Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Меры на группах диффеоморфизмов неархимедовых многообразий, представления групп и их применения, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 3, 381–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:10:25

© 1999 г.

С. В. Лютковский*

МЕРЫ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НЕАРХИМЕДОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Построены невырожденные σ -аддитивные квазиинвариантные и псевдодифференцируемые относительно плотных подгрупп G' меры со значениями в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_q$ для простых $q \neq p$ на группах диффеоморфизмов G и гомеоморфизмов неархимедовых банаховых сепарабельных многообразий M над локальным полем $\mathbf{K}$, где $\mathbf{Q}_p$ – поле p -адических чисел, $\mathbf{K} \supset \mathbf{Q}_p$. Меры и ассоциированные неприводимые представления использованы в теории неархимедовой гравитации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Группы диффеоморфизмов и их неприводимые представления играют важную роль в квантовой механике и теории квантовой гравитации [1]. В последнее время развиваются также неархимедовы квантовая механика и квантовая гравитация [2, 3].

В данной статье в разделах 2 и 3 построены меры. В п. 3.7 исследована неприводимость регулярных унитарных представлений группы диффеоморфизмов G' . В разделе 4 приводятся примеры применения таких представлений в неархимедовых квантовой механике и квантовой гравитации.

2. СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ

2.1. Обозначим через $C(\text{an}_r, M \rightarrow Y)$ пространство аналитических отображений $g: M \rightarrow Y$ с радиусом сходимости не меньше чем $0 < r < \infty$, где M открыто-замкнуто в $B(X, 0, r)$, X и Y – банаховы пространства (БП) над $\mathbf{K}$, $B(E, x, R) := \{y \in E : d(y, x) \leq R\}$ – шар для метрического пространства (E, d) .

2.2.1. Возьмем последовательность $\{H(n) : n \in \mathbf{N}_0\}$ БП над полем $\mathbf{K}$, где $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbf{N} := \{1, 2, \dots\}$. Зададим БП

$$c_0(H(n) : n) := \{f = (f^0, f^1, f^2, \dots) : f^n \in H(n) \text{ для любых } n \text{ и} \\ \|f^n\|_{H(n)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$$

*Институт общей физики РАН, Москва, Россия

с нормой

$$\|f\|_{c_0(H(n):n)} := \sup_n \|f^n\|_{H(n)}.$$

Пусть X – БП сепарабельного типа над полем $\mathbf{K}$, тогда оно изоморфно БП $c_0(\alpha, \mathbf{K}) := c_0(\mathbf{K} : n)$ при $\alpha = \omega_0$, $c_0(\alpha, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^\alpha$ при $\alpha < \omega_0$, где α – ординал, $\alpha \leq \omega_0$, ω_0 – начальный ординал мощности $\aleph_0 := \text{card}(\mathbf{N})$, $\dim_{\mathbf{K}} X := \text{card}(\alpha)$, БП X имеет стандартный ортонормированный базис $(e_j : j \in \alpha)$ [4].

Здесь и далее рассматриваются аналитические банаховы многообразия (БМ) M и N , моделируемые на X и Y с атласами $\text{At}(M)$ и $\text{At}(N)$, состоящими из дизъюнктивных карт (U_j, ϕ_j) , $j \in \Lambda$; (V_j, ψ_j) , $j \in \Omega$, $\Omega \cup \Lambda \subset \mathbf{N}$, где U_j , $\phi_j(U_j)$, V_j и $\psi_j(V_j)$ открыто-замкнуты в M , X , N и Y , соответственно, $\phi_j : U_j \rightarrow \phi_j(U_j)$ и $\psi_j : V_j \rightarrow \psi_j(V_j)$ – гомеоморфизмы, а $\phi_j(U_j) = \mathbf{B}(X, x_j, r_j)$ с $0 < r_j < \infty$ для любых j .

2.2.2. Для $\Lambda = \omega_0$ определим БП

$$\begin{aligned} C_*(t, M \rightarrow Y) &:= \{f|_{U_j} \in C_*(t, U_j \rightarrow Y), \|f\|_{C_*(t, M \rightarrow Y)} := \\ &:= \sup_{j \in \Lambda} (\|f|_{U_j}\|_{C_*(t, U_j \rightarrow Y)} / \min(1, r_j)) < \infty \text{ и} \\ &(\|f|_{U_j}\|_{C_*(t, U_j \rightarrow Y)} / \min(1, r_j)) \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty\}, \end{aligned}$$

где $0 \leq t < \infty$, $*$ = 0 для пространств $C_0(t, U \rightarrow Y)$, $*$ = $\emptyset$ или просто опускается для $C(t, U \rightarrow Y)$ (о $C(t, M \rightarrow Y)$ в случае конечного $\text{At}(M)$ см. также [5, § 2] и [6]). Через $C_*^\theta(t, M \rightarrow N)$ при $0 \leq t \leq \infty$ обозначим пространство функций $f : M \rightarrow N$ таких, что $(f_i - \theta_i) \in C_*(t, M \rightarrow Y)$ для любых $i \in \Omega$ и $f_i = \psi_i \circ f$, $\theta_i = \psi_i \circ \theta$; аналогично для $C_*((t, s); M \rightarrow N)$ (см. [7]) при $\dim_{\mathbf{K}} M = n \in \mathbf{N}$. Введем группы

$$G(\tau, M) := C_0^{\text{id}}(\tau, M \rightarrow M) \cap \text{Hom}(M),$$

которые называются группами диффеоморфизмов (и гомеоморфизмов при $0 \leq t < 1$ и $s = 0$), где $\text{Hom}(M)$ – группа непрерывных гомеоморфизмов, $\tau = (t, s)$ или $\tau = \text{ap}_r$, $s = 0$ опускается.

2.3. Для $\mathbf{B}(X, 0, 1) =: \mathbf{B}$ положим $\widetilde{\mathbf{B}} := \{x = (x^i : i \in \alpha) \in \mathbf{B} : \text{существует } i \in \alpha \text{ с } x^i = 0 \text{ или } x^i = 1\}$. Для каждого $\infty > r > 0$ с $r \in \Gamma_{\mathbf{K}} := \{|x|_{\mathbf{K}} : 0 \neq x \in \mathbf{K}\}$ фиксируем $\xi_r \in \mathbf{K}$ с $|\xi_r|_{\mathbf{K}} = r$, определяем $\widetilde{\mathbf{B}}(X, y_i, r) := y_i + \widetilde{\mathbf{B}}(X, 0, 1) \times \xi_r$, где выбрано фиксированное множество $(y_i : i \in \mathbf{N})$ для r такое, что $y_1 = 0$ и X равно дизъюнктному объединению шаров $\mathbf{B}(X, y_i, r)$ и полагаем

$$\widetilde{M} := \bigcup_j \phi_j^{-1}(\widetilde{\mathbf{B}}_j)$$

(см. [5] и п. 2.2.1).

Для локально-компактного M зададим подпространство и подгруппу

$$\begin{aligned} C(t, M \rightarrow \mathbf{K}^a | h) &:= \{f \in C(t, M \rightarrow \mathbf{K}^a) : \Delta^j f|_{\widetilde{M}} = 0 \quad \forall j = 0, \dots, v(h, n)\}, \\ \text{Dif}(t, M | h) &:= \{f \in G(t, M) : (f - \text{id}) \in C(t, M \rightarrow \mathbf{K}^n | h)\}, \end{aligned}$$

где $v(h, n) = 2h - 1$ для четного l' , $v(h, n) = 2h$ для нечетного l' , $s \geq 2$, l' и $s \in \mathbf{N}$,

$$h = \left\lfloor \frac{l'}{2} \right\rfloor, \quad l \geq l' \geq sn, \quad \Delta^0 := 1, \quad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \Delta = \Delta_n = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

— лапласиан, $n := \dim_{\mathbf{K}} M$; $[t] =: l \leq t \in \mathbf{R}$ либо $t = \text{an}_R$.

