Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Бугрий, О. О. Лисовой, Корреляционная функция двумерной модели Изинга на решетке конечных размеров. II, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 113–127

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:27:05

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА РЕШЕТКЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ. II

Вычислены парная корреляционная функция и магнитная восприимчивость в анизотропной модели Изинга на решетке с одним бесконечным и одним конечным размером, по которому наложены периодические граничные условия. На основе точных выражений для решеточных формфакторов предложены формулы для произвольных спиновых матричных элементов, которые дают возможность вычислить все многоточечные корреляционные функции в анизотропной модели Изинга на цилиндрической и тороидальной решетках. Проанализирован переход к скейлинговому пределу.

Ключевые слова: модель Изинга, корреляционная функция, восприимчивость, формфактор, решетка конечных размеров.

1. МОДЕЛЬ

В работах [1], [2] были вычислены парная корреляционная функция и магнитная восприимчивость изотропной двумерной модели Изинга на цилиндре. Аналогичные результаты можно получить и для анизотропного случая, так как усложнения, обусловленные наличием двух различных параметров связи, не являются принципиальными: матрица, через определитель которой выражается корреляционная функция и в данном случае остается трёхдиагональной. Идея вычисления изложена в работе [1], поэтому мы будем пользоваться результатами этой работы, опуская подробные выкладки.

Задачу вычисления многоточечных корреляционных функций можно свести к задаче нахождения спиновых матричных элементов в ортонормированном базисе собственных векторов трансфер-матрицы. Хотя ни первая, ни вторая задача на конечной решетке пока не решены, язык матричных элементов оказывается более удобным при попытках построить соответствующие выражения. Часть матричных элементов (так называемые решеточные формфакторы) можно найти из выражений для парной корреляционной функции. Поскольку структура этих выражений довольно проста, мы обобщили формулы на случай произвольных матричных элементов.

* Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина. E-mail: abugrij@clu.kiev.ua; lisovyy-o@yandex.ru

Гамильтониан анизотропной модели Изинга на прямоугольной решетке определяется как

$$H[\sigma] = - \sum_{\mathbf{r}} \sigma(\mathbf{r}) (J_x \nabla_x + J_y \nabla_y) \sigma(\mathbf{r}),$$

где двумерный вектор $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$ нумерует узлы решетки: $r_x = 1, 2, \dots, M$, $r_y = 1, 2, \dots, N$; спины $\sigma(\mathbf{r})$ могут принимать значения ± 1 . Параметры J_x и J_y определяют энергии связи соседних спинов в горизонтальном и вертикальном направлениях. Операторы сдвига на один шаг решетки ∇_x и ∇_y определены формулами

$$\nabla_x \sigma(r_x, r_y) = \sigma(r_x + 1, r_y), \quad \nabla_y \sigma(r_x, r_y) = \sigma(r_x, r_y + 1),$$

причем для периодических граничных условий

$$(\nabla_x^{(R)})^M = (\nabla_y^{(R)})^N = 1,$$

а для антипериодических –

$$(\nabla_x^{(NS)})^M = (\nabla_y^{(NS)})^N = -1.$$

В случае периодической по обоим направлениям решетки статистическая сумма Z модели при температуре β^{-1} ,

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]},$$

выражается через сумму четырех слагаемых

$$Z = \frac{1}{2} (Q^{(NS, NS)} + Q^{(NS, R)} + Q^{(R, NS)} - Q^{(R, R)}), \quad (1)$$

каждое из которых пропорционально пфаффиану оператора

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 + t_x \nabla_x & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 + t_y \nabla_y \\ -1 - t_x \nabla_{-x} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 - t_y \nabla_{-y} & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = (2 \operatorname{ch} K_x \operatorname{ch} K_y)^{MN} \operatorname{Pf} \hat{D}$$

с различными граничными условиями на ∇_x, ∇_y . Здесь мы ввели безразмерные параметры

$$K_x = \beta J_x, \quad K_y = \beta J_y, \quad t_x = \operatorname{th} K_x, \quad t_y = \operatorname{th} K_y.$$

Когда тор вырождается в цилиндр ($M \gg N$), можно убедиться, что статистическая сумма определяется антипериодическим членом $Z = Q^{(NS, NS)}$.

