K и z_0 фиксированы, то $c_2(\zeta) = O(1)$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$.

2. ТОЧЕЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА H^0

Пусть Γ – некоторая группа изометрий плоскости X . Хотя поле $\mathbf{B}$ инвариантно относительно преобразований из Γ , гамильтониан H^0 , вообще говоря, не является Γ -инвариантным. Чтобы получить группу инвариантности гамильтониана H^0 , мы должны расширить Γ до так называемой группы магнитных трансляций [19, 7]. Напомним конструкцию этой группы. Через U будем обозначать стандартное унитарное представление группы Γ в $L^2(X)$: $U_\gamma f(z) = f(\gamma^{-1}z)$ ($\gamma \in \Gamma$, $f \in L^2(X)$), а через γ^* – индуцированное отображение пространства дифференциальных форм. Пусть $\gamma^* \mathbf{A} \neq \mathbf{A}$, тогда $U_\gamma H^0 \neq H^0 U_\gamma$. Тем не менее $d(\gamma^* \mathbf{A} - \mathbf{A}) = 0$, поскольку $\gamma^* \mathbf{B} = \mathbf{B}$. Следовательно, существует функция $\omega_\gamma \in C^\infty(X)$, для которой $d\omega_\gamma = \gamma^* \mathbf{A} - \mathbf{A}$. Зафиксируем для каждого $\gamma \in \Gamma$ одну из таких функций ω_γ ; при $\gamma = 1$ полагаем $\omega_1 = 0$. Через T_γ^0 обозначим унитарный оператор в $L^2(X)$, действующий по формуле $T_\gamma^0 f = \exp(i\omega_\gamma) U_\gamma f$, $f \in L^2(X)$. Тогда $T_\gamma^0 H^0 = H^0 T_\gamma^0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Отображение $\gamma \mapsto T_\gamma^0$ представляет собой проективное представление группы Γ в пространстве $L^2(X)$; другими словами, $T_\beta^0 T_\gamma^0 = \Theta(\beta, \gamma) T_{\beta\gamma}^0$ для любых $\beta, \gamma \in \Gamma$, где $\Theta(\beta, \gamma) \in \mathbf{C}$, $|\Theta(\beta, \gamma)| = 1$. Семейство $\Theta(\beta, \gamma)$ обладает свойством $\Theta(\gamma_1, \gamma_2) \Theta(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) = \Theta(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) \Theta(\gamma_2, \gamma_3)$, т.е. представляет собой 2-коцикл на группе Γ с коэффициентами в $\mathbf{U}(1)$. Этот коцикл определяет расширение $1 \rightarrow \mathbf{U}(1) \rightarrow M(\Gamma, \Theta) \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$ группы Γ с помощью $\mathbf{U}(1)$. Группа $M(\Gamma, \Theta)$ называется группой магнитных трансляций. Ее элемент однозначно определяется парой (γ, ζ) , где $\gamma \in \Gamma$, $\zeta \in \mathbf{U}(1)$, и в дальнейшем отождествляется с этой парой. Обозначим через $[\gamma, \zeta]$ унитарный оператор ζT_γ^0 ; тогда соответствие $(\gamma, \zeta) \mapsto [\gamma, \zeta]$ есть точное линейное унитарное представление группы $M(\Gamma, \Theta)$ в пространстве $L^2(X)$; это представление будем обозначать через T . Очевидно, что оператор H^0 инвариантен относительно представления T .

Далее мы будем рассматривать только группы Γ , удовлетворяющие условиям:

- 1) Γ действует собственно разрывно на X ;
- 2) пространство орбит $\Gamma \backslash X$ компактно.

Зафиксируем раз и навсегда некоторую фундаментальную область F группы Γ , т.е. такое множество $F \subset X$, что: а) $\overline{F} = \overline{\text{Int } F}$; б) $\overline{F}$ компактно; в) сужение на F канонического отображения $X \rightarrow \Gamma \backslash X$ биективно. Для того чтобы построить Γ -периодическое точечное возмущение оператора H^0 , выберем конечное подмножество $K \subset F$ и обозначим через $\Lambda = \Gamma \cdot K$ орбиту этого множества. Каждый элемент $\lambda \in \Lambda$ имеет единственное представление в виде $\lambda = \gamma\kappa$, где $\gamma \in \Gamma$, $\kappa \in K$. В дальнейшем нам потребуется следующая лемма, доказанная, по существу, в [20] (ниже $\#Y$ обозначает число элементов в множестве Y).