2.4. Пусть $u \geq p$ и $s > 1$ — целые числа. Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \{c(d, d, w)\chi(d, u) + \dots + c(p, d, w)\chi(p, u) = 0 \quad \text{для} \quad d = 0, \dots, w-1 \\ \text{с} \quad w = 1, \dots, \min(s-1, u) =: p \quad \text{и} \quad \chi(0, u) + \dots + \chi(p, u) = 1\} \end{aligned}$$

имеет единственное решение с $\chi(j, u) \in \mathbf{Q}$ (см. [8, 9]), где

$$c(j, d, w) := \frac{(u-j)!j!}{(w-d)!(u-j-w+d)!(j-d)!d!}.$$

2.5.1. Пусть F — дифференциальный оператор, действующий на $f \in C_0(t, M \rightarrow \mathbf{K}^n)$, тогда существует оператор $[F]$, в котором все ∂_i заменены операторами разделенных разностей $(\tilde{\Phi}^1 f)(x; e_i; \zeta)$ [5].

2.5.2. Для локально-компактного M существует БП

$$E((t, s), -k, N \rightarrow \mathbf{K}^n) = [\tilde{A}]C_0((t, s), M \rightarrow \mathbf{K}^n)$$

с нормой

$$\|g(y)\|_E := \sup_{i,j,m} \left\{ |a(m, f^i|_{U_j})| \frac{J_j((t, s), m)}{J_j(k, m) \min(1, r_j)} \right\},$$

где $g(y) = ([\tilde{A}]f)(y)$, $y \in N = M^{k+1}$, $y^1 = x$, $y^{i+1} = x + \zeta_i h_i$ при $i > 0$, $y = (y^1, y^2, \dots)$, $\zeta_i \in \mathbf{K}$, $h_i \in X$, $k = 2q = \deg[\tilde{A}]$, $\tilde{A} = \Delta^q$, $J_j((t, 0), m) =: J_j(t, m)$, $s \in \mathbf{N}_0$, индекс $s = 0$ далее опускаем.

2.5.3. Пусть W_{id} — окрестность id в $G(t, M)$ с $t \geq 1$ такая, что $(W_{\text{id}} - \text{id}) \subset C_0(t, M \rightarrow X)$ (см. также раздел I.3.5(iv) в [8]). Тогда на W_{id} можно задать операторы

$$A_n(f) = \sum_{(i=(i(1), \dots, i(n)), |i|=sn)} \left[\frac{(sn)!}{i(1)! \dots i(n)!} \right] A(i(1), \dots, i(n); f', f)$$

и

$$A(i; f', f) = \partial_1^{2i(1)} \dots \partial_{r-1}^{2i(r-1)} \partial_{r+1}^{2i(r+1)} \dots \partial_n^{2i(n)} \sum_{l=0}^{s-1} \chi(l, 2i(r)) \partial_r^l \left[(f')^{-1} \partial_r^{2i(r)-l} f \right],$$

где $s \geq 2$, $\tau \geq sn$, $r = \min\{j : i(j) > s-1\}$ (см. п. 2.4).

2.5.4. Для $C_0((t, s), M \rightarrow \mathbf{K}^n \mid h) \ni f$ с помощью алгоритма исключения Гаусса получаются выражения зависимых коэффициентов разложений $a(m, f^i|_{U_j})$ функций

f по базису $(\overline{Q}_m|_{U_j})q_i$ (выбранных среди $a(m, f^i)$ с $m(k) \leq 2v(h, n)$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$) через независимые $a(m, f^i|_{U_j})$. Исходя из этого получим изоморфизмы

$$\begin{aligned} \tilde{T}_C^{(t,s)} : C_0((t, s), M \rightarrow \mathbf{K}^n) &\rightarrow C_0(\text{an}_r, M \rightarrow \mathbf{K}^n | h), \\ T_E^{(t,s,k)} : E((t, s), -k, M^{k+1} \rightarrow \mathbf{K}^n) &\rightarrow E(\text{an}_r, -k, M^{k+1} \rightarrow \mathbf{K}^n). \end{aligned}$$

В окрестности W_{id} в $\text{Dif}((t, s), M | h)$ или $G((t, s), M)$, $f \in W_{\text{id}}$, рассмотрим операторы

$$Tf := \text{id} + T_C^{(t,s)}(f - \text{id}) \quad \text{или} \quad \tilde{T}f := \text{id} + \tilde{T}_C^{(t,s)}(f - \text{id}),$$

а для обратного оператора $S_E^{(t,s,k)} = (T_E^{(t,s,k)})^{-1}$ рассмотрим отображение

$$Sf := \text{id} + S_E^{(t,s,k)}(f - \text{id}), \quad \text{где} \quad \tilde{T}_C^{(t,0)} =: \tilde{T}_C^t, \quad T^{(t,s)} := T^{(t,s,0)},$$

$\infty > t \geq 1$. Оператор S действует на функцию $([A]Tf)(y; a, b, \dots, z; \zeta_a, \zeta_b, \dots, \zeta_z)$ таким образом, что выполняется следующее равенство: $S([A]Tf)(y; a, \dots, z; 0, \dots, 0) = SATf(y)$, где $k = \deg(A)$, $A = A_n$.

Введем обозначения $F := S[A]T$ и $\tilde{F} := S[A]\tilde{T}$ на W_{id} .

2.6. ЛЕММА. *Существует открыто-замкнутая подгруппа W в $\text{Dif}(t, M|h)$ или в $G(t, M)$ и открыто-замкнутая окрестность V нуля в $E(t, -2sn, M^{2sn+1} \rightarrow \mathbf{K}^n)$, для которых $\tilde{F} : W \rightarrow V$ — равномерный изоморфизм, где $\tilde{F} = F$ или $\tilde{F} = \tilde{F}$, соответственно, с $\infty > t \geq 1$ (см. п. 2.3 и 2.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $W(\tau) := (f \in W_{\text{id}} : \rho_0^-(f, \text{id}) \leq 1/p)$ — открыто-замкнутая подгруппа в $\text{Dif}(\tau, M|h)$, где $\tau = t$ или $\tau = \text{an}_r$. Тогда

$$[A] \in C(1, W(\text{an}_r) \rightarrow E(\text{an}_r, -2sn, M^{2sn+1} \rightarrow \mathbf{K}^n)) \quad \text{и} \quad [A]'(\text{id}) = [\Delta]^{sn}.$$

2.7. Пусть $f(x) \in C((t, s-1), M \rightarrow \mathbf{K})$, $n \in \mathbf{N}$, M открыто-замкнуто в шаре $\mathbf{B}(\mathbf{K}^n, 0, r)$, $0 < r < \infty$, $l = [t]$, $b = \{t\}$, антидифференцирование $P(l, s)$ задается формулой

$$P(l, s)f(x) := \sum_{(m \in \mathbf{N}_0^n, j=j'+s'\bar{u}, 0 \leq s' \leq s, 0 \leq |j'| < l)} \partial^j f(x_m)(x_{m+\bar{u}} - x_m)^{(j+\bar{u})} / (j+\bar{u})!,$$

где $\partial^j = \partial_1^{j(1)} \dots \partial_n^{j(n)}$, $j = (j(1), \dots, j(n))$, $\bar{u} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}^n$, $x_m = \sigma_m(x)$, а $\{\sigma_m : m \in \mathbf{N}_0^n\}$ — приближение единицы в M [10].