Рассмотрим корреляционную функцию модели Изинга на цилиндре

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle = Z^{-1} \sum_{[\sigma]} \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) e^{-\beta H[\sigma]} = i^P \frac{Z_{\text{def}}}{Z} = i^P \frac{Q_{\text{def}}^{(NS, NS)}}{Q^{(NS, NS)}}, \quad (2)$$

где через Z_{def} мы обозначили статистическую сумму для решетки Изинга с дефектом: вдоль пути, соединяющего коррелирующие спины, параметры связи K_x, K_y переходят в $K_x - i\pi/2, K_y - i\pi/2$ (см. рисунок, на котором приведена нумерация узлов решетки и расположение коррелирующих спинов. Жирной линией обозначен путь, вдоль которого параметры связи приобретают добавку $-i\pi/2$). Показатель степени P в формуле (2) равен числу шагов вдоль линии дефекта: в случае кратчайшего пути $P = r_x + r_y$. Когда коррелирующие спины расположены на линии, параллельной оси цилиндра (т.е. $r_y = 0$), отношение пфаффианов в правой части (2) выражается через определитель матрицы Тёплица. В этом случае

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, 0) \rangle = \det A, \quad (3)$$

$$A_{kk'} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp e^{ip(k'-k)}}{2\pi N} \times \\ \times \sum_q^{(\text{NS})} \frac{2t_x(1+t_y^2) + (t_y^2-1)(e^{-ip} + t_x^2 e^{ip})}{(1+t_x^2)(1+t_y^2) - 2t_x(1-t_y^2)\cos p - 2t_y(1-t_x^2)\cos q}. \quad (4)$$

Размерность $|r_x| \times |r_x|$ тёлпцевой матрицы определяется расстоянием между коррелирующими спинами. Здесь и далее индексы (NS) и (R) в суммах и произведениях означают, что соответствующие операции нужно проводить по квазиимпульсам Неве–Шварца

$$q = \frac{2\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right), \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

или Рамона

$$q = \frac{2\pi}{N} j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Наша задача состоит в том, чтобы преобразовать представление (3), (4) к такому, в котором зависимость от расстояния содержалась бы в явном виде.

2. ФЕРРОМАГНИТНАЯ ОБЛАСТЬ

В трансляционно-инвариантном случае пфаффианы $\text{Pf } \hat{D}$ легко вычисляются,

$$Q = \prod_{q,p} (\text{ch } 2K_x \text{ch } 2K_y - \text{sh } 2K_x \cos q - \text{sh } 2K_y \cos p)^{1/2}. \quad (5)$$

По любой из компонент квазиимпульса произведение (5) можно вычислить явно. Например, для слагаемого в (1) с периодическими граничными условиями по оси x и антипериодическими по y имеем

$$Q^{(\text{R,NS})} = (2 \text{sh } 2K_y)^{MN/2} \prod_q^{(\text{R})} e^{N\gamma(q)/2} (1 + e^{-N\gamma(q)}) = \\ = (2 \text{sh } 2K_x)^{MN/2} \prod_q^{(\text{NS})} e^{M\bar{\gamma}(p)/2} (1 - e^{-M\bar{\gamma}(p)}), \quad (6)$$

где функции $\gamma(q)$ и $\bar{\gamma}(p)$ определяются с помощью соотношений

$$\operatorname{ch} \gamma(q) = \frac{(1+t_x^2)(1+t_y^2)}{2t_x(1-t_y^2)} - \frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \cos q, \quad (7)$$

$$\operatorname{ch} \bar{\gamma}(p) = \frac{(1+t_x^2)(1+t_y^2)}{2t_y(1-t_x^2)} - \frac{t_x(1-t_y^2)}{t_y(1-t_x^2)} \cos p \quad (8)$$

и условий $\gamma(q), \bar{\gamma}(p) > 0$.

