Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Юров, Сопряженные цепочки дискретных симметрий $(1 + 2)$ нелинейных уравнений, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 3, 419–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 09:51:17

© 1999 г.

А. В. Юров*

СОПРЯЖЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ДИСКРЕТНЫХ СИММЕТРИЙ $(1 + 2)$ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Построены одевающие цепочки дискретных симметрий для уравнений Кадомцева–Петвиашвили. Показано, что для уравнений Кадомцева–Петвиашвили существуют два вида цепочек, которые мы называем взаимно сопряженными. Обсуждается схема построения одевающих цепочек для уравнений Бойти–Леона–Пемпинелли. Для этих уравнений найдено несингулярное, локализованное экспоненциально по одним и рационально по другим направлениям на плоскости диссипативное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на примере уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ) и синус–Гордон был предложен способ размножения интегрируемых уравнений при помощи одевающих цепочек дискретных симметрий. Основная идея этого подхода состоит в следующем: уравнение КдФ (для определенности) записывается как условие совместности двух квадратично-нелинейных по вспомогательным полям уравнений, которые мы формально обозначим L_1 и A_1 . Используя инвариантность LA -пары относительно преобразования Дарбу, которое рассматривается как дискретная симметрия уравнения КдФ, мы строим вторую пару уравнений L_2, A_2 . Исключая потенциалы из L_1, L_2 и A_1, A_2 , можно получить два уравнения, которые авторы [1] называют соответственно x - и t -цепочками. Мы обозначим их C_x и C_t . Если же исключить потенциал из L_1 и A_1 , то возникает модифицированное уравнение КдФ (мКдФ). Уравнения C_x и C_t двумя способами можно превратить в LA -пары для уравнения мКдФ, для которых уже известно преобразование Дарбу. Продолжая процедуру, получаем новые интегрируемые нелинейные уравнения вместе с их LA -парами. Так были построены уравнения m^2 КдФ и m^3 КдФ, первое из которых после точечной экспоненциальной замены сводится к экспоненциальному уравнению Калоджеро–Дегаспериса (КД), а второе содержит эллиптическое уравнение тех же авторов.

Несмотря на видимую простоту, описанный метод оказывается чрезвычайно мощным. Это обстоятельство можно проиллюстрировать следующими двумя примерами: во-первых, как отмечено в [1] и [2], уравнения m^N КдФ с $N = 0, \dots, 3$ совместно с уравнением Кричевера–Новикова исчерпывают (с точностью до контактных преобразований)

*Калининградский государственный университет, Калининград, Россия

все интегрируемые уравнения вида $u_t + u_{xxx} + f(u_{xx}, u_x, u) = 0$; во-вторых, применяя этот подход к уравнению синус-Гордон, уже на втором шаге авторы работы [1] получили новое (!) нелинейное уравнение с нетривиальным преобразованием Беклунда, допускающее интересное решение – 2π -кинк с “полочкой”.

Все это указывает на возможную плодотворность обобщения метода одевающих цепочек на значительно более сложные $(1 + 2)$ -мерные нелинейные уравнения. Во втором и третьем разделах будут построены одевающие цепочки для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП). Будут получены (совместно с их LA -парами) $(1 + 2)$ -интегрируемые уравнения, которые в одномерном пределе переходят в экспоненциальное уравнение КД. Новым результатом, специфичным именно для многомерных систем, является открытие того факта, что для уравнения КП можно получить два вида одевающих цепочек, которые мы называем сопряженными или цепочками I и II рода. В разделе 4 рассмотрена схема построения одевающих цепочек дискретных симметрий для уравнений Бойти–Леона–Пемпинелли (БЛП) и приводится точное несингулярное решение этих уравнений, которое описывает локализованный, экспоненциально по одним и рационально по другим направлениям на плоскости, диссипирующий импульс.