2.8. ТЕОРЕМА. Если $f \in C((t, s-1), M \rightarrow \mathbf{K})$, $l \in \mathbf{N}$, $1 \leq t = l + b$, $\{t\} = b \in \mathbf{Q}$, то

$$P(l, s)f(x) - P(l, s)f(y) = \sum_{(j=j'+s'\bar{u}, 0 \leq |j'| \leq l, 1 \leq s' \leq s)} (\partial^{j-\bar{u}} f(y)) \left[\frac{(x-y)^j}{j!} \right] + \\ + \sum_{(v=v'+s'\bar{u}, |v'|=l)} (x-y)^v R(n, v; x, y),$$

где $R(n, v; x, y)$ и $R(n, v; x, y)/j_b(\zeta)$ (в последнем случае $x - y = \zeta e_i$, $\zeta \in \mathbf{K}$ для любых $i = 1, \dots, n$) являются непрерывными функциями, равными нулю на диагоналях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in \mathbf{N}$, $f \in C((t, s-1), M \rightarrow \mathbf{K})$ и $\partial^{\bar{u}} f(x) \in C((t, s-1), M \rightarrow \mathbf{K})$, а также

$$f(x) = f(y) + \sum_{(1 \leq |j'| \leq l, j=j'+s'\bar{u}, s' \in \{0, 1, \dots, s\})} \frac{\partial^j f(y)}{j!} (x-y)^j + \\ + \sum_{(|j'|=l, j=j'+s'\bar{u})} (x-y)^j R(n, j; x, y),$$

где $R(n, j; x, y) \in C(b, M \times M \rightarrow \mathbf{K})$ — функция, равная нулю на диагонали $((x, y) \in M^2 : x = y)$. Тогда для любых $z \in M$ (см. § 78.3 и § 78.A в [10]) имеем

$$\lim_{x, y \rightarrow z} \bar{J}_j^{l, q} f(x, y; \zeta_1, \dots, \zeta_{qn}) \frac{(x-y)^{l-1}}{j_b(\zeta)} = \frac{\partial^{q\bar{u}} (\bar{\Phi}^t f)(z, \dots, z)}{(qn)!},$$

где

$$(\bar{J}_j^{k, q} f(x, y; \zeta_1, \dots, \zeta_{qn}))(x-y)^k := \\ := (\bar{\Phi}^{k+qn} f)(y; x-y, \dots, x-y, h_1, \dots, h_{qn}; 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \zeta_1, \dots, \zeta_{qn})$$

с j нулями в $(\dots)$, $j_b(\zeta)$ — функция вида $j_b(\zeta) = p^{b \times \text{ord}_p \zeta}$ при $\zeta \neq 0$ и $j_b(0) := 0$ для $0 < b < 1$, причем $|\zeta| = p^{-\text{ord}_p \zeta}$, $j_1(\zeta) := \zeta$, $x = y + \zeta e_i$, а векторы удовлетворяют равенствам $h_1 = \dots = h_q = e_1$, $h_{q+1} = \dots = h_{2q} = e_2$, $h_{q(n-1)+1} = \dots = h_{qn} = e_n$.

В силу формулы Тейлора имеются непрерывные функции $A(j, v; *)$ и $A(j, v; x, y)/j_b(\zeta)$ (для последних $x - y = \zeta e_i$, $i = 1, \dots, n$) такие, что выполняются равенства

$$\partial^j f(x_m) = \sum_{|q|=0, \dots, l-|j|} \partial^{j+q} f(y) \frac{(x_m - y)^q}{q!} + \sum_{|v|=l-|j|} (x_m - y)^v A(j, v; x_m, y)$$

и

$$P(l, s)f(x) = \sum_{(j=j'+s'\bar{u}, 0 \leq s' < s)} \frac{\partial^j f(y)}{(j+\bar{u})!} [(x-y)^{j+\bar{u}} + (-1)^n (x_0 - y)^{j+\bar{u}}] + \\ + \sum_{(m \in \mathbf{N}_0^n, j=j'+s'\bar{u}, 0 \leq s' < s, |v|=l-|j|)} (x_m - y)^v (x_{m+\bar{u}} - x_m)^{j+\bar{u}} \frac{A(j, v; x_m, y)}{(j+\bar{u})!}$$

(см. § 80.3 и § 81.2 в [10]).

2.9. ТЕОРЕМА. Для $1 \leq t < \infty$ каждая $f \in C((t, s-1), M \rightarrow \mathbf{K})$ имеет $C((t, s), M \rightarrow \mathbf{K})$ -антипроизводную такую, что $\partial^{\bar{u}}(P(l, s)f)(x) = f(x)$ для любых $x \in M$, и если $x^i = x_0^i = 0$ для некоторого i , то $\partial^j(P(l, s)f)(x) = 0$ для любых $j = (j(1), \dots, j(n))$ с $j(k) < 2$ при всех $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in \mathbf{Q}$, тогда в соответствии с теоремой п. 2.8 имеем

$$P(l, s)f(x) - P(l, s)f(y) = \sum_{(|j'|=0, \dots, l; j=j'+s'\bar{u}, 0 \leq s' < s)} \partial^j f(y) \frac{(x-y)^{j+\bar{u}}}{(j+\bar{u})!} + S,$$

где

$$S := \sum_{v=v'+s\bar{u}, |v'|=l} R(l, v; x, y)(x-y)^v, \quad \left\{ \frac{\partial^n S}{\partial x^1 \dots \partial x^n} \right\} \Big|_{\{x=y\}} = 0$$

(в соответствии с § 29.12 из [10]). Для $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ воспользуемся нормой

$$\|F\|_{C(t, M \rightarrow \mathbf{K})} = \sup_{(0 \leq \omega \leq t, \omega \in \mathbf{Q})} \|F\|_{C(\omega, M \rightarrow \mathbf{K})}.$$

2.10. Пусть $f \in C_0(t', M \rightarrow \mathbf{K}) =: Z$, F — непрерывный $\mathbf{K}$ -линейный функционал на $C_0(t, M \rightarrow \mathbf{K})$ с l и $l' \in \mathbf{N}$, $1 > b \geq 0$, $b \in \mathbf{Q}$, $1 > c \geq 0$, $t' = l' + c = 2t$, $t = l + b$. Тогда

$$\langle (\bar{\Phi}^v F) \mid f \rangle := (-1)^{s'} \langle F_v \mid (\bar{\Phi}^v f) \rangle,$$

где

$$\langle F_v \mid (\bar{\Phi}^v f)(x; h_1, \dots, h_v; 0, \dots, 0) \rangle = \langle F \mid (\bar{\Phi}^v f)(x; h_1, \dots, h_v; 0, \dots, 0) \rangle;$$

$v \leq t$ и $s' = [v] + \text{sign}\{v\}$. При $\dim_{\mathbf{K}} M = n \in \mathbf{N}$ и $s \in \mathbf{N}_0$ определим $C_0((-t, s), M \rightarrow \mathbf{K})$ как пространство $F \in C_0(t', M \rightarrow \mathbf{K})^*$ с непрерывными линейными функционалами $(\bar{\Phi}^v F)(x; h_1, \dots, h_v; \zeta_1, \dots, \zeta_v)$ на $C_0((t', s-s''), M^{v+1} \rightarrow \mathbf{K})$ для любых $v = ns''$ с $s'' \in (1, 2, \dots, s)$, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{(x, x+h_1\zeta_1+\dots+h_i\zeta_i \in M; i=1, \dots, v)} (|\langle F_v \mid (\bar{\Phi}^v f_k)(x; h_1, \dots, h_v; \zeta_1, \dots, \zeta_v) \rangle|) = 0,$$

где $h_1 = \dots = h_{s''} = e_1, \dots$, $h_{(n-1)s''+1} = \dots = h_{ns''} = e_n$ при $0 < s'' \leq s$.

БП $C_0((-t, s), M \rightarrow \mathbf{K})$ является сепарабельным с нормой

$$\|F\| = \sup_{(|m|=0, 1, \dots; j \in \Lambda)} |F(\bar{Q}_m|_{U_j})| \frac{J_j((0, s), m)}{J_j(t, m) \min(1, r_j)}.$$

2.11. Для $0 < b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $l \in \mathbf{N}_0$, $t = l + b$ пусть $C_0((-t, s), M \rightarrow \mathbf{K})$ является пополнением $C_0((-[t] - 1, s), M \rightarrow \mathbf{K})$ по норме

$$\|F\|_{C_0((-t, s), M \rightarrow \mathbf{K})} := \sup_{t < \omega \in \mathbf{Q}, \omega < [t]+1} \|F\|_{C_0((-\omega, s), M \rightarrow \mathbf{K})}.$$

Для подмногообразия $\widetilde{M}$ в M (см. п. 2.3 и 2.10) существует подмногообразие $\overline{M}_0$, $\widetilde{M} \subset \overline{M}_0 \subset M$, причем $\overline{M}_0$ открыто-замкнуто в M и $\text{At}(M)$ индуцирует $\text{At}(\overline{M}_0)$, т. е.

$$\bar{\phi}_{0,j}(\overline{U}_{0,j}) = \tilde{\phi}_j(\tilde{U}_j) \times \mathbf{B}(\mathbf{K}, y_j, \tilde{r}_j) \subset \phi_l(U_l) = \mathbf{B}(X, x_l, r_l),$$