Ферромагнитной мы будем называть область значений параметров K_x, K_y , в которой

$$\operatorname{sh} 2K_x \operatorname{sh} 2K_y > 1,$$

при этом $\gamma(0) = \ln t_x + 2K_y$. Заметим, что в этом случае в терминах функции $\gamma(q)$ числитель подынтегрального выражения (4) можно переписать в следующем факторизованном виде:

$$2t_x(1+t_y^2) + (t_y^2-1)(e^{-ip} + t_x^2 e^{ip}) = (1-t_y^2)e^{\gamma(0)}(1-e^{-\gamma(\pi)}e^{ip})(1-e^{-\gamma(0)}e^{-ip}).$$

Далее, воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{N} \sum_q^{(\text{NS})} \frac{1}{\operatorname{ch} \theta - \cos q} = \frac{\operatorname{th}(N\theta/2)}{\operatorname{sh} \theta}, \quad (9)$$

выполним суммирование по дискретному спектру Неве–Шварца в (4). В результате после перехода к контурным интегралам для матричных элементов $A_{kk'}$ получим

$$A_{kk'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{k'-k} A(z), \quad (10)$$

$$A(z) = \left[\frac{(1-e^{-\gamma(\pi)}z)(1-e^{-\gamma(0)}z^{-1})}{(1-e^{-\gamma(0)}z)(1-e^{-\gamma(\pi)}z^{-1})} \right]^{1/2} T(z), \quad (11)$$

где

$$T(z) = \operatorname{th} \frac{N\bar{\gamma}(p)}{2}, \quad z = e^{ip}. \quad (12)$$

Напомним, что для вычисления детерминанта $|A|$ в методе интегральных уравнений Винера–Хопфа [3] ядро $A(z)$ необходимо представить в факторизованном виде

$$A(z) = P(z)Q(z^{-1}), \quad (13)$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны внутри единичного круга. Обозначив

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z^{-1})}, \quad (14)$$

определитель можно записать в виде

$$|A| = e^{h(r_x)} \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l}(r_x), \quad (15)$$

где

$$h(r_x) = r_x [\ln P(0) + \ln Q(0)] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} dz \ln Q(z^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} \ln P(z), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} g_{2l}(r_x) &= \frac{(-1)^l}{l! l! (2\pi i)^l} \times \\ &\times \oint_{|z_i| < 1} \frac{\prod_{i=1}^{2l} (dz_i z_i^{r_x}) \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(z_{2i-1} - z_{2j-1})^2 (z_{2i} - z_{2j})^2]}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^l (1 - z_{2i-1} z_{2j})^2} \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^l W(z_{2i-1})}{\prod_{i=1}^l W(z_{2i}^{-1})}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ниже будет показано, что сумма (15) содержит конечное число членов, т.е. начиная с некоторого l_0 функция $g_{2l} \equiv 0$ для всех $l > l_0$.

Вычислим интеграл (17). Для этого сначала запишем в факторизованной форме функцию $T(z)$, определенную формулой (12),

$$\begin{aligned} T(z) &= \text{th} \frac{N\bar{\gamma}(p)}{2} = \left[\frac{\prod_q^{(R)} (\text{ch } \bar{\gamma}(p) - \cos q)}{\prod_q^{(NS)} (\text{ch } \bar{\gamma}(p) - \cos q)} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{\prod_q^{(R)} e^{\gamma(q)} (1 - e^{-\gamma(q)} z) (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}{\prod_q^{(NS)} e^{\gamma(q)} (1 - e^{-\gamma(q)} z) (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})} \right]^{1/2} = \\ &= P_T(z) Q_T(z^{-1}) = e^{-\Lambda^{-1}} Q_T(z) Q_T(z^{-1}). \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} &= \frac{1}{2} \left[\sum_q^{(NS)} \gamma(q) - \sum_q^{(R)} \gamma(q) \right], \\ Q_T(z) &= \left[\frac{\prod_q^{(R)} (1 - e^{-\gamma(q)} z)}{\prod_q^{(NS)} (1 - e^{-\gamma(q)} z)} \right]^{1/2}, \quad P_T(z) = e^{-\Lambda^{-1}} Q_T(z). \end{aligned} \quad (18)$$

Дополнительно определив

$$P_0(z) = \left[\frac{1 - e^{-\gamma(\pi)} z}{1 - e^{-\gamma(0)} z} \right]^{1/2}, \quad Q_0(z) = \left[\frac{1 - e^{-\gamma(0)} z}{1 - e^{-\gamma(\pi)} z} \right]^{1/2},$$