2. ОДЕВАЮЩИЕ ЦЕПОЧКИ I РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КП

Запишем уравнение КП в виде

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -3\alpha^2 v_y, \quad v_x = u_y, \quad (1)$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ и $\alpha^2 = \pm 1$. LA -пара для уравнения КП имеет вид

$$\alpha\psi_y + \psi_{xx} + u\psi = 0, \quad \psi_t + 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3(u_x - \alpha v)\psi = 0. \quad (2)$$

Если ввести обозначение $f \equiv \ln \phi$, $\tau \equiv f_x$, где ϕ – частное решение (2), то LA -пара примет вид

$$\begin{aligned} \alpha\tau_y + (\tau_x + \tau^2 + u)_x &= 0, \\ \tau_t + (4\tau_{xx} + 12\tau\tau_x + 4\tau^3 + 6u\tau + 3u_x - 3\alpha v)_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из первого уравнения (3) находим

$$u = -\tau_x - \tau^2 - \alpha F, \quad F_x = \tau_y. \quad (4)$$

Подставляя (3) во второе уравнение (4), после простых преобразований получаем хорошо известное модифицированное уравнение КП (мКП) [3]

$$\tau_t - 6\tau^2\tau_x + \tau_{xxx} = 3\alpha(2\tau_x F - \alpha F_y), \quad F_x - \tau_y = 0. \quad (5)$$

Перейдем к построению одевающих цепочек дискретных симметрий. Уравнение КП допускает преобразование Дарбу [4]

$$\psi_1 = \psi - \tau\psi, \quad u_1 = u + 2\tau_x, \quad v_1 = v + 2\tau_y. \quad (6)$$

Если обозначить $s \equiv \ln \psi_1$, $\sigma = s_x$, то σ будет удовлетворять системе (3) с заменой $u \rightarrow u_1$ и $v \rightarrow v_1$. Сравнивая эти уравнения с (3) и исключая потенциалы u и v , получаем

$$\begin{aligned} & \alpha(s-f)_y + (s+f)_{xx} + s_x^2 - f_x^2 = 0, \\ & (s-f)_t + [2(2s+f)_{xx} + 6s_x^2 - 3f_x^2]_x + 4s_x^3 + \\ & + 6(f_{xx} - f_x^2 - \alpha f_y)_{s_x} - 6\alpha(f_{xy} - f_x f_y) + 2f_x^3 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первое уравнение (7) определяет y - (мы будем обозначать ее $C_y^{(+)}$), а второе t -цепочку ($C_t^{(+)}$). Цепочки (7) содержат две LA -пары для (5), возникающие после введения вспомогательной функции (которую мы будем обозначать прописной буквой Ψ) по одному из двух правил:

$$\Psi = s - f, \quad \Psi = s + f. \quad (8)$$

Если воспользоваться первым правилом, то из (7) имеем

$$\begin{aligned} & \alpha \Psi_y + (2f + \Psi)_{xx} + 2f_x \Psi_x + \Psi_x^2 = 0, \\ & \Psi_t + 2(2\Psi_{xx} + 6f_x \Psi_x + 3\Psi_x^2 + 3\theta)_x + 6\theta \Psi_x + 4(3f + \Psi)_x \Psi_x^2 = 0, \\ & \theta \equiv f_{xx} + f_x^2 - \alpha f_y. \end{aligned} \quad (9)$$

Условие совместности этих уравнений имеет вид

$$(f_t - 2f_x^3 + f_{xxx})_x = 3\alpha(2f_{xx}f_y - \alpha f_{yy}), \quad (10)$$

что является просто другой формой записи уравнения мКП ($\tau = f_x$, $F = f_y$).

Описанный процесс можно повторить. В частности, система (9) содержит новое нелинейное уравнение, которое можно получить исключением потенциала f . Для этого линеаризуем первое уравнение (9) подстановкой

$$f = -\frac{1}{2}(\Psi + \alpha\xi), \quad (11)$$

где $\xi = \xi(x, y, t)$. Подставляя (11) во второе уравнение (9), дифференцируя его (для удобства) по x и определяя $S \equiv \Psi_x$, получаем систему

$$\begin{aligned} & S_t + S_{xxx} - \frac{3}{2}S^2 S_x = -3\alpha^2 \left[\left(\frac{1}{2}\xi_x^2 + \xi_y \right) S + \left(\frac{1}{2}\xi_x^2 + \xi_y \right)_x \right]_x, \\ & S_y = (\xi_{xx} + \xi_x S)_x. \end{aligned} \quad (12)$$

Размерности зависимых и независимых переменных, входящих в (12), таковы:

$$[S] = 1, \quad [\xi] = 0, \quad [x] = 1, \quad [y] = \frac{1}{2}, \quad [t] = \frac{1}{3}. \quad (13)$$

Уравнения (12) выглядят как двумерное обобщение уравнения мКдФ, но в одномерном пределе (когда $\partial_y = 0$) (9) сводится не к уравнению мКдФ, а к уравнению

$$g_t + \left(g_{xx} - \frac{\alpha^2}{2}g^3 - \frac{3}{2}\frac{g_x^2}{g} \right)_x = 0, \quad (14)$$

где $g(x, t) \equiv \xi_x = \exp(-\Psi)$.