где $(\overline{U}_{0,j}, \bar{\phi}_{0,j})$ и $(\tilde{U}_{0,j}, \tilde{\phi}_{0,j})$ – карты атласов $\text{At}(\overline{M}_0)$ и $\text{At}(\widetilde{M})$, $U_l \supset \overline{U}_{0,j} \supset \tilde{U}_j$. Поэтому для любой функции $f \in C_0(t, \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{K})$ существует функция $\tilde{f} \in C_0(t, M \rightarrow \mathbf{K})$ с ограничениями $\tilde{f}|_{\overline{M}} = f|_{\overline{M}}$ и $\tilde{f}|_{U_j}$, не зависящими от нормальной координаты, соответствующей множителю $\mathbf{B}(\mathbf{K}, y_j, \tilde{r}_j)$ для любого j , такая, что $\tilde{f}|_{(M \setminus \overline{M}_0)} = 0$. Тогда $(AF)|_{\overline{M}} = 0$, если $\langle (AF)|_{\tilde{f}} \rangle = 0$ для любой пары таких функций f и $\tilde{f}$, где A – дифференциальный оператор. Определим $C_0((-t, s), M \rightarrow N)$ и замкнутые подгруппы $\text{Dif}(\tau, M|h)$ в $G(\tau, M)$ для $2v(h, n) > t$ аналогично п. 2.2 и 2.3.

3. МЕРЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

3.1.1. Пусть G обозначает хаусдорфову группу, а мера $\mu: Af(G, \mu) \rightarrow \mathbf{Y}$ определена на пополнении $Af(G, \mu)$ борелевской σ -алгебры $Bf(G)$ по μ [4, 11], где $\mathbf{K}_q$ – локальное поле, $\mathbf{K}_q \supset \mathbf{Q}_q$ с $q \neq p$, $Y = \mathbf{R}$ или $Y = \mathbf{K}_q$. Рассмотрим преднорму

$$\|f\|_\psi := \sup_{x \in G} (|f(x)|\psi(x))$$

и зададим функцию

$$N_\mu(x) := \inf(\|U\|_\mu : U \in B_{\text{co}}(G), x \in U)$$

для соответствующих функций $f: G \rightarrow \mathbf{K}_q$, $\psi: G \rightarrow [0, \infty)$ и для $\mathbf{K}_q$ -значной меры, где

$$\|A\|_\mu := \sup(|\mu(B)|_{\mathbf{K}_q} : B \subset A, B \in Af(G, \mu))$$

для любого элемента A σ -алгебры $Af(G, \mu)$, а $B_{\text{co}}(G)$ – алгебра открыто-замкнутых подмножеств в G , $\| \mu \| := \| G \|_\mu$. Мера $\nu: Af(G, \mu) \rightarrow \mathbf{K}_q$ абсолютно непрерывна относительно μ : $\nu \ll \mu$, если существует функция

$$f \in L(\mu) := L(G, \mu, \mathbf{K}_q)$$

такая, что

$$\nu(B) = \int_B f(x) \mu(dx)$$

для любых $B \in B_{\text{co}}(G)$, где $L(\mu)$ – БП измеримых функций $f: G \rightarrow \mathbf{K}_q$, для которых $\|f\|_{L(\mu)} := \|f\|_{N_\mu} < \infty$. Если $\mu \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$, то они эквивалентны: $\mu \sim \nu$ (в случае $Y = \mathbf{R}$ см. [11]). Мера μ называется левоквазиинвариантной относительно плотной подгруппы G' в G , если $\mu_\phi(*)$ эквивалентна $\mu(*)$ для любых $\phi \in G'$, где $\mu_\phi(E) := \mu(\phi^{-1}E)$ для любых $E \in Af(G, \mu)$, $\rho_\mu(\phi, g) := \mu_\phi(dg)/\mu(dg)$ – фактор квазиинвариантности.

3.1.2. Функция $f: \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1) \rightarrow Y$ называется псевдодифференцируемой порядка b , если существует интеграл

$$PD_c(b, f(x)) := \int_{\mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1)} [(f(x) - f(y)) \times g(x, y, b)] dv(y),$$

где $g(x, y, b) := |x - y|^{-1-b}$ для $Y = \mathbf{R}$ и $g(x, y, b) := q^{(-1-b) \times \text{ord}_p(x-y)}$ для $Y = \mathbf{K}_q$ с соответствующей мерой Хаара v на $\mathbf{K}$ со значениями в Y , $b \in \mathbf{C}$ (см. [10] и § 2.1 из [5], для $Y = \mathbf{R}$ см. [3, 12]).

3.1.3. Рассмотрим C^τ -отображение

$$S: \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1) \times G \rightarrow G$$

такое, что

$$S(\mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1) \times G'') \subset G'', \quad \frac{\partial S(\zeta, f)}{\partial \zeta} \in TG'' \quad \text{и} \quad \frac{\partial S(\zeta, f)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} := A_f \in T_f G'', \quad S(0, f) = f.$$

Введем обозначение: $\tilde{S}(\zeta, \mu)(B) := \mu(S(-\zeta, B))$ для любых $B \in Bf(G)$, где G'' — плотная подгруппа в G' . Мера μ называется псевдодифференцируемой порядка b относительно S , если существует интеграл $PD_c(b, \tilde{S}(\zeta, \mu)(B))$ по $\zeta \in \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1)$ для любых $B \in Bf(G)$, где $1 \leq \tau$ или $\tau = \text{an}_{\overline{R}}, \infty > \overline{R} > 0$.

3.2. ЛЕММА. Пусть $f \in G((t, s-1), M)$, $M = \mathbf{B}(\mathbf{K}^n, 0, 1)$ и $\rho^{(t, s-1)}(f, \text{id}) \leq c$ с постоянной

$$c := \min_{(|j'|=0, \dots, l; j=j'+s'\bar{u}; s' \in \{0, 1, \dots, s-1\})} \frac{1}{p} \left| \prod_{i=1}^n (j(i) + 1) \right|.$$

Тогда

$$Q((l, s); f) := P(l, s)(f - \text{id}) + \text{id} =: g \in G((t, s), M)$$

и $\rho^{(t, s)}(g, \text{id}) \leq 1/p$, где $l = [t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = f - \text{id}$, тогда в соответствии с п. 2.8 выполняется неравенство: $\|P(l, s)h\|_{C((t, s), M)} \leq c$, т.к. $|\partial^{j-\bar{u}} h(x)/j!| \leq c$ для любых $j = j' + s'\bar{u}$, следовательно, $\rho^{(t, s)}(g, \text{id}) \leq 1/p$, поэтому $g \in G((t, s), M)$.

3.3. ЛЕММА. Пусть $0 \leq l < 2sn + 1$, $0 \leq b < 1$,

$$k = z + l \geq 1, \quad z \in \mathbf{N}_0, \quad R(f) := \partial^{z\bar{u}} \widehat{F} \tilde{Q}(f),$$

где отображение

$$\tilde{Q}(f) := Q((l, z); Q((l, z-1); \dots; Q((l, 1); f) \dots))$$

действует по переменной y подобно оператору S из п. 2.5, $t = l + b$ (см. п. 2.5, 2.6 и 2.10). Тогда для $\widehat{F} = F$ (или $\widehat{F} = \tilde{F}$) отображение R является диффеоморфизмом открыто-замкнутой подгруппы W из $G := \text{Dif}(t, M | h)$ (или $G := G(t, M)$, соответственно) на открыто-замкнутую окрестность V нуля в $E(t, -2sn, M^{2sn+1} \rightarrow \mathbf{K}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.2 отображение $\tilde{Q}(f)$ является изометрией БМ M и принадлежит $\text{Dif}((t, z), M | h)$ с $\rho^{(t, z)}(\tilde{Q}(f), \text{id}) \leq 1/p$, когда

$$\rho^t(f, \text{id}) \leq \min_{(|j'|=0, \dots, l; j=j'+s'\bar{u}; 0 \leq s' \leq s)} \frac{1}{p} \left[\prod_{i=1}^n |(j(i) + 1) \dots (j(i) + z)| \right] =: c.$$

Поэтому, $R'(\text{id})h = \partial^{z\bar{u}} S[\Delta]^{sn} TPh$, т.к. $[A]' = [\Delta]^{sn}$ и $[\Delta]^{sn} \text{id} = 0$, а также $Q((l, z); f) = \text{id} + P(l, z)h$ для $f = \text{id} + h \in W$ с производной $Q'((l, z); \text{id})h = P(l, z)h$, причем $\tilde{Q}'(\text{id})h = Ph$ для отображения $\tilde{Q}(f) = \text{id} + Ph$, а оператор $R'(\text{id})$ обратим, где $P := P(l, z) \dots P(l, 1)$ и $W := \mathbf{B}(G, \text{id}, c)$.