запишем $W(z)$ в форме

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{P_0(z)}{Q_0(z^{-1})} \frac{P_T(z)}{Q_T(z^{-1})} = \frac{P_0(z)}{Q_0(z^{-1})} \frac{Q_T^2(z)}{T(z)} = \\ &= \frac{t_x(1 - t_y^2)}{t_y(1 - t_x^2)} (\text{ch } \gamma(\pi) - \cos p) Q_T^2(z) \frac{\text{cth}(N\bar{\gamma}(p)/2)}{\text{sh } \bar{\gamma}(p)} e^{\frac{\gamma(0) - \gamma(\pi)}{2} - 2\Lambda^{-1}}, \end{aligned}$$

где $z = e^{ip}$. Принимая во внимание, что

$$\frac{\operatorname{cth}(N\bar{\gamma}(p)/2)}{\operatorname{sh}\bar{\gamma}(p)} = \frac{1}{N} \frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \sum_q^{(R)} \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma(q) - \cos p}, \quad (19)$$

получим для $W(z)$ следующее выражение:

$$W(z) = (\operatorname{ch}\gamma(\pi) - \cos p) Q_T^2(z) e^{\frac{\gamma(0)-\gamma(\pi)}{2} - 2\Lambda^{-1}} \frac{1}{N} \sum_q^{(R)} \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma(q) - \cos p}.$$

Аналогичные выкладки для $W^{-1}(z^{-1})$ приводят к формуле

$$W^{-1}(z^{-1}) = (\operatorname{ch}\gamma(0) - \cos p) Q_T^2(z) e^{(\gamma(\pi)-\gamma(0))/2} \frac{1}{N} \sum_q^{(R)} \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma(q) - \cos p}.$$

Воспользовавшись последними двумя формулами, можно вычислить интеграл (17). Поменяем местами интегрирование и суммирование по дискретным квазиимпульсам. Тогда сингулярности внутри контуров интегрирования исчерпываются конечным числом полюсов в точках

$$z_{(k)} = e^{-\gamma(q_{(k)})}, \quad q_{(k)} = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

соответствующих рамоновским значениям квазиимпульса. Интеграл (17) берется по вычетам, и получается следующий результат:

$$g_{2l}(r_x) = \frac{e^{-2l/\Lambda}}{(2l)! N^{2l}} \sum_q^{(R)} \prod_{i=1}^{2l} \frac{e^{-r_x \gamma(q_i) - \eta(q_i)}}{\operatorname{sh}\gamma(q_i)} \mathcal{G}_{2l}[q],$$

где

$$e^{-\eta(q_i)} = \frac{\prod_q^{(R)} (1 - e^{-\gamma(q) - \gamma(q_i)})}{\prod_q^{(NS)} (1 - e^{-\gamma(q) - \gamma(q_i)})}. \quad (20)$$

Функция $\mathcal{G}_{2l}[q]$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2l}[q] &= C_l^{2l} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(e^{-\gamma(q_{2i-1})} - e^{-\gamma(q_{2j-1})})^2 (e^{-\gamma(q_{2i})} - e^{-\gamma(q_{2j})})^2] \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^l [(\operatorname{ch}\gamma(\pi) - \operatorname{ch}\gamma(q_{2i-1})) (\operatorname{ch}\gamma(q_{2i}) - \operatorname{ch}\gamma(0))] }{\prod_{i=1}^{2l} e^{\gamma(q_i)} \prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^l (1 - e^{-\gamma(q_{2i-1}) - \gamma(q_{2j})})^2} = \\ &= \frac{C_l^{2l}}{2^{2l^2}} \left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{2l^2} \frac{\prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(\cos q_{2i-1} - \cos q_{2j-1})^2 (\cos q_{2i} - \cos q_{2j})^2]}{\prod_{i < j}^{2l} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(q_i) + \gamma(q_j)}{2}} \times \\ &\times \prod_{i=1}^l [(1 + \cos q_{2i-1})(1 - \cos q_{2i})]. \end{aligned}$$

Эту функцию можно симметризовать относительно перестановок $q_{2i} \leftrightarrow q_{2j-1}$. Результатом такой симметризации является четная часть функции

$$\left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{2l^2} \prod_{i < j}^{2l} \frac{\sin^2 \frac{q_i - q_j}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\gamma(q_i) + \gamma(q_j)}{2}},$$