В работе [1] это уравнение было получено (с точностью до членов, содержащих спектральные параметры, и при $\alpha^2 = 1$) из уравнения мКдФ и называлось уравнением м²КдФ. Там же отмечено, что после точечной экспоненциальной замены оно сводится к экспоненциальному уравнению КД. Таким образом, уравнение (12) скорее заслуживает названия двумерного уравнения КД, чем двумерного уравнения мКдФ. Отметим, что (12) можно записать в локальной форме в виде уравнения на одну функцию $\zeta = \zeta(x, y, t)$, которая определяется соотношениями

$$S = (\ln \zeta_x)_x, \quad \xi_x = \frac{\zeta_y}{\zeta_x}.$$

Соответствующее уравнение, впрочем, громоздко (содержит производные до пятого порядка и такие же степени в нелинейных членах), и мы его выписывать не будем.

В работе [1] при выводе уравнения КД (и для получения C_x -цепочки уравнений мКдФ) использовалось другое представление для Ψ , а именно определяемое второй формулой (8). Мы тоже воспользуемся этой формулой, для того чтобы представить наши результаты в наиболее удобном для сравнения с [1] виде. В этом случае, вводя новую функцию $\eta(x, y, t)$, можно выписать новую LA -пару (точнее, тройку) для уравнения МКП:

$$\begin{aligned} \alpha \Psi_y + \Psi_{xx} - 2\alpha f_y - 2f_x \Psi_x + \Psi_x^2 &= 0, \\ \Psi_t - 6f_x \Psi_x^2 + 6f_x^2 \Psi_x - 3\alpha \Psi_{xy} + \Psi_{xxx} + 3\Psi_x \Psi_{xx} - \\ - 6f_x \Psi_{xx} + \Psi_x^3 - 3\alpha \Psi_x \Psi_y + 6\alpha \eta_y &= 0, \\ \eta_x &= f_x^2 + \alpha f_y. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения можно рассматривать как систему нелинейных уравнений для трех функций Ψ , f и η . Легко убедиться, что в одномерном пределе функция $g \equiv \Psi_x$ удовлетворяет уравнению КД (14) при $\alpha^2 = 1$. Размерности переменных даются формулами

$$[\Psi] = [f] = 0, \quad [\eta] = [x] = 1, \quad [y] = \frac{1}{2}, \quad [t] = \frac{1}{3}. \quad (16)$$

Разумеется, заменой зависимых переменных можно превратить (15) в (12) и наоборот, т.е. это просто разные представления одного уравнения. С этой точки зрения различие между (12) и (15) подобно различию между уравнениями Максвелла, записанными в разных калибровках.

Мы не будем выписывать в явном виде выражения для одевающих цепочек уравнения МКП. Ограничимся нахождением LA -пары для (15). Для этого нужно еще раз осуществить преобразование Дарбу (6). Преобразованная система (15) получается заменой $\Psi \rightarrow \Psi_1$, $\eta \rightarrow \eta_1 = \eta - \Psi_x$ и $f \rightarrow s = \Psi - f$. Определяя новую функцию $\Phi \equiv \Psi_1 + \Psi$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha \Phi_y + \Phi_x^2 + \Phi_{xx} + 2(f_x - 2\Psi_x)\Phi_x - 4\eta_x + 4f_x^2 + 2\Psi_{xx} + 6\Psi_x^2 - 8f_x \Psi_x &= 0, \\ \Phi_t + 4\Phi_x^3 + 12(f_x - 2\Psi_x)(\Phi_x^2 + \Phi_{xx}) + 6(\Phi_x^2)_x + \\ + 6(f_{xx} - 2\Psi_{xx} + 2f_x^2 - \eta_x + 8\Psi_x^2 - 8f_x \Psi_x)\Phi_x + 4\Phi_{xxx} + \\ + 12(3\Psi_x \Psi_{xx} - 2\Psi_x^3 + 2f_x \Psi_x^2 - f_{xx} \Psi_x + \alpha \eta_y - 2f_x \Psi_{xx} - \alpha \Psi_{xy}) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Условие совместности для системы (17) имеет вид

$$(\Phi_y)_t - (\Phi_t)_y = (\Phi_x^2 + \Phi_{xx})V_2 + \Phi_x V_1 + V_0 = 0, \quad (18)$$

где $V_2 = V_1 = V_0 = 0$, если справедливы уравнения (15). Таким образом, LA -пара для (15) построена.