ЛЕММА 2. *Существуют такие константы $c_\Lambda > 0$ и $\tilde{c}_\Lambda > 0$, что для всех $\lambda_0 \in \Lambda$ и $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, имеем*

$$\#\{\lambda \in \Lambda: d(\lambda, \lambda_0) \leq r\} \leq c_\Lambda \exp(\tilde{c}_\Lambda r).$$

Приведем теперь конструкцию точечного возмущения оператора H^0 . Поскольку $\mathcal{D}(H^0) \subset C(X)$, то корректно определено следующее множество:

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{D}(H^0): f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Пусть S – сужение H^0 на область $\mathcal{D}(S) \equiv \mathcal{D}$; очевидно, что S есть симметричный оператор в $L^2(X)$. Самосопряженное расширение H оператора S называется точечным возмущением оператора H^0 , сосредоточенным на множестве Λ , если $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H^0) = \mathcal{D}(S)$. Удобно описывать точечные возмущения оператора H^0 с помощью резольвентной формулы Крейна [21, 10, 11]. Для этой цели зафиксируем некоторое гильбертово пространство $\mathcal{G}$, которое изоморфно произвольному дефектному подпространству оператора S , и определим голоморфные операторнозначные функции

$$B: \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0) \rightarrow L(\mathcal{G}, L^2(X)), \quad Q: \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0) \rightarrow L(\mathcal{G}, \mathcal{G}),$$

удовлетворяющие так называемым (Γ) - и (Q) -условиям Крейна [21] (символ $L(E, F)$ обозначает, как обычно, банахово пространство ограниченных операторов, действующих из E в F). Функции B и Q называются соответственно Γ -функцией и Q -функцией Крейна. Если Γ -функция и Q -функция фиксированы, то определено взаимно однозначное соответствие между точечными возмущениями H оператора H^0 , сосредоточенными на Λ , и самосопряженными операторами A в пространстве $\mathcal{G}$. Это соответствие дается формулой Крейна для резольвент

$$(H - \zeta)^{-1} = (H^0 - \zeta)^{-1} - B(\zeta)[Q(\zeta) + A]^{-1} B^*(\bar{\zeta}). \quad (3)$$

Далее будем обозначать через H_A точечное возмущение оператора H , которое в силу формулы (3) соответствует оператору A ; резольвента оператора H_A будет обозначаться через $R_A(\zeta)$.

Ниже мы дадим явные описания Γ - и Q -функций Крейна, пользуясь теоремой 4 и предложением 4 из [22] (доказательство этих утверждений, данное в [22] для случая пространства $L^2(X)$, где X – область в евклидовом пространстве, сохраняется и для случая

риманова многообразия X). Обозначим через $\mathcal{G}$ пространство $l^2(\Lambda)$, а через $Q(\zeta)$ бесконечную матрицу

$$Q(\lambda, \mu; \zeta) = \begin{cases} G^0(\lambda, \mu; \zeta), & \lambda, \mu \in \Lambda, \quad \lambda \neq \mu, \\ q(\zeta), & \lambda, \mu \in \Lambda, \quad \lambda = \mu. \end{cases}$$

Следующая лемма немедленно вытекает из леммы 1.

ЛЕММА 3.

1. *Существуют такие константы $c_3(\zeta) \equiv c_3 > 0$ и $\tilde{c}_3(\zeta) \equiv \tilde{c}_3 > 0$, что при $\operatorname{Re} \zeta < 0$ и $\lambda \neq \mu$ имеем*

$$|Q(\lambda, \mu; \zeta)| \leq c_3(\zeta) \exp(-\tilde{c}_3(\zeta)d(\lambda, \mu)).$$

Более того, $c_3(\zeta) = o(1)$ и $\tilde{c}_3(\zeta) \rightarrow +\infty$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$.

2. $|Q(\lambda, \lambda; \zeta)| \rightarrow +\infty$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$.