и мы приходим к следующему представлению для $g_{2l}(r_x)$:

$$g_{2l}(r_x) = \frac{e^{-2l/\Lambda}}{(2l)! N^{2l}} \left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{2l^2} \sum_q^{(R)} \frac{e^{-|r_x|\gamma(q_i) - \eta(q_i)}}{\text{sh} \gamma(q_i)} F_{2l}^2[q], \quad g_0 = 1, \quad (21)$$

$$F_n[q] = \prod_{i < j}^n \frac{\sin \frac{q_i - q_j}{2}}{\text{sh} \frac{\gamma(q_i) + \gamma(q_j)}{2}}. \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что $F_{2l}[q] \equiv 0$ при $2l > N$. Поэтому с учетом соотношения (15) для корреляционной функции в ферромагнитной области получаем

$$\langle \sigma(0,0) \sigma(r_x,0) \rangle^{(-)} = \xi \xi_T e^{-|r_x|/\Lambda} \sum_{n=0}^{[N/2]} g_{2n}(r_x), \quad (23)$$

где

$$\xi = |1 - (\text{sh} 2K_x \text{sh} 2K_y)^{-2}|^{1/4}, \quad (24)$$

$$\xi_T = \left[\frac{\prod_q^{(R)} \prod_p^{(NS)} \text{sh}^2 \frac{\gamma(q) + \gamma(p)}{2}}{\prod_q^{(R)} \prod_p^{(R)} \text{sh} \frac{\gamma(q) + \gamma(p)}{2} \prod_q^{(NS)} \prod_p^{(NS)} \text{sh} \frac{\gamma(q) + \gamma(p)}{2}} \right]^{1/4}. \quad (25)$$

3. ПАРАМАГНИТНАЯ ОБЛАСТЬ

В парамагнитной фазе, определяемой условием $\text{sh} 2K_x \text{sh} 2K_y < 1$, выполняется неравенство $\ln t_x + 2K_y < 0$, поэтому

$$\gamma(0) = -\ln t_x - 2K_y.$$

Вследствие этого ядро матрицы Тёплица, через определитель которой выражается корреляционная функция, перестраивается:

$$\langle \sigma(0,0) \sigma(r_x,0) \rangle^{(+)} = |A|, \quad A_{kk'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{k'-k-1} A(z), \quad (26)$$

$$A(z) = \left[\frac{(1 - e^{-\gamma(\pi)} z)(1 - e^{-\gamma(0)} z)}{(1 - e^{-\gamma(0)} z^{-1})(1 - e^{-\gamma(\pi)} z^{-1})} \right]^{1/2} T(z). \quad (27)$$

Для вычисления детерминанта такой матрицы метод, описанный в предыдущем разделе, должен быть модифицирован. Так, для факторизованного ядра

$$A(z) = P(z)Q(z^{-1}),$$

где $\ln P(z)$, $\ln Q(z)$ – аналитические функции в круге $|z| < 1$, в общем случае имеем [1]

$$|A| = \frac{(-1)^{r_x} e^{h(r_x+1)}}{Q^2(0)} \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l+1}(r_x), \quad (28)$$

$$f_{2l+1}(r_x) = \frac{(-1)^l}{l!(l+1)!(2\pi i)^{2l+1}} \oint_{|z_i|<1} \prod_{i=1}^{2l+1} (dz_i z_i^{r_x}) \frac{\prod_{i=1}^l (z_{2i} W(z_{2i}))}{\prod_{i=0}^l (z_{2i+1} W(z_{2i+1}^{-1}))} \times \\ \times \frac{\prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l (z_{2i} - z_{2j})^2 \prod_{i=1}^l \prod_{j=i+1}^{l+1} (z_{2i-1} - z_{2j-1})^2}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=0}^l (1 - z_{2i} z_{2j+1})^2}. \quad (29)$$