Можно продолжить эту процедуру и получить двумерное обобщение эллиптического уравнения КД. Единственная трудность – быстро растущий объем вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Описываемый способ размножения интегрируемых $(1+2)$ -уравнений прямо переносится на редуцированные $(1+1)$ - и $(0+2)$ -модели. В качестве примера рассмотрим уравнение Буссинеска

$$3(u_y + u_{xx}) + 4v_x = 0, \quad 4v_y + (3u_y - 3u^2 - u_{xx})_x, \quad (19)$$

где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Соответствующая LA -пара имеет вид

$$\psi_y = \psi_{xx} + u\psi, \quad \psi_{xxx} = -\frac{3}{2}u\psi_x + v\psi. \quad (20)$$

Обозначим $\tau = \phi_x \phi^{-1}$, где ϕ – некоторое решение (20), отличное от ψ . Преобразование Дарбу имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi_1 = \psi_x - \tau\psi, \\ u &\rightarrow u_1 = u + 2\tau_x, \\ v &\rightarrow v_1 = -2v - \frac{3}{2}u_x + 3\tau^3 + \frac{9}{2}\tau u + 6\tau\tau_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Если обозначить $\tau = f_x$, то

$$\begin{aligned} u &= f_y - f_x^2 - f_{xx}, \\ v &= f_{xxx} + \frac{3}{2}f_x f_{xx} - \frac{1}{2}f_x^3 + \frac{3}{2}f_x f_y, \end{aligned} \quad (22)$$

откуда следует модифицированное уравнение Буссинеска

$$3f_{yy} + 6f_y f_{xx} + (f_{xxx} - 2f_x^3)_x = 0. \quad (23)$$

Это уравнение, как легко видеть, является стационарным пределом уравнения мКП, записанным в форме (10). Отсюда ясно, что путем продолжения этой процедуры можно получить стационарный вариант уравнений (12), (15) и т. д.

3. ОДЕВАЮЩИЕ ЦЕПОЧКИ II РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КП

Кроме обычного преобразования Дарбу, уравнения КП допускают так называемые бинарные преобразования Дарбу [4], которые, как мы покажем, позволяют построить новые одевающие цепочки КП.

Очевидно, что уравнение КП допускает LA -пару

$$-\alpha\chi_y + \chi_{xx} + u\chi = 0, \quad \chi_t + 4\chi_{xxx} + 6u\chi_x + 3(u_x + \alpha v)\chi = 0, \quad (24)$$

получающуюся из (2) простой заменой $\alpha \rightarrow -\alpha$. Пусть

$$\begin{aligned} dQ(\chi, \psi) &= \chi\psi dx + \frac{1}{\alpha}(\chi_x\psi - \chi\psi_x) dy + \\ &+ 4\left(\psi_x\chi_x - \chi_{xx}\psi - \chi\psi_{xx} - \frac{3}{2}u\chi\psi\right) dt, \\ Q(\chi, \psi) &\equiv \int dQ(\chi, \psi). \end{aligned} \quad (25)$$

Легко убедиться, что 1-форма $dQ(\chi, \psi)$ замкнута, если ψ и χ являются решениями уравнений (2) и (24). Пара (24) также допускает преобразование Дарбу

$$\chi_{-1} = \chi - \rho\chi, \quad u_{-1} = u + 2\rho_x, \quad v_{-1} = v + 2\rho_y, \quad (26)$$

где $\rho = (\ln \tilde{\chi})_x$, а $\tilde{\chi}$ — частное решение (24). Если осуществить преобразование Дарбу (6), то

$$\chi_1 = \frac{A + BQ(\chi, \psi)}{\psi}, \quad (27)$$

где A и B — произвольные константы. Используя теперь (26), получаем

$$u_{1,-1} = u + 2[\ln(A + BQ(\chi, \psi))]_{xx}, \quad v_{1,-1} = v + 2[\ln(A + BQ(\chi, \psi))]_{xy}. \quad (28)$$