Для произвольных $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0)$ и $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $g_\lambda(\zeta)$ функцию $z \mapsto G^0(z, \lambda; \zeta)$ на X . Ясно, что $g_\lambda(\zeta) \in L^2(X)$ (см. лемму 1). Из лемм 2 и 3 и леммы П.2 приложения получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Существует такое число $E_1 \in \mathbf{R}$, что при всех $\zeta \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} \zeta < E_1$, матрицы $Q(\zeta)$ и $(\langle g_\lambda(\zeta) | g_\mu(\zeta) \rangle)_{\lambda, \mu \in \Lambda}$ задают ограниченные операторы в $l^2(X)$.*

Приведем теперь основной результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 1.

1. *Для любого $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0)$ семейство $(g_\lambda(\zeta))_{\lambda \in \Lambda}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки. Пусть отображение $B(\zeta): l^2(\Lambda) \rightarrow L^2(X)$ дается формулой*

$$B(\zeta)\varphi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\lambda) g_\lambda(\zeta), \quad \varphi \in l^2(\Lambda),$$

тогда $B(\zeta)$ есть Γ -функция Крейна для пары операторов (S, H^0) .

2. *Существует такое $E_0 \in \mathbf{R}$, что при всех $\zeta \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} \zeta < E_0$, матрица $Q(\zeta)$ задает Q -функцию Крейна пары (S, H^0) . Таким образом, при всех $f \in L^2(X)$ имеем*

$$R_A(\zeta)f = R^0(\zeta)f - \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} [Q(\zeta) + A]^{-1}(\lambda, \mu) \langle g_\mu(\zeta) | f \rangle \right) g_\lambda(\zeta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует непосредственно из теоремы 4 работы [22] с учетом вышеприведенной леммы 4.

Нас будут интересовать только T -инвариантные точечные возмущения H_A . Чтобы дать критерий T -инвариантности оператора H_A , введем линейное унитарное представление T^d группы $M(\Gamma, \Theta)$ в пространстве $l^2(\Lambda)$, определяемое формулой $T_{(\gamma, \zeta)}^d \varphi(\lambda) = \zeta \exp(i\omega_\gamma(\lambda)) \varphi(\gamma^{-1}\lambda)$, где $(\gamma, \zeta) \in M(\Gamma, \Theta)$, $\varphi \in l^2(\Lambda)$. Следующее предложение, несложное доказательство которого мы опускаем, дает необходимое и достаточное условие T -инвариантности оператора H_A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Оператор H_A тогда и только тогда T -инвариантен, когда T^d -инвариантен оператор A .

Далее рассматриваются только операторы H_A , инвариантные относительно представления T . С точки зрения физических приложений наиболее интересный класс образуют гамильтонианы H_A , у которых параметризующий оператор A имеет диагональную матрицу в стандартном базисе пространства $l^2(\Lambda)$ [11–13]. В частности, лишь такие операторы могут быть пределами гамильтонианов с короткодействующими локальными потенциалами [11]. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что оператор A задается диагональной матрицей: $A(\lambda, \mu) = \alpha_\lambda \delta_{\lambda\mu}$. Из T^d -инвариантности оператора A получаем, что последовательность (α_λ) полностью определяется своими элементами с индексами из K ; а именно, $\alpha_\kappa = \alpha_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $\kappa \in K$. Нам нужно будет следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы П.1 приложения.

ТЕОРЕМА 2. Существует число $E_A \in \mathbf{R}$ со следующими свойствами:

- 1) если $\operatorname{Re} \zeta < E_A$, то оператор $Q(\zeta) + A$ имеет ограниченный обратный;
- 2) для любого $\zeta \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} \zeta < E_A$, существуют такие константы $c_4(\zeta) \equiv c_4 > 0$ и $\tilde{c}_4(\zeta) \equiv \tilde{c}_4 > 0$, что при всех $\lambda, \mu \in \Lambda$

$$|[Q(\zeta) + A]^{-1}(\lambda, \mu)| \leq c_4 \exp(-\tilde{c}_4 d(\lambda, \mu)).$$

Более того, $c_4(\zeta) = O(1)$ и $\tilde{c}_4(\zeta) \rightarrow +\infty$ при $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow -\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Оператор H_A полуограничен снизу.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вначале напомним понятие скрученной групповой алгебры $C^*(\Gamma, \Theta)$ пары (Γ, Θ) [23, 5]. Определим в пространстве финитных последовательностей $C_0(\Gamma)$ умножение и инволюцию по формулам

$$(a \cdot b)(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma} \Theta(\gamma\beta^{-1}, \beta)^{-1} a(\gamma\beta^{-1}) b(\beta),$$

$$a^*(\gamma) = \Theta(\gamma^{-1}, \gamma) \Theta(1, 1) \overline{a(\gamma^{-1})}.$$