Здесь $W(z)$ и $h(r_x)$ определены формулами (14) и (16). С помощью преобразований, подобных описанным в предыдущем разделе, для матрицы (26), (27) можно получить следующие соотношения:

$$zW(z) = 2ze^{-\frac{\gamma(0)+\gamma(\pi)}{2}-2\Lambda^{-1}} Q_T^2(z) (\operatorname{ch} \gamma(0) - \cos p) (\operatorname{ch} \gamma(\pi) - \cos p) \times \\ \times \frac{1}{N} \sum_q^{(R)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma(q) - \cos p}, \\ z^{-1}W^{-1}(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{2} e^{\frac{\gamma(0)+\gamma(\pi)}{2}} Q_T^2(z) \frac{1}{N} \sum_q^{(R)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma(q) - \cos p}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, интеграл (29) можно взять по вычетам,

$$f_{2l+1} = \left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{2l^2+2l} \frac{e^{-2l\Lambda^{-1}+\frac{\gamma(0)+\gamma(\pi)}{2}}}{(2l+1)! N^{2l+1}} \times \\ \times \sum_q^{(R)} \prod_{i=1}^{2l+1} \frac{e^{-r_x \gamma(q_i) - \eta(q_i)}}{\operatorname{sh} \gamma(q_i)} \frac{\mathcal{F}[q]}{\prod_{i<j}^{2l+1} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(q_i) + \gamma(q_j)}{2}},$$

где

$$\mathcal{F}[q] = \frac{C_l^{2l+1}}{2^{2l(l+1)}} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l (\cos q_{2i} - \cos q_{2j})^2 \prod_{i=1}^l \prod_{j=i+1}^{l+1} (\cos q_{2i-1} - \cos q_{2j-1})^2 \prod_{i=1}^l \sin^2 q_{2i}.$$

Опять заметим, что функция $\mathcal{F}[q]$ после симметризации относительно перестановок $q_{2i} \leftrightarrow q_{2j+1}$ совпадает с четной частью функции

$$\prod_{i<j}^{2l+1} \sin^2 \frac{q_i - q_j}{2}.$$

В результате для корреляционной функции в парамагнитной области получим

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, 0) \rangle^{(+)} = \xi \xi_T e^{-|r_x|/\Lambda} \sum_{n=0}^{[(N-1)/2]} g_{2n+1}(r_x), \quad (30)$$

$$g_{2l+1}(r_x) = \frac{e^{-(2l+1)/\Lambda}}{(2l+1)! N^{2l+1}} \left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{(2l+1)^2/2} \sum_q^{(R)} \frac{e^{-|r_x|\gamma(q_i)-\eta(q_i)}}{\text{sh } \gamma(q_i)} F_{2l+1}^2[q], \quad (31)$$

$$F_n[q] = \prod_{i < j}^n \frac{\sin \frac{q_i - q_j}{2}}{\text{sh } \frac{\gamma(q_i) + \gamma(q_j)}{2}}, \quad F_1 = 1. \quad (32)$$

Сравнивая формулы для корреляционной функции (21)–(25) и (30)–(32) с соответствующими формулами для изотропного случая, можно увидеть, что отличие заключается в переопределении (7) функции $\gamma(q)$ и появлению в функции $g_n(r_x)$ множителей

$$\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)}$$

в соответствующих степенях. В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ эти выражения переходят в известные формулы [4].

4. МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Наличие двух независимых параметров связи в анизотропной модели Изинга на цилиндре позволяют рассмотреть два предельных случая:

$$K_x \rightarrow 0, \quad K_y \neq 0$$

и

$$K_x \neq 0, \quad K_y \rightarrow 0.$$

В первом из них двумерная изинговская решетка распадается на не взаимодействующие между собой замкнутые однорядные изинговские цепочки длины N , во втором — на N цепочек бесконечной длины. Такие пределы могут служить в качестве примитивных тестов для полученных формфакторных представлений. Для этого, однако, нужно знать выражение для коррелятора $\langle \sigma(0) \sigma(\mathbf{r}) \rangle$ между спинами с произвольным расположением на решетке, т.е. при $r_x \neq 0$ и $r_y \neq 0$. Такая же необходимость возникает и при выводе решеточного аналога представления Лемана для двухточечной функции Грина или при вычислении магнитной восприимчивости: и в том, и в другом случае требуется фурье-преобразование $\sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \langle \sigma(0) \sigma(\mathbf{r}) \rangle$. Между тем при $r_y \neq 0$ матрица, через детерминант которой выражается корреляционная функция, уже не является тёплицевой и метод, который мы использовали в предыдущих разделах для получения формфакторного разложения, теперь не применим. Тем не менее ответ можно получить и в этом случае, сформулировав задачу на языке спиновых матричных элементов.