Обозначим $\sigma \equiv \chi_{1,x}/\chi_1$. Эта функция удовлетворяет (3) с заменой $u \rightarrow u_1$, $v \rightarrow v_1$ и $\alpha \rightarrow -\alpha$. Другими словами, получаются новые интегрируемые y - и t -цепочки ($C_y^{(-)}$ и $C_t^{(-)}$), которые можно назвать сопряженными к цепочкам $C^{(+)}$, обсуждавшимся в предыдущем разделе, или цепочками II рода

$$\begin{aligned} -\alpha(s+f)_y + (s+f)_{xx} + s_x^2 - f_x^2 &= 0, \\ (s+f)_t + [4(s+f)_{xx} + 6s_x^2 - 3f_x^2]_x + 4s_x^3 + \\ + 6(f_{xx} - f_x^2 - \alpha f_y)s_x - 6\alpha f_x f_y - 2f_x^3 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где по-прежнему $\tau = f_x$, $\sigma = s_x$. Сравнение выражений для $C^{(-)}$ и $C^{(+)}$ из (7) показывает, что эти цепочки не сводятся друг к другу, оправдывая тем самым термин “сопряженные”. Отсюда следует, что цепочки $C^{(-)}$ приводят к новым интегрируемым уравнениям, а также к соответствующим LA -парам. Для их получения опять следует воспользоваться двумя вариантами определения Ψ из (8). В данном случае удобно выбрать

вторую формулу. В результате получаем еще одну LA -пару для уравнения мКП (10)

$$\begin{aligned} -\alpha\Psi_y + \Psi_{xx} - 2f_x\Psi_x + \Psi_x^2 &= 0, \\ \Psi_t + 2(2\Psi_{xx} - 3f_x\Psi_x + 3\Psi_x^2)_x + 6(f_x^2 - \alpha f_y)\Psi_x - \\ - 6f_x\Psi_{xx} + 4(\Psi - 3f)_x\Psi_x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Линеаризуя первое уравнение подстановкой, которая отличается от (11) только знаком перед правой частью, и определяя $S \equiv \Psi_x$, имеем

$$\begin{aligned} S_t + 4S_{xxx} - \frac{3}{2}S^2S_x &= 3\alpha \left[\xi_{xx}S + 2\xi_xS_x + \alpha \left(\xi_y - \frac{1}{2}\xi_x^2 \right) S \right]_x, \\ \alpha S_y &= (S_x - \alpha\xi_xS)_x. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (31) похожи на (12) и в одномерном пределе тоже, разумеется, редуцируются к уравнению КД (14) (с $\alpha^2 = 1$). Вместе с тем, как следует из способа их построения, уравнения (31) не сводятся к системе (12) взаимнооднозначной заменой зависимых переменных (калибровочным преобразованием), поэтому уравнения (31) можно назвать сопряженными к уравнениям (12).

Можно продолжить эту процедуру: найти LA -пару для (31), построить следующее уравнение и т. д. Соответствующие вычисления уже не содержат ничего нового по сравнению с выкладками из предыдущего раздела, поэтому мы их опустим.

4. УРАВНЕНИЯ БЛП

Представляет интерес использование описанного метода для размножения других $(1 + 2)$ -мерных интегрируемых уравнений. В этом разделе мы кратко обсудим схему построения одевающих цепочек для уравнений БЛП. Мы выбрали именно эти уравнения, потому что решение описанной задачи для модели БЛП сталкивается с некоторыми специфическими особенностями, отличающими уравнения БЛП от разобранных выше случая уравнений КП. Отметим, что симметричные свойства уравнений БЛП (имеются в виду дискретные симметрии) тесно связаны с аналогичными свойствами знаменитых уравнений Дэви–Стюартсона (см., например, [5]). Подробное исследование задачи построения одевающих цепочек для уравнений Дэви–Стюартсона и родственных им моделей (в частности, уравнений БЛП) будет представлено в отдельной работе. Здесь мы ограничимся демонстрацией упомянутых выше особенностей модели БЛП и одного точного, локализованного по пространственным переменным решения.