Обозначим через I инъективный *-гомоморфизм алгебры $C_0(\Gamma)$ в операторную алгебру $L(l^2(\Gamma))$, переводящий элемент $a \in C_0(\Gamma)$ в оператор Ia такой, что при $\varphi \in l^2(\Gamma)$

$$(Ia)\varphi(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma} \Theta(\gamma\beta^{-1}, \beta)^{-1} a(\gamma\beta^{-1})\varphi(\beta).$$

Скрученная групповая C^* -алгебра $C^*(\Gamma, \Theta)$ определяется как пополнение $C_0(\Gamma)$ по норме $\|a\| = \|Ia\|$. Алгебра $C^*(\Gamma, \Theta)$ имеет стандартный след τ , определяемый как $\tau(a) = a(1)$. Обозначим теперь через ρ_γ ($\gamma \in \Gamma$) оператор в $l^2(\Gamma)$, действующий по правилу $(\rho_\gamma \varphi)(\beta) = \Theta(\beta, \gamma)\varphi(\beta\gamma)$. Легко проверить, что $\gamma \mapsto \rho_\gamma$ есть проективное унитарное представление группы Γ в пространстве $l^2(\Gamma)$.

Определим теперь “канонический” изоморфизм $\Phi: L^2(X) \rightarrow l^2(\Gamma) \otimes L^2(F) = l^2(\Gamma, L^2(F))$ по правилу $(\Phi f)(\gamma) = r_F \cdot [\gamma, 1] f$, где r_F обозначает оператор сужения на F : $r_F f = f|_F$ [6]. С помощью Φ представление ρ продолжается до проективно-унитарного представления $\tilde{\rho}$ в пространстве $L^2(X)$ по формуле $\tilde{\rho} = \rho \otimes 1$. Можно показать, что оператор Φ сплетает представления T и $\tilde{\rho}$. Пусть $\mathcal{K}$ – алгебра компактных операторов в $L^2(X)$, тензорное произведение $C^*(\Gamma, \Theta) \otimes \mathcal{K}$ будем обозначать через $\mathcal{A}$. След τ в $C^*(\Gamma, \Theta)$ индуцирует стандартный след на $\mathcal{A}$, который будем обозначать по-прежнему τ . Изоморфизм Φ определяет каноническое погружение $I_{\mathcal{K}}$ алгебры $\mathcal{A}$ в C^* -алгебру $L(L^2(X)) = L(l^2(\Gamma) \otimes L^2(F))$, пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ – образ алгебры $\mathcal{A}$ при этом погружении. Обозначим

$$\mathcal{M}(\Gamma, \Theta) = \{A \in L(l^2(\Gamma) \otimes L^2(X)) : A\tilde{\rho}_{\gamma} = \tilde{\rho}_{\gamma}A \quad \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Нетрудно показать, что $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}(\Gamma, \Theta)$ и $R_A(\zeta) \in \mathcal{M}(\Gamma, \Theta)$ для всех $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H_A)$.

Теперь, следуя [6], определим коэффициенты Фурье для оператора $A \in \mathcal{M}(\Gamma, \Theta)$. Для элемента $\gamma \in \Gamma$ коэффициент Фурье $\hat{A}(\gamma)$ представляет собой оператор в $L^2(F)$, действующий на функцию u из $L^2(F)$ по формуле $\hat{A}(\gamma)(u) = \tilde{\rho}_{\gamma}A(\delta_1 \otimes u)(1)$.