3.4. Каждая $f \in C_0(t, M \rightarrow X)$ имеет разложение

$$f(x)|_{U_j} = \sum_{(i \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_0)} f^i(n; x)|_{U_j} e_i \tilde{z}(n),$$

где $\{e_i \tilde{z}(n)(\bar{Q}_m(x)|_{U_j}) : i, n, \text{Ord}(m) = n, j\}$ — ортогональный базис, более того,

$$f_n(x)|_{U_j} := \sum_i f^i(n; x)|_{U_j} e_i \in C_0(t, U_j \rightarrow X),$$

где

$$X_{\tilde{z}(n)} := \{f_n(x) : f_n|_{U_j} \in C_0(t, U_j \rightarrow X)\}$$

— это БП с нормой, индуцированной из $C_0(t, M \rightarrow X)$, причем

$$f^i(n; x)|_{U_j} := \sum_{(\text{Ord } m=n, m=(m(1), \dots, m(n)), m(j) \in \mathbf{N}_0)} a(m, f^i|_{U_j}) \bar{Q}_m(x)|_{U_j},$$

а X — это БП из п. 2.2; полагаем $\bar{Q}_m(x)|_{U_j} = 0$ при $x \in M \setminus U_j$.

3.5.1. Для M зафиксируем последовательность $\{M_n : n \in \mathbf{N}_0\}$ подмногообразий в M таких, что $M_n \hookrightarrow M_{n+1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow M$ для любых n , $\dim_{\mathbf{K}} M_n = \beta(n) \in \mathbf{N}$ для любых $n \in \mathbf{N}_0$, $\bigcup_n M_n$ плотно в M , где $\beta(n) < \beta(n+1)$ для любых n и существует $n_0 \in \mathbf{N}$ с $\beta(n) = n$ для любых $n > n_0$. Пусть имеется последовательность $\{s(n) \in \mathbf{N} : n \in \mathbf{N}\}$, $s(n) \leq s(n+1)$ для любых n . Определим оператор

$$A(f) := \sum_{(n \in \mathbf{N}, k=(k(1), \dots, k(\beta(n))); k(j) \in \mathbf{N}_0, n \in \mathbf{N})} q(k) A(k; f', \bar{P}(\beta(n))f) \tilde{z}(\beta(n)),$$

где $|k(1), \dots, k(\beta(n))| = s(n)\beta(n)$, причем

$$\sum_{(\text{Ord}(k) \leq n, |k|=s(n)\beta(n))} q(k) =: \tilde{t}(n),$$

а также $0 < c \leq |\tilde{t}(n)| \leq c' < \infty$ для любых n с фиксированными c и c' , $\bar{P}(n)$ — проекторы на $X_{\tilde{z}(n)}$, т.е. $\bar{P}(n)f(x) = f_n(x)$ (см. п. 2.5.3 и 3.4 с $X = Y$).

3.5.2. Определим отображение

$$R(f) := \sum_{(n \in \mathbf{N}_0, k = (k(1), \dots, k(\beta(n))), k(j) \in \mathbf{N}_0)} q(k) R(k, n; f) \tilde{z}(\beta(n)),$$

где

$$R(k, n; f) := \partial^{z\bar{u}} F(k, n; \tilde{Q}(f; n)), \quad F(k, n; f) := S[A](k; g', \bar{P}(n)g)$$

с $g = \hat{T}f$ и $l + z \geq 1$ (см. п. 3.3), а оператор $Q((l, s); *)$ действует на функцию $f_{\beta(n)}(x)$ по переменным $(x^1, \dots, x^{\beta(n)})$, при этом

$$\tilde{Q}(f; n) := Q((l, z); Q((l, z-1); \dots; Q((l, 1); f_{\beta(n)}(x)) \dots)).$$

Операторы $\hat{T}$ и S даются формулами

$$\hat{T}f := \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{T}_n f_n) \tilde{z}_n, \quad Sg := \sum_{n=0}^{\infty} (S_n g_n) \tilde{z}_n,$$

причем S_n и $\hat{T}_n$ те же, что и операторы S и T для подмногообразия M_n вместо всего многообразия M в п. 2.5, а также принято соглашение: $\hat{T} = T$, если $\hat{T}_n = T_n$ для любых $n \in \mathbf{N}_0$; $\hat{T} = \tilde{T}$, если $\hat{T}_n = \tilde{T}_n$ для любых $n \in \mathbf{N}_0$.

3.5.3. Пусть имеется последовательность БП $H(n) = E((t, z), -a, M_n^{a+1} \rightarrow X)$ с $a = 2s(n)\beta(n)$ для любых $n \in \mathbf{N}_0$. Тогда БП $c_0(H(n) : n)$ (см. п. 2.2.1) обозначим через $E(t, \inf)$. Зададим подгруппу

$$G(t, M|h) := \{f : f \in G(t, M), \{(f_{i,j}^u(x) - \text{id}_{i,j}^u(x)) : u = 1, \dots, \beta(n)\} \in C_0(t, U_j \rightarrow X|h(n)), n \in \mathbf{N}_0\}$$

для последовательности $h := \{h(n) : h(n) = [s(n)\beta(n)/2], n \in \mathbf{N}_0\}$ с помощью подпространств

$$C_0(t, U_j \rightarrow X|h(n)) := \{f \in C_0(t, U_j \rightarrow X) | \Delta_n^l f^u|_{\widetilde{M}_n} = 0 \text{ для любых } l = 0, \dots, v(h(n), n)\},$$

где $s(n) = \max(2, [\bar{c}'n])$, $0 < \bar{c}' = \text{const}$, $\bar{c}' \in \mathbf{R}$, $\widetilde{M}_n := \widetilde{M} \cap M_n$ (см. п. 2.3).

3.6. ТЕОРЕМА. Группы $G_1 := G(t, M)$ и $G_2 := G(t, M|h)$ из п. 3.5 для любых $0 \leq t \in \mathbf{R}$ или $t = \text{an}_r$ и $b' \in \mathbf{C}$ имеют квазиинвариантные и псевдодифференцируемые порядка b' меры μ со значениями в $[0, \infty)$ и $\mathbf{Q}_q$ (для простых чисел $q \neq p$) относительно плотных подгрупп G'_η для $\eta = 1, 2$. Если M компактно, то $G'_\eta \supset G(t', M) \cap G_\eta$ при $t' = t + s$ для $0 \leq t \in \mathbf{R}$, $s \geq 2$, и $G'_\eta \supset G(\text{an}_R, M) \cap G_\eta$ при $t = \text{an}_r$ с $R > r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует открыто-замкнутая подгруппа W в G_η такая, что W диффеоморфна открыто-замкнутой окрестности V нуля в БП Z , при этом $R(W) = V$. R задано в п. 3.5.2 с помощью оператора для $\hat{T} = T$ (или $\hat{T} = \tilde{T}$), где $0 \leq t \in \mathbf{R}$ или $t = \text{ap}_r$ (при $M \subset \mathbf{B}(X, 0, r)$ в последнем случае). Имеется также вложение $Z \hookrightarrow E(t, \inf)$, т.к. в соответствии с п. 2.6; 2.11; 3.3 и 3.5 для любого $n > n_0$ операторы

$$\begin{aligned} \tilde{t}(n) \partial^{z\bar{u}(n)} S[\Delta_n]^{s(n)n} T\tilde{Q}(*; n) : C_0(t, M_n \rightarrow X|h(n)) \rightarrow \\ \rightarrow E((t, z), -2s(n)n, M_n^{2s(n)n+1} \rightarrow X) \quad \text{и} \quad \tilde{t}(n)[\Delta_n]^{s(n)n} \end{aligned}$$

кратны изометричным операторам с постоянными множителями. Возьмем подгруппу

$$\begin{aligned} G'_\eta := \{f \in G_\eta : (f^i(n; x) - \text{id}^i(n; x)) =: g^i(n; x) \in C_0(t_n, M_n \rightarrow \mathbf{K}) \quad \text{и} \\ |a(m; g^i(n; x)|_{U_j})|J_j(t_n, m) \leq c(f)p^{v'(m, j, i)}\}, \end{aligned}$$

где $c(f) > 0$ — постоянные, $v'(m, j, i) = -c'i - c'n - c''j$, $n = \text{Ord}(m)$, $c' = \text{const} > 0$ и $c'' = \text{const} \geq 0$ ($c'' > 0$ при $\Lambda = \omega_0$), $t_n = t + s(n)$ при $0 \leq t < \infty$; а в аналитическом случае $t = \text{ap}_r$ выполняются условия $t_n = \text{ap}_{R_n}$ и $R_n > r$ с $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (R_n/n) > 0$, $c'' = 0$ и $j = 1$.