Уравнения БЛП имеют вид (см. [6, 7])

$$a_{ty} = [(a^2 - a_x)_y + 2b_x]_x, \quad b_t = (b_x + 2ab)_x, \quad (32)$$

где $a = a(x, y, t)$ и $b = b(x, y, t)$. Соответствующая LA -пара выглядит как

$$\psi_{xy} + a\psi_y + b\psi = 0, \quad \psi_t + \psi_{xx} - p\psi = 0, \quad (33)$$

где имеет место связь $p_y + 2b_x = 0$.

Пусть ϕ – частное решение уравнений (33). Определим две функции $\tau = (\ln \phi)_x$ и $\rho = ((\ln \phi)_y)^{-1}$. Прямой подстановкой можно убедиться, что (33) инвариантно относительно двух видов преобразований Дарбу:

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi_1 &= \psi_x - \tau\psi, & a \rightarrow a_1 &= a - (\ln(a + \tau))_x, \\ b \rightarrow b_1 &= b + \tau_y, & p \rightarrow p_1 &= p - 2\tau_x \end{aligned} \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi_1 &= \rho\psi_y - \psi, & a \rightarrow a_1 &= -\tau - b\rho, \\ b \rightarrow b_1 &= b - (b\rho)_y, & p \rightarrow p_1 &= p + 2(b\rho)_x. \end{aligned} \quad (35)$$

Кроме преобразований Дарбу, в число дискретных симметрий входят преобразования Лапласа [8, 9], которые устанавливают связь этих уравнений с уравнением sh-Гордон, двумерной цепочкой Тоды и некоторыми ее обобщениями [5, 9].

Таким образом, уравнения БЛП имеют более широкий набор симметрий и, следовательно, допускают больше различных способов конструирования одевающих цепочек. В частности, использование формул (34) и (35) приводит к двум различным цепочкам. Выберем в качестве рабочего преобразования Дарбу то, которое дается формулами (34), и обозначим $f \equiv \ln \phi$, $s = \ln \psi_1$, $b = \theta_y$. Тогда $p = -2\theta_x$, а преобразование Дарбу для коэффициента b принимает вид $\theta \rightarrow \theta_1 = \theta + f_x$. Из (33) и (34) следует справедливость уравнений

$$\begin{aligned} f_{xy} + (f_x + a)f_y + \theta_y &= 0, & f_t + (f_x + 2\theta)_x + f_x^2 &= 0, \\ (a + f_x)(s_x + f_x + \theta)_y + [(a + f_x)(a + s_x) - (a + f_x)_x]s_y &= 0, \\ s_t + (s_x + 2\theta + 2f_x)_x + s_x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Два последних уравнения в системе (36) получаются из двух первых заменой $f \rightarrow s$, $\theta \rightarrow \theta_1$ и $a \rightarrow a_1$ (см. (34)). В LA -пару для уравнений КП фактически входили две зависимые переменные u и ψ (поскольку v выражается через u согласно (1) и (2)). Именно по этой причине с помощью лишь уравнения (3) можно получить следующее после КП уравнение в списке, а именно уравнение мКП. В отличие от этого случая, представление Лакса (33) для уравнения БЛП – это два уравнения на три функции ψ , a и b . Поэтому одних уравнений (33) недостаточно для построения нового нелинейного уравнения. С другой стороны, (36) можно рассматривать как систему из четырех уравнений для четырех неизвестных функций f , s , a и θ . Таким образом, вся система (36) должна рассматриваться как одно нелинейное уравнение, которое можно назвать модифицированным уравнением БЛП (мБЛП). Именно здесь проявляется отличие уравнений БЛП от уравнений КП. В последнем случае преобразования Дарбу необходимы для построения одевающих цепочек и, в частности, для нахождения LA -пары уравнения мКП, которое непосредственно получалось из LA -пары для уравнения КП. В случае же уравнений БЛП преобразование Дарбу необходимо использовать еще до построения цепочек, а именно для нахождения уравнений мБЛП. Сами же одевающие цепочки для уравнений БЛП строятся с помощью высших итераций преобразований Дарбу.