ЛЕММА 5 (см. [5, 6]). Пусть $A \in \mathcal{M}(\Gamma, \Theta)$. Если для любого $\gamma \in \Gamma$ оператор $\hat{A}(\gamma)$ компактен и

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\hat{A}(\gamma)\| < +\infty,$$

то $A \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Следующая теорема представляет собой основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – T^d -инвариантный самосопряженный оператор в $l^2(\Lambda)$ с диагональной матрицей в стандартном базисе этого пространства. Тогда для любого $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H_A)$ резольвента $R_A(\zeta)$ принадлежит алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим вначале, что вследствие аналитичности резольвенты достаточно доказать включение $R_A(E) \in \tilde{\mathcal{A}}$ для всех E из некоторой полуоси $(-\infty, E_0)$. Теперь заметим, что $R^0(\zeta) \in \tilde{\mathcal{A}}$ для всех $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \sigma(H^0)$ [6], поэтому нужно лишь доказать, что $V(E) \equiv R^0(E) - R_A(E) \in \tilde{\mathcal{A}}$ для всех E из некоторой полуоси $(-\infty, E_0)$. По теореме 2 найдется такое число $E_0 \in \mathbf{R}$, что как только $\operatorname{Re} \zeta < E_0$, так сразу получаем

$$V(\zeta)f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} M(\lambda, \mu; \zeta) \langle g_{\mu}(\bar{\zeta}) | f \rangle \right) g_{\lambda}(\zeta),$$

где обозначено $M(\lambda, \mu; \zeta) = [Q(\zeta) + A]^{-1}(\lambda, \mu)$. В силу лемм 2 и 3 существуют такие константы c_0 и $\tilde{c}_0(\zeta)$, что при $\operatorname{Re} \zeta < E_0$ имеем

$$|M(\lambda, \mu; \zeta)| \leq c_0 \exp(-\tilde{c}_0(\zeta) d(\lambda, \mu)), \quad \tilde{c}_0(\zeta) > 3\tilde{c}_{\Lambda}, \quad (4)$$

где $\tilde{c}_{\Lambda}$ – константа из леммы 3, а c_0 не зависит от ζ .

Определим матрицу $M_\beta(\lambda, \mu; \zeta)$, где $\beta \in \Gamma$, соотношением

$$M_\beta(\lambda, \mu; \zeta) = \begin{cases} M(\lambda, \mu; \zeta), & \text{если } \lambda = \gamma\kappa, \mu = \gamma\beta\kappa' \text{ при некоторых } \gamma \in \Gamma, \kappa, \kappa' \in K, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку $(g_\lambda(\zeta))_{\lambda \in \Lambda}$ есть базис Рисса, то из (4) и леммы П.1 вытекает, что для любой функции $f \in L^2(X)$ ряд

$$V_\beta(\zeta)f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} M_\beta(\lambda, \mu; \zeta) \langle g_\mu(\bar{\zeta}) | f \rangle \right) g_\lambda(\zeta)$$

сходится и определяет ограниченный оператор в $L^2(X)$. Докажем, что при $\operatorname{Re} \zeta < E_0$

$$\sum_{\beta \in \Gamma} \|V_\beta(\zeta)\| < +\infty. \quad (5)$$

Так как $(g_\lambda(\zeta))_{\lambda \in \Lambda}$ есть базис Рисса в своей замкнутой линейной оболочке, то при $\varphi \in l^2(\Lambda)$ и $f \in L^2(X)$ имеем

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\lambda) g_\lambda(\zeta) \right\| \leq c_5(\zeta) \|\varphi\|, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle g_\lambda(\bar{\zeta}) | f \rangle|^2 \leq c_6^2(\zeta) \|f\|^2. \quad (6)$$

Принимая во внимание (4) и (6), нетрудно получить оценку

$$\|V_\beta(\zeta)f\|^2 \leq (\#K) c_5^2 c_6^2 \max \{ \exp(-2\hat{c}_0(\zeta) d(\kappa, \beta\kappa')) : \kappa, \kappa' \in K \} \|f\|^2,$$

из которой с учетом леммы П.1 приложения получаем (5).

Теперь заметим, что при $\operatorname{Re} \zeta < E_0$

$$\sum_{\beta \in \Gamma} V_\beta(\zeta) = V(\zeta), \quad (7)$$

поскольку в силу лемм 1, 3 и П.1 ряд

$$\sum_{\beta \in \Gamma} \langle f_1 | V_\beta(\zeta) f_2 \rangle$$

абсолютно сходится для любых $f_1, f_2 \in C_0^\infty(X)$.