Напомним, что 2^N -мерное пространство собственных векторов изинговской трансфер-матрицы $\mathcal{T}$ разбивается на два сектора – Неве–Шварца (NS) и Рамона (R). Соответствующие собственные значения имеют вид

$$\lambda^{(\text{NS})} = (2 \operatorname{sh} K_x)^{N/2} \exp \frac{1}{2} \left\{ \pm \gamma \left(\frac{\pi}{N} \right) \pm \gamma \left(\frac{3\pi}{N} \right) \pm \dots \pm \gamma \left(2\pi - \frac{\pi}{N} \right) \right\}, \quad (33)$$

$$\lambda^{(\text{R})} = (2 \operatorname{sh} K_x)^{N/2} \exp \frac{1}{2} \left\{ \pm \gamma(0) \pm \gamma \left(\frac{2\pi}{N} \right) \pm \dots \pm \gamma \left(2\pi - \frac{2\pi}{N} \right) \right\}, \quad (34)$$

причем в разных фазах действуют различные правила отбора: в NS-секторе (33) число минусов четно в обеих фазах, а в R-секторе (34) число минусов четно в ферромагнитной фазе и нечетно – в парамагнитной. Заметим, что выражения (33), (34) для собственных значений трансфер-матрицы можно получить из представления (1) для статистической суммы, раскрыв произведения (5),

$$\begin{aligned} Z &= Z^{(\text{NS})} + Z^{(\text{R})}, \\ Z^{(\text{NS})} &= \frac{1}{2} (Q^{(\text{NS}, \text{NS})} + Q^{(\text{R}, \text{NS})}) = \sum_i (\lambda_i^{\text{NS}})^M, \\ Z^{(\text{R})} &= \frac{1}{2} (Q^{(\text{NS}, \text{R})} - Q^{(\text{R}, \text{R})}) = \sum_i (\lambda_i^{\text{R}})^M. \end{aligned}$$

Благодаря трансляционной инвариантности всегда можно потребовать, чтобы собственные векторы трансфер-матрицы были собственными и для оператора трансляции. Такое условие определяет ортонормированный базис собственных векторов с точностью до перестановок. Элементы этого базиса удобно интерпретировать в терминах “NS- и R-частиц” с соответствующими значениями квазиимпульсов: они порождаются из вакуумных состояний $|\emptyset\rangle_{\text{NS}}$ и $|\emptyset\rangle_{\text{R}}$ действием фермионных операторов рождения.

Рассмотрим, для определенности, ферромагнитную фазу и покажем, как выражается парная корреляционная функция через матричные элементы изинговского спина ${}_{\text{NS}}\langle q_1, \dots, q_{2K} | \hat{\sigma}(0, 0) | p_1, \dots, p_{2L} \rangle_{\text{R}}$ (NS-NS и R-R элементы равны нулю вследствие $\mathbb{Z}_2$ -симметрии модели):

$$\begin{aligned} \langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle &= {}_{\text{NS}}\langle \emptyset | \hat{\sigma}(0, 0) \hat{\sigma}(r_x, r_y) | \emptyset \rangle_{\text{NS}} = \\ &= {}_{\text{NS}}\langle \emptyset | \hat{\sigma}(0, 0) \mathcal{T}^{r_x} \hat{\sigma}(0, r_y) \mathcal{T}^{-r_x} | \emptyset \rangle_{\text{NS}} = \\ &= \sum_{K=0}^{[N/2+1]} \frac{e^{-r_x/\Lambda}}{(2K)!} \sum_{p_1 \dots p_{2K}}^{(\text{R})} | {}_{\text{NS}}\langle \emptyset | \hat{\sigma}(0, 0) | p_1 \dots p_{2K} \rangle_{\text{R}} |^2 \times \\ &\quad \times \exp \left(-r_x \sum_{j=1}^{2K} \gamma(p_j) + i r_y \sum_{j=1}^{2K} p_j \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Сравнив это выражение с формулами (21)–(23), найдем квадрат решеточного формфактора

$$| {}_{\text{NS}}\langle \emptyset | \hat{\sigma}(0, 0) | p_1 \dots p_L \rangle_{\text{R}} |^2 = \xi \xi_T \left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{L^2/2} \prod_{j=1}^L \frac{e^{-\eta(p_j) - \Lambda^{-1}}}{N \operatorname{sh} \gamma(p_j)} \prod_{i < j}^L \frac{\sin^2 \frac{p_i - p_j}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(p_i) + \gamma(p_j)}{2}}. \quad (36)$$