Как отмечалось во втором разделе, построенные по такой схеме уравнения легко редуцируются (вместе с LA -парами) в свои $(1 + 1)$ -аналоги. Например, условия $\partial_y = 0$ и $b = 0$ редуцируют уравнения (32) в уравнение Бюргерса (для поля a) с произвольной правой частью. Положив в (36) $\theta = 0$ и считая, что все поля не зависят от переменной y , получаем уравнение (которое можно назвать модифицированным уравнением Бюргерса) в виде системы

$$f_t + f_{xx} + f_x^2 = 0, \quad s_t + s_{xx} + s_x^2 + 2f_{xx} = 0. \quad (37)$$

Разумеется, эти же уравнения можно получить прямо из (33) и (34).

Точно так же находится вторая форма уравнений мБЛП, определяемая преобразованием (35). Соответствующая система состоит из четырех уравнений, первые два из которых совпадают с первыми двумя уравнениями системы (36), а два других получаются из них заменой

$$f \rightarrow s, \quad a \rightarrow -f_x - \frac{\theta_y}{f_y}, \quad \theta \rightarrow \theta - \frac{\theta_y}{f_y}. \quad (38)$$

В заключение применим формулы (34) для построения точных решений уравнений БЛП. Пусть $a = b = 0$. Из (33) и (34) следует, что нетривиальное решение b_1 уравнений (32) можно найти по формуле¹⁾

$$b_1 = -\frac{\phi_x \phi_y}{\phi^2}, \quad (39)$$

где $\phi = A(x, t) + B(y)$, причем функция $B(y)$ произвольна (при обычных предположениях о гладкости), а $A(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $A_t + A_{xx} = 0$ с “неправильным” знаком. Решение этого уравнения выберем в виде $A = \exp(-\mu^2 t) \operatorname{ch}(\mu x)$, где μ – произвольная вещественная постоянная. Можно показать, что если выбрать $B(y)$ растущей по показательному закону, то решение (39) будет иметь незамкнутые линии уровня. Поэтому надо считать $B(y)$ четной (для гарантии несингулярного поведения (39)) всюду растущей полиномиальной функцией. Например, при $B(y) = \nu^2 y^{2N} + \lambda^2$, где ν и λ – вещественные константы, получаем регулярное локализованное на плоскости решение

$$b_1 = -\frac{2\mu N \nu^2 y^{2N-1} \operatorname{sh}(\mu x) \exp(-\mu^2 t)}{(\lambda^2 + \nu^2 y^{2N} + \operatorname{ch}(\mu x) \exp(-\mu^2 t))^2}. \quad (40)$$

Несингулярное решение (40) затухает экспоненциально быстро при $x \rightarrow \pm\infty$ и по степенному закону $1/y^{2N+1}$ при $y \rightarrow \pm\infty$. С ростом t решение диссипирует, что неудивительно, поскольку, как показывает обсуждавшаяся выше одномерная редукция, уравнения БЛП могут рассматриваться как $(1 + 2)$ -мерное обобщение уравнения Бюргерса.

¹⁾После этого a_1 вычисляется простым интегрированием второго уравнения (32) или по формулам (34).

Тем самым решения типа (40) следует рассматривать как **диссипативные структуры**. Во избежание недоразумений следует отметить, что уравнения БЛП обладают гамильтоновой структурой, описанной в [7]. Это обстоятельство не противоречит сделанному выше утверждению о наличии диссипативных решений, поскольку существование выписанных в [7] интегралов движения, а также равенство нулю соответствующих скобок Пуассона возможны лишь при соответствующем асимптотическом поведении a и b . Так, в [7] предполагалось, что $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \text{const}$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Решение же a_1 , соответствующее (40), имеет линии уровня вдоль семейства прямых, параллельных оси y .

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 96-01-01789 и 96-01-01408.

Список литературы

- [1] *Б. А. Борисов, С. А. Зыков.* ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 199.
- [2] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилев.* УМН. 1987. Т. 42. Вып. 4. С. 3.
- [3] *B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky.* Stud. Appl. Math. 1992. V. 86. № 3. P. 219.
- [4] *V. B. Matveev, M. A. Salle.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
- [5] *А. В. Юров.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 3. С. 338.
- [6] *M. Boiti, J. J. -P. Leon, F. Pempinelli.* Inverse Prob. 1987. V. 3. P. 37.
- [7] *Т. И. Гарагаи.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 3. С. 367.
- [8] *А. Б. Шабат.* ТМФ. 1995. Т. 103. № 1. С. 170.
- [9] *А. И. Зенчук.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 2. С. 233.

Поступила в редакцию 21.X.1998 г.