Осталось доказать, что $V_\beta(\zeta) \in \tilde{\mathcal{A}}$ для любого $\beta \in \Gamma$, как только $\operatorname{Re} \zeta < E_0$. Для коэффициента Фурье $\hat{V}_\beta(\gamma) \equiv \hat{V}_\beta(\zeta)(\gamma)$ прямым вычислением получаем

$$\hat{V}_\beta(\gamma)(u) = \Theta(1, \gamma) \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{\kappa, \kappa' \in K} \exp(\omega(\gamma\alpha\kappa)) L_{\alpha, \kappa, \kappa'}(u),$$

где $L_{\alpha, \kappa, \kappa'}$ — одномерный оператор вида

$$L_{\alpha, \kappa, \kappa'}(u) = M(\alpha\kappa, \alpha\beta\kappa'; \zeta) \langle g_{\alpha\beta\kappa'}(\bar{\zeta}) | \tilde{u} \rangle \tilde{g}_{\gamma\alpha\kappa}(\zeta).$$

В предыдущей формуле $\tilde{u}$ обозначает продолжение функции $u \in L^2(F)$ на всю плоскость X , а $\tilde{g}$ — сужение $g \in L^2(X)$ на F . Нетрудно доказать, что

$$\sum_{\alpha, \kappa, \kappa'} \|L_{\alpha, \kappa, \kappa'}\| < +\infty,$$

поэтому оператор $\widehat{V}_\beta(\gamma)$ компактен. В силу леммы 5 для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\widehat{V}_\beta(\gamma)\| < +\infty. \quad (8)$$

Пусть $u \in L^2(F)$, $\|u\| \leq 1$. Тогда имеем

$$\|\widehat{V}_\beta(\gamma)(u)\| \leq c_7 \sum_{\kappa, \kappa' \in K} \sum_{\alpha \in \Gamma} |\langle g_{\alpha\beta\kappa'}(\bar{\zeta}) | \tilde{u} \rangle| \|\tilde{g}_{\gamma\alpha\kappa}(\zeta)\|.$$

Громоздкие выкладки, которые мы опускаем, дают

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_2} |\langle g_{\alpha\nu}(\bar{\zeta}) | \tilde{u} \rangle| \|\tilde{g}_{\gamma\alpha\kappa}(\zeta)\| \leq c_8(\kappa, \zeta) \exp\left(-\frac{3}{2}\tilde{c}_\Lambda d(\kappa, \gamma\kappa)\right),$$

откуда

$$\|\widehat{V}_\beta(\gamma)\| \leq c_9(\zeta) \sum_{\kappa \in K} \exp\left(-\frac{3}{2}\tilde{c}_\Lambda d(\kappa, \gamma\kappa)\right).$$

Чтобы получить (8), осталось воспользоваться леммой П.1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $E_1, E_2 \in \mathbf{R} \setminus \sigma(H_A)$ и $E_1 \leq E_2$. Тогда спектральный проектор $P_{[E_1, E_2]}$ оператора H_A принадлежит алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$.

Зафиксируем теперь число $E' \in \mathbf{R}$ такое, что $E' < \inf \sigma(H_A)$, и рассмотрим функцию

$$\mathcal{N}(E) = \begin{cases} \tau(P_{[E', E]}), & E \geq E', \\ 0, & E < E'. \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция не зависит от выбора точки E' . Значения $\mathcal{N}(E)$ постоянны на лакунах спектра H_A , тем самым эти значения образуют естественную параметризацию лакун [24].

СЛЕДСТВИЕ 3 (теорема о параметризации лакун). Значения функции $\mathcal{N}(E)$ на лакунах спектра $\sigma(H_A)$ принадлежат счетному множеству вещественных чисел $\tau^*(K_0 C^*(\Gamma, \Theta))$ (здесь $K_0 \mathcal{B}$ обозначает K_0 -группу C^* -алгебры $\mathcal{B}$).

Напомним, что пара (Γ, Θ) обладает по определению свойством Кадисона, если существует такая константа $c_K > 0$, при которой $\tau(P) \geq c_K$ для любого ненулевого проектора P из C^* -алгебры $C^*(\Gamma, \Theta) \otimes \mathcal{K}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если пара (Γ, Θ) обладает свойством Кадисона, то спектр $\sigma(H_A)$ имеет зонную структуру.