Тогда имеется ультраметрика на G'_η

$$d_\eta(f, \text{id}) = \sup_{m, n, j} \left\{ |a(m; g^i(n; x)|_{U_j})|J_j(t_n, m)p^{-v'(m, j, i)} \right\}$$

(см. также § I.2.16, I.3.7 и II.2.2 из [8]). Для построения μ на G достаточно ее построить на W , т.к. существуют счетное семейство $\{g_i : i = 1, 2, \dots\} \subset G'$ и дизъюнктные открыто-замкнутые покрытия

$$\{V_j : V_j := g_j W_j, \quad W_j \subset W \quad \text{при} \quad j > 1 \quad \text{и} \quad V_1 = W\}$$

группы G_η и

$$\{V'_j : V'_j := g_j W'_j, \quad W'_j \subset W' \quad \text{при} \quad j > 1 \quad \text{и} \quad V'_1 = W'\}$$

группы G'_η , где W' открыто-замкнуто в G'_η и $W' \subset G'_\eta \cap W$. Поэтому мера

$$\mu(H) := \sum_{j \in \mathbf{N}} y(g_j^{-1}(H \cap V_j))x^j,$$

будет квазиинвариантной и псевдодифференцируемой относительно G'_η , если y квазиинвариантна и псевдодифференцируема относительно $G'_\eta \cap W$; $0 < x < 1$ для поля $\mathbf{R}$ и $x = q^n$ с $n \in \mathbf{N}$ для $\mathbf{Q}_q$.

А. Для локально-компактного M БП $E((t, z), -2sn, M^{2sn+1} \rightarrow \mathbf{K}^n) =: Z$ имеет базис

$$\left\{ [\Delta]^{sn} \overline{Q}_m(x)|_{U_j} e_i : i = 1, \dots, n; m \in \mathbf{N}_0^l, l = \text{Ord}(m) \leq \dim_{\mathbf{K}} M =: n; j \in \Lambda \right\},$$

что индуцирует изоморфизм БП Z с $c_0(\omega_0, \mathbf{K})$. На Z существуют меры ν вида

$$\nu(dx) = \bigotimes_j \nu_{\kappa(j)}(dx^j), \quad x = (x^j : x^j \in \mathbf{K}, j \in \mathbf{N}) \in c_0(\omega_0, \mathbf{K}),$$

$$\nu_j(dx^j) = f_j(x^j)w(dx^j), \quad f_j \in L^1(\mathbf{K}, w, \mathbf{R}) \quad \text{или} \quad f_j \in L(\mathbf{K}, w, \mathbf{K}_q),$$

$\nu_j(\mathbf{K}) = 1$ для любого j , w — мера Хаара на $\mathbf{K}$ со значениями в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{K}_q$, так что $w(\mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1)) = 1$. Можно взять, например,

$$f_j(dx^j)|_{\bar{S}(j,n)} = a(j,n), \quad \text{где} \quad \bar{S}(j,n) := \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, p^{-j}) \setminus \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, p^{-j-1})$$

для $j \in \mathbf{Z}$ с $j < n$,

$$\bar{S}(n,n) := \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, p^{-n}), \quad a(j,n) := 2^{n(j-n-1)}(1-2^{-n})\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{-n}$$

для $j < n$ и $a(n,n) := (1-2^{-2n})p^{-n}$ для действительной меры;

$$a(j,n) := (1-q)\left(1-\frac{1}{p}\right)q^{2n-1-j}p^{-n}$$

при $j < n$ и $a(n,n) := (1-q^{-n})p^{-n}$ для $\mathbf{K}_q$ -значной меры. Пусть

$$\kappa(b) \leq \kappa(b+1) \quad \text{для любого} \quad b \in \mathbf{N}, \quad (1)$$

$$\kappa(b) \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$p^{(\kappa(b)-v(m_b, j_b, i_b))} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad b \rightarrow \infty \quad (3)$$

(эти пределы берутся в $\mathbf{R}$), $\tilde{\psi}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{L}$ — биекция, $\mathbf{L}$ — множество $\{(m, j, i)\}$ индексов базиса в Z , $\tilde{\psi}(b) =: (m_b, j_b, i_b)$, $v(m, j, i) := c'|m| + c''j$, $c' = \text{const} > 0$, $c'' = \text{const} \geq 0$, $c'' > 0$ для $\Lambda = \omega_0$. Для компактного M можно выбрать $0 < c' < 2/n$ и $c'' = 0$. Для M , открыто-замкнутого в $\mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1)$, $0 \in M$, и для $G = \{f \in G(l, M) : f(0) = 0\}$ с $l \geq 1$ можно взять локальный диффеоморфизм $[A]$ вида

$$([A]g)(x; e_1; t) = \log_p(\bar{\Phi}^1 g)(x; e_1; t) - \log_p(\bar{\Phi}^1 g)(x; e_1; 0)$$

(см. § 44.1 в [10] и § 2.3 в [5]).

Для ϕ и $f \in W_{\text{id}} \subset C_0(t, M \rightarrow X)$ выполняется равенство

$$\partial_j^l(\phi \circ f)(x) = \phi'(f(x))\partial_j^l f(x) + \sum_{k=1}^{s-1} \binom{l-1}{k} \{\partial_j^k \phi'(f(x))\} \{\partial_j^{l-k} f(x)\} + B_{j,l}(x),$$

причем

$$B_{j,l}(x) = \sum_{k=s}^l \binom{l-1}{k} \{\partial_j^k \phi'(f(x))\} \{\partial_j^{l-k} f(x)\}$$

(см. п. 2.4 и 2.5.3). Для $\tilde{z} \in T\tilde{Q}(U)$ (с $\tilde{Q} = I$ для $z = 0$) имеем

$$\begin{aligned} A(i; (\tilde{t}(\tilde{z}))', \tilde{t}(\tilde{z})) - A(i; \tilde{z}', \tilde{z}) = \\ = \partial_1^{2i(1)} \dots \partial_{r-1}^{2i(r-1)} \partial_{2r+1}^{2i(r+1)} \partial_n^{2i(n)} \sum_{l=0}^{s-1} \chi(l, 2i(r)) \partial_r^l B_{r, 2i(r)-l}. \end{aligned}$$

Для данных g и v отображения $\tilde{t}$ и $\tilde{z}$ определены благодаря равенству $f = R^{-1}(v)$, поэтому $f \in U$, а $\tilde{z} := T\tilde{Q}(f)$ вместе с $\tilde{j} := T\tilde{Q}(g(f))$ являются диффеоморфизмами M в соответствии с п. 2.5, 2.6 и 3.2, следовательно, $\tilde{t}(x) = \tilde{j}(\tilde{z}^{-1}(x))$ — это диффеоморфизм. Пусть $S(g, v) := R(g(R^{-1}(v))) - v$, причем $R = \hat{F}$ для $z = 0$, а в аналитическом случае с $[A]$ вместо R . Предположим, что $v \in V$ и $g \in W$, где $V := R(U)$, U и W являются открыто-замкнутыми окрестностями id в $\text{Dif}(t, M|h)$ (или $G(t, M)$) и $\text{Dif}(t+s, M|h)$ (или $G(t+s, M)$), U определяется в п. 2.6 и 3.3, а замыкание W в $\text{Dif}(t, M|h)$ (или $G(t, M)$), соответственно равно U .