Отметим, что условие этого следствия выполнено для свободной от кручения фуксовой группы Γ и магнитного поля с рациональным потоком через фундаментальную область F [7, 8]. Подробное обсуждение свойства Кадисона в контексте квантового эффекта Холла на плоскости Лобачевского приведено в [8].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим дискретное метрическое пространство Λ с метрикой d , обладающей следующим свойством:

существуют такие константы $c_\Lambda > 0$ и $\tilde{c}_\Lambda > 0$, что для всех $\lambda_0 \in \Lambda$ и $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, имеем

$$\#\{\lambda \in \Lambda: d(\lambda, \lambda_0) \leq r\} \leq c_\Lambda \exp(\tilde{c}_\Lambda r).$$

Доказательство следующих лемм можно найти в [25].

ЛЕММА П.1. Пусть функция $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathbf{C}$ такова, что при некоторых $\mu \in \Lambda$ и положительных c и δ выполнено

$$|\varphi(\lambda)| \leq c \exp[-(1 + \delta)\tilde{c}_\Lambda d(\lambda, \mu)].$$

Тогда

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(\lambda)| \leq c c_\Lambda \delta^{-1}.$$

ЛЕММА П.2 (тест Шура) Пусть $(L(\lambda, \mu))_{\lambda, \mu \in \Lambda}$ — такая бесконечная матрица, что при некотором $C > 0$ имеем

$$\sup_{\mu \in \Lambda} \sum_{\lambda \in \Lambda} |L(\lambda, \mu)| \leq C, \quad \sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\mu \in \Lambda} |L(\lambda, \mu)| \leq C.$$

Тогда матрица $L(\lambda, \mu)$ задает ограниченный линейный оператор L в пространстве $l^2(\Lambda)$ такой, что $\|L\| \leq C$.

ТЕОРЕМА П.1. Пусть $(K_n)_{n \geq 0}$ — последовательность линейных ограниченных операторов в пространстве $l^2(\Lambda)$, имеющих в стандартном базисе матрицы $(K_n(\lambda, \mu))_{\lambda, \mu \in \Lambda}$. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) если $\lambda \neq \mu$, то $|K_n(\lambda, \mu)| \leq a \exp(-b_n d(\lambda, \mu))$, где a не зависит от n , а $b_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$;
- 2) $\inf_{\lambda \in \Lambda} |K_n(\lambda, \lambda)| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Тогда для любого α , $0 < \alpha < 1$, существует такое $n_0 \in \mathbf{N}$, что при всех $n \geq n_0$ оператор K_n имеет ограниченный обратный $L_n = K_n^{-1}$, матрица которого удовлетворяет условию $|L_n(\lambda, \mu)| \leq 2c_n \exp(-\alpha b_n d(\lambda, \mu))$, где $c_n = (\inf_{\lambda \in \Lambda} |K_n(\lambda, \lambda)|)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_n(\lambda, \mu) = K_n(\lambda, \lambda)\delta_{\lambda\mu}$, $S_n(\lambda, \mu) = K_n(\lambda, \mu) - D_n(\lambda, \mu)$. Не умаляя общности, можно считать, что $\inf\{|K_n(\lambda, \lambda)|: \lambda \in \Lambda\} > 0$ и $b_n > \tilde{c}_\Lambda$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Тогда имеем $K_n = D_n(1 + D_n^{-1}S_n)$, где D_n и S_n определяются соответствующими матрицами. Из условий 1, 2 теоремы П.1, а также из лемм П.1 и П.2 вытекает, что при достаточно больших n оператор $1 + D_n^{-1}S_n$ имеет ограниченный обратный $T_n = (1 + D_n^{-1}S_n)^{-1}$. Чтобы доказать теорему, достаточно доказать, что

$$|T_n(\lambda, \mu)| \leq 2 \exp(-\alpha b_n d(\lambda, \mu)). \quad (9)$$

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и возьмем n настолько большим, что

$$(1 - \alpha)b_n \geq 2\tilde{c}_\Lambda, \quad ac_\Lambda c_n \leq \frac{1}{2}, \quad \|D_n^{-1}S_n\| < 1.$$

Будем оценивать сумму

$$T_n(\lambda, \mu) = \sum_{j \geq 0} (-D_n^{-1}S_n)^j(\lambda, \mu).$$

Для доказательства (9) достаточно убедиться по индукции, что

$$|(D_n^{-1}S_n)^j(\lambda, \mu)| \leq (ac_\Lambda c_n)^j e^{-\alpha b_n d(\lambda, \mu)}. \quad (10)$$