Б. Пусть теперь $\dim_{\mathbf{K}} M = \aleph_0$. Для любых n и $k = (k(1), \dots, k(n))$ рассмотрим операторы $S(k, n; g, f) := R(k, n; g \circ f) - R(k, n; f)$, где $g \in G'_\eta$, $f \in G_\eta$. Тогда

$$S(k, n; g, f) \in E((t, z), -a, M^{a+1} \rightarrow X) =: L_n$$

с $a = 2s(n)\beta(n) - s(n)$ и

$$|a(m, S(k, n; g|_{U_j}, f|_{U_j})^i |J_j(t, m) \leq Cp^{v'(m, j, i)} \frac{J_j(t, m)}{J_j(t_n, m)},$$

где $C = \text{const} > 0$, $V' \subset G'_\eta \cap W$, $0 \leq t \in \mathbf{R}$ с $t+z \geq 1$ или $t = \text{ap}_r$ с $z = 0$. Пусть $Z := \text{cl sp}_{\mathbf{K}} R(W)$, где $Z \subset E(t, \text{inf})$, и замыкание cl берется в $E(t, \text{inf})$; $R: W \rightarrow V$ — диффеоморфизм, как в начале доказательства, тогда $S(k, n; g, f)$ является $C(\infty)$ -отображением из $W \times V$ в L_n . В Z имеется ортогональный базис

$$\{\tilde{w}(m, j, i) := [\Delta_{\beta(n)}]^{s(n)\beta(n)} \overline{Q}_m(x)|_{U_j} e_i \tilde{z}(n)\}$$

с $n = \text{Ord}(m) \in \mathbf{N}_0$, $i \in \omega_0$, $m \in \mathbf{N}_0^n$ и $j \in \Lambda$. Пусть ν на $Z = c_0(\omega_0, \mathbf{K})$ того же вида, что и в пункте **A**, где $\kappa(b)$ удовлетворяет условиям (1)–(3) с $v(m, j, i) := c'i + c'\text{Ord}(m) + c'|m| + c''j$, $\mathbf{L}$ — множество $\{(m, j, i)\}$ индексов базиса в Z , $s(n) = \max(2, [c'n])$ (см. также теоремы 3.23, 3.28, 4.2 и 4.3 из работы [13]). Индуцируем меру y на $W \subset G_\eta$ (см. п. 2.5, 2.6, 3.3), так что $y(B) := \nu(R(B))$ для любых $B \in Bf(W)$.

3.7. ТЕОРЕМА. Пусть G — группа диффеоморфизмов с действительной квазиинвариантной мерой μ относительно плотной подгруппы G' . Тогда μ можно выбрать таким образом, чтобы регулярное представление группы G' было топологически неприводимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in L^1(G, \mu, \mathbf{C})$ удовлетворяет условию $f^h(g) = f(g) \pmod{\mu}$ для любых $h \in G'$, то $f(x) = \text{const} \pmod{\mu}$ в соответствии с §II.3.1 работы [11] и леммой 2.3 из [13], где $f^h(g) := f(hg)$, $g \in G$, а мера μ задана в п. 3.6. Для любого $E \subset G$ внешняя мера ограничена: $0 \leq \mu^*(E) \leq \mu(G) < \infty$, следовательно, существует $F \in Bf(G)$, так что $F \supset E$ и $\mu(F) = \mu^*(E)$, т.е. F может рассматриваться как минимальная (относительно значений μ) борелевская оболочка для E . В соответствии с §VIII.19.5 работы [14] мера μ эргодична.

Имеется сильно непрерывное регулярное представление

$$T_h f(g) := (\rho_\mu(h, g))^{1/2} f(h^{-1}g), \quad \text{где } f \in H, \quad h \in G', \quad T: G' \rightarrow U(H),$$

$U(H)$ – унитарная группа пространства $H := L^2(G, \mu, \mathbf{C})$. В соответствии с п. 3.6 можно выбрать μ , для которой существуют интегралы $PD_c(l, v(S(\zeta, \phi), g))$ любого порядка $l \in \mathbf{N}$, где $v := \rho_\mu^{1/2}$. Для любого $m \in \mathbf{N}$ имеются локально-аналитические функции $S(\zeta, \phi)$ с аналитическими ограничениями $S|_{\mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1) \times W'}$ для окрестности $\text{id} \in W' \subset W \cap G'$ и условие $\det(\Psi(g)) = 0$ определяет аналитическое подмногообразие G_Ψ в G с $\text{codim}_{\mathbf{K}} G_\Psi \geq 1$, где $\Psi(g)$ – матрица, зависящая от $g \in G$ с элементами $\Psi_{l,j}(g) := PD_c(l, v(S(\zeta, \phi_j), g))$ при $l \geq 1$. Если $f \in H$ такова, что $(f(g), v(\phi, g))_H = 0$ для любых $\phi \in G' \cap W$, то $PD_c(l, (f(g), v(S(\zeta, \phi_j), g)))_H = 0$. Тогда $f = 0$, т.к. для любых $m \in \mathbf{N}$ имеются $S(\zeta, \phi_j)$ с $\det(\Psi(g)) \neq 0$ μ -почти всюду на G , следовательно, вектор f_0 циклический, где $f_0(g) = 1$ для любого $g \in G$. Из выбора V_j, V'_j в п. 3.6 и построения меры μ следует, что не существует ненулевого конечномерного G' -инвариантного подпространства H' в H .

Пусть $\alpha_F(f) = Ff$ для $F \in L^\infty(G, \mu, \mathbf{C})$ при любых $f \in H$. Пусть A_G обозначает *-подалгебру, порожденную семейством унитарных операторов $\{T_h : h \in G'\}$ в алгебре $\tilde{L}(H)$ непрерывных линейных операторов $B: H \rightarrow H$. В силу теоремы фон Неймана (см. §VI.24.2 из [14]) $A_G'' := (A_G')'$ совпадает со слабым замыканием A_G в $\tilde{L}(H)$, где A_G' обозначает коммутантную алгебру для A_G . Пусть λ является вероятностной действительной мерой на G' с $\text{supp}(\lambda) = G'$. Каждый оператор α_F принадлежит A_G'' , т.к. в силу циклическости f_0 существует функция $\beta(h)$, удовлетворяющая равенствам

$$(f_s, Ff_l)_H = \int_G \int_{G'} \bar{f}_s(g) \beta(h) (T_h f_l(g)) \lambda(dh) \mu(dg),$$

$$\int_G \bar{f}_s(g) F(g) f_l(g) \mu(dg) = \int_G \int_{G'} \bar{f}_s(g) \beta(h) f_l(g) \lambda(dh) \mu(dg).$$

Если $\bar{p}$ является проектором на замкнутое T -инвариантное подпространство в H , то в соответствии с §VIII.19.2;5 работы [14] либо $\bar{p} = 0$, либо $\bar{p} = I$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В качестве пространства-времени Минковского используется многообразие $M = \mathbf{Q}_p^4$ с билинейной функцией $\phi(x, y) := c^2 x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$, где c – скорость света,

$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^j \in \mathbf{Q}_p$ [2]. В общем случае можно рассмотреть БМ M , моделируемое на $\mathbf{K}^n$ или $c_0(\omega_0, \mathbf{K})$. Зададим для него p -адический аналог интервала $ds^2 := g_{i,j} dx^i dx^j$, где $(g_{i,j})_x = g_{i,j} = g_{j,i}$ является локально-аналитической функцией по $x \in M$; зададим также символы Кристоффеля $\Gamma_{i,j}^k$, тензор кривизны $R_{j,k,l}^i$, тензор Риччи $R_{i,j} = R_{i,l,j}^l$ и скалярную кривизну $R = R_{i,j} g^{i,j}$, где $g^{i,j} g_{j,k} = \delta_k^i$. Уравнения Эйнштейна гравитационного поля имеют вид $R_{i,j} - R g_{i,j}/2 + \lambda g_{i,j} = \kappa T_{i,j}$, где $T_{i,j}$ – тензор энергии-импульса [2].