При $j = 0$ неравенство (10) очевидно; допустим, что оно верно при некотором $j \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |(D_n^{-1}S_n)^{j+1}(\lambda, \mu)| &= \left| K_n(\lambda, \lambda)^{-1} \sum_{\kappa \in \Lambda} S_n(\lambda, \kappa) (D_n^{-1}S_n)^j(\kappa, \mu) \right| \leq \\ &\leq c_n \sum_{\kappa \in \Lambda} a e^{-b_n d(\lambda, \kappa)} (ac_\Lambda c_n)^j e^{-\alpha b_n d(\kappa, \mu)} \leq \\ &\leq ac_n (ac_\Lambda c_n)^j e^{-\alpha b_n d(\lambda, \mu)} \sum_{\kappa \in \Lambda} e^{-2\tilde{c}_\Lambda d(\lambda, \kappa)} \leq \\ &\leq (ac_\Lambda c_n)^{j+1} e^{-\alpha b_n d(\lambda, \mu)}, \end{aligned}$$

т.е. (10) верно и при $j + 1$.

Благодарности. В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить рецензента за ряд весьма полезных замечаний. Второй автор благодарит за гостеприимство Университет им. Гумбольдта (Берлин), в котором была выполнена эта работа, а также РФФИ (грант № 98-01-03308), Министерство образования РФ и фонд Volkswagen-Stiftung за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] B. Helffer, J. Sjöstrand. Bull. Soc. Math. France. 1989. V. 117. Suppl. № 39. P. 1.
- [2] M. Choi, G. Elliott, N. Yui. Invent. Math. 1990. V. 99. P. 225.
- [3] M. Shubin. Commun. Math. Phys. 1994. V. 164. P. 259.
- [4] Y. Last. Commun. Math. Phys. 1994. V. 164. P. 421.
- [5] T. Sunada. Contemp. Math. 1994. V. 137. P. 283.
- [6] J. Brüning, T. Sunada. Astérisque. 1992. V. 210. P. 65.
- [7] T. Sunada. Progr. Theor. Phys. 1994. Suppl. № 116. P. 235.
- [8] A. L. Carey, K. C. Hannabus, V. Mathai, P. McCann. Commun. Math. Phys. 1998. V. 190. P. 629.
- [9] Ю.Е. Карпешина. ТМФ. 1983. Т. 57. С. 304.
- [10] Б.С. Павлов. УМН. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 99.
- [11] С. Альбеверио, Ф. Гестеци, Р. Хеег-Крон, Х. Хольден. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [12] S. A. Gredeksul, M. Zusman, Y. Avishai, M. Ya. Azbel. Phys. Rep. 1997. V. 288. P. 223.

- [13] *B. A. Гейлер*. Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1.
- [14] *Y. Nagaoka, M. Ikegami*. Solid State Sci. 1992. V. 109. P. 167.
- [15] *C.L. Foden, M.L. Leadbeater, J.H. Burroughes, M. Peppe*. J. Phys. Cond. Matter. 1994. V. 6. P. L127.
- [16] *Л.И. Магарилл, Д.А. Романов, А.В. Чаплик*. ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 4. С. 1411.
- [17] *A. Comtet*. Ann. Phys. 1987. V. 173. P. 185.
- [18] *Y. Colin de Verdiere*. Ann. Inst. Fourier. 1982. V. 32. P. 275.
- [19] *J. Zak*. Phys. Rev. 1964. V. 136. P. A776.
- [20] *J. Brüning, T. Sunada*. Nagoya Math. J. 1992. V. 126. P. 159.
- [21] *М.Г. Крейн, Г.К. Лангер*. Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 5. С. 59.
- [22] *В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, И.И. Чуцаев*. Сиб. матем. журнал. 1995. Т. 36. № 4. С. 828.
- [23] *L. Auslander, C. C. Moore*. Mem. Am. Math. Soc. 1966. № 62. P. 1.
- [24] *J. Bellissard*. Gap labelling theorem for Schrödinger operators. In: From Number Theory to Physics. Eds. M. Waldschmidt et al. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 538.
- [25] *М.А. Шубин*. Изв. АН СССР. 1985. Т. 48. № 3. С. 652.

Поступила в редакцию 23.VII.1998 г.,
после доработки 15.I.1999 г.