Поскольку $G'(\infty, M)$ плотно в $G'(t, M)$, ограничение представления T из п. 3.7 на $G'(\infty, M)$ неприводимо. Согласно теореме 2 из работы [6] (см. также §3.1 из [8]) при $t' \geq 1$ в группе $G(t', M)$ существует открыто-замкнутая подгруппа W' , так что каждый элемент $g \in W'$ лежит хотя бы на одной однопараметрической подгруппе g^z . Это означает, что $(\partial g^z / \partial z) = A g^z$ с $z \in \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1)$, $g^1 = g$ и $g^0 = \text{id}$, хотя W' и $G(\infty, M)$ не являются группами Банаха–Ли, где $g^{z+y} = g^z \circ g^y$ для любых z и $y \in \mathbf{B}(\mathbf{K}, 0, 1)$, $A = A(x)$ – векторное поле на M , т. е. $A(x) = A^1(x) \partial_1 + A^2(x) \partial_2 + \dots$ с $A^i \in C(t', M \rightarrow \mathbf{K})$ для любого $x \in M$, $g = g(x)$, $M \subset \mathbf{K}^n$. Для $c_0(\omega_0, \mathbf{K})$ вместо всего топологически сопряженного пространства $c_0(\omega_0, \mathbf{K})^*$ рассмотрим подпространство $c_0(\omega_0, \mathbf{K})$, разделяющее точки в исходном пространстве. Возьмем в качестве T^*M для бесконечномерного над $\mathbf{K}$ банахова многообразия M подмногообразие кокасательного расслоения, изоморфное TM . Тогда можно рассмотреть форму Лиувилля $\theta_l := p_i(l)(dq^i)_l$ на $2n$ -мерном банаховом многообразии T^*M , где $l \in T^*M$, $(q^1, q^2, \dots; p_1, p_2, \dots)$ – локальные координаты для кокасательного (под)расслоения T^*M в базисе $((dq^1)_l, (dq^2)_l, \dots; (dp_1)_l, (dp_2)_l, \dots)$ и выполняется формула $\langle \theta_l, v \rangle_l := \langle l, \pi_* v \rangle_{\pi(l)}$ для любых $v \in T_l(T^*M)$, где $\pi: T^*M \rightarrow M$ – проекция, π_* – дифференциал отображения π , $n \leq \omega_0$. Банахово многообразие T^*M является симплектическим, т.к. на нем существует замкнутая 2-форма $\sigma = -d\theta = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 + \dots$. В работе [8] было доказано, что симплектическая группа $\text{Sp}(2n, \mathbf{K})$ над полем $\mathbf{K}$ вкладывается в $G(\infty, M)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, в чем можно также убедиться, рассматривая $\psi \in G(\infty, M)$ с $\psi^* \sigma = \sigma$, где ψ^* – операция ограничения тензорного поля, $\psi^* = (\psi_*)^{-1}$. Тогда каждый элемент $\phi \in G(\infty, M)$ сохраняет форму Лиувилля θ , т.к. $\phi^* =: \psi \in G(\infty, T^*M)$, $\psi^* \theta = \theta$, $\psi^* \sigma = \sigma$ согласно §4 из работы [1].

Пусть $C(\infty, M \rightarrow \mathbf{K})$ – абелева группа относительно поточечного сложения функций, элементы $h \in C(\infty, M \rightarrow \mathbf{K})$ действуют на локальные симплектические координаты преобразованием $\Psi_h(q, p) = (q, \{p_j - \partial h(q) / \partial q^j : j\})$, где $q = (q^1, q^2, \dots)$ и $p = (p_1, p_2, \dots)$. Каждый элемент $\phi \in G(\infty, M)$ задает преобразование $\tau_\phi(l) := (\phi^{-1})^*(l)$, где $l \in T_q^*M$. Так же как в работе [1], полупрямое произведение групп $C(\infty, \mathbf{K}) \otimes^s G(\infty, M)$ действует транзитивно и симплектически на T^*M .

Пусть γ^A обозначает векторное поле на T^*M , ассоциированное с однопараметрической подгруппой диффеоморфизмов, соответствующей векторному полю A на M . Тогда $\sigma(\gamma^A, B) = B \langle \theta, \gamma^A \rangle - \langle L_{\gamma^A}(\theta), B \rangle$ для любого векторного поля B на T^*M , где L_{γ^A} обозначает производную Ли для любой гладкой дифференциальной формы w степени l на БМ N . Действие $G(\infty, M)$ на T^*M сохраняет форму Лиувилля θ , поэтому $L_{\gamma^A} \theta = 0$, следовательно, $\sigma(\gamma^A, B) = \langle d \langle \theta, \gamma^A \rangle, B \rangle$, т. е. γ^A является гамильтонианом.

Пространство метрик на БМ Σ можно отождествить с $C(\infty, \Sigma \rightarrow S)$ при $\dim_{\mathbf{K}} \Sigma =$

$n \in \mathbf{N}$, где $S := GL(n, \mathbf{K})/O(n, \mathbf{K})$. При квантовании в теории гравитации можно взять $n = 3$ и задать неотрицательную меру Хаара на $\mathbf{K}^n$ и индуцируемую ею дифференциальную форму $\theta_x := (n!)^{-1} \epsilon_{j_1, \dots, j_n} (\theta^{j_1} \wedge \theta^{j_2} \wedge \dots \wedge \theta^{j_n})_x$, где θ^i соответствуют 1-формам на $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}$, ϵ – антисимметричный тензор с $\epsilon_{1,2,\dots,n} = 1$. Возьмем в качестве БМ $M = C(l, \Sigma \rightarrow GL(n, \mathbf{K}))$ с $2 < l < \infty$, где Σ – открыто-замкнутое подмножество в $\mathbf{K}^n$. Тогда при рассмотрении хорошо известных уравнений Дирака и Вилера–Де Витта (см., например, [1, уравнения (6.3)–(6.12)]) квантование может быть сведено к нахождению представлений группы $G'(\infty, M) \subset G(\infty, M)$.

Благодарности. Автор искренне благодарен И. В. Воловичу за обсуждение статьи.

Список литературы

- [1] *C. J. Isham.* Topological and global aspects of quantum theory. In: Relativity, Groups and Topology. II. Ed. B.S. De Witt. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 1059.
- [2] *I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, P. H. Frampton, I. V. Volovich.* Int. J. Mod. Phys. 1991. V. 6. P. 4341.
- [3] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленев.* *p*-Адиический анализ и математическая физика. М.: Физ.-мат. лит., Наука, 1994.
- [4] *A. C. M. van Rooij.* Non-Archimedean Functional Analysis. New York: Marcel Dekker Inc., 1978.
- [5] *S. V. Ludkovsky.* Southeast Asian Bull. Math. 1998. V. 22. P. 419.
- [6] *С. В. Людковский.* УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 169.
- [7] *С. В. Людковский.* УМН. 1996. Т. 53. № 3. С. 203.
- [8] *S. V. Ludkovsky.* Representations and structure of groups of diffeomorphisms of non-Archimedean Banach manifolds. I, II. Preprints № IC/96/180, 181. Trieste: Int. Cent. Theor. Phys., 1996; <http://www.ictp.trieste.it>.
- [9] *Е. Т. Шавагулидзе.* ДАН СССР. 1988. Т. 303. № 4. С. 811.
- [10] *W. H. Schikhof.* Ultrametric calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [11] *Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерном пространстве. М.: Наука, 1983.
- [12] *В. С. Владимиров.* УМН. 1989. Т. 43. № 5. С. 17.
- [13] *S. V. Ludkovsky.* Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures on a non-Archimedean Banach space. Preprint IC/96/210. Trieste: Int. Cent. Theor. Phys., 1996; № 3353-B97, 17.11.1997; М.: ВИНТИ, 1997.
- [14] *J. M. G. Fell, R. S. Doran.* Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-Algebraic Bundles. Boston: Acad. Press, 1988.

Поступила в редакцию 18.VI. 1998 г.,
после доработки 10.II. 1999 г.