Из формулы (35) следует, что формфакторное разложение коррелятора $\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle$ получается с помощью соотношений (21)–(23), в которых надо заменить

$$\frac{e^{-|r_x| \gamma(q_i) - \eta(q_i)}}{\text{sh } \gamma(q_i)} \rightarrow \frac{e^{-|r_x| \gamma(q_i) + i r_y q_i - \eta(q_i)}}{\text{sh } \gamma(q_i)}$$

в функции g_n . Аналогичный результат получается и в парамагнитном случае. Таким образом,

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle^{(-)} = \xi \xi_T e^{-|r_x|/\Lambda} \sum_{l=0}^{[N/2]} g_{2l}(r_x, r_y), \quad (37)$$

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle^{(+)} = \xi \xi_T e^{-|r_x|/\Lambda} \sum_{l=0}^{[(N-1)/2]} g_{2l+1}(r_x, r_y), \quad (38)$$

где

$$g_n(r_x, r_y) = \frac{e^{-n/\Lambda}}{n! N^n} \left[\frac{t_y(1 - t_x^2)}{t_x(1 - t_y^2)} \right]^{n^2/2} \sum_q^{(R)} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-|r_x| \gamma(q_j) + i r_y q_j - \eta(q_j)}}{\text{sh } \gamma(q_j)} F_n^2[q]. \quad (39)$$

Теперь рассмотрим “парамагнитное” разложение для случая $K_y = 0$. Заметим, что в данном пределе

$$\text{ch } \gamma(q) = \text{cth } 2K_x, \quad \gamma(q) = t_x = \text{const},$$

и поэтому

$$\xi = \xi_T = 1, \quad \Lambda^{-1} = \eta(q) = 0, \\ \langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle = \frac{1}{N} \sum_q^{(b)} (t_x)^{|r_x|} e^{i r_y q} = (t_x)^{|r_x|} \delta_{0 r_y}.$$

Как и следовало ожидать, спины из разных рядов решетки не коррелируют между собой.

Магнитная восприимчивость двумерной модели Изинга на конечной $M \times N$ решетке в нулевом магнитном поле выражается через сумму корреляционных функций

$$\beta^{-1} \chi = \sum_{r_x=0}^{M-1} \sum_{r_y=0}^{N-1} \langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle.$$

Для восприимчивости на цилиндре с некоторыми оговорками [2] можно пользоваться выражением

$$\beta^{-1} \chi = \sum_{r_x=-\infty}^{\infty} \sum_{r_y=0}^{N-1} \langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle.$$

Благодаря простой структуре формфакторных разложений (37)–(39) последняя сумма легко вычисляется, и для восприимчивости в ферромагнитной и парамагнитной областях имеем соответственно

$$\beta^{-1}\chi^{(-)} = \xi\xi_T \sum_{l=0}^{[N/2]} \chi_{2l}, \quad \beta^{-1}\chi^{(+)} = \xi\xi_T \sum_{l=0}^{[(N-1)/2]} \chi_{2l+1},$$

где

$$\begin{aligned} \chi_n = & \frac{e^{-n/\Lambda}}{n! N^{n-1}} \left[\frac{t_y(1-t_x^2)}{t_x(1-t_y^2)} \right]^{n^2/2} \times \\ & \times \sum_q^{(R)} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\eta(q_j)}}{\text{sh } \gamma(q_j)} F_n^2[q] \text{cth} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma(q_j) + \Lambda^{-1} \right) \delta \left(\sum_{j=1}^n q_j, 0 \pmod{2\pi} \right), \end{aligned}$$

δ – символ Кронекера.

5. СКЕЙЛИНГОВЫЙ ПРЕДЕЛ

Важным этапом в изучении двумерной модели Изинга является анализ скейлингового предела [5], [6]. Новым по сравнению с бесконечной плоскостью является то, что “цилиндрические параметры” ξ_T , Λ^{-1} , η , которые обращаются в нуль при фиксированном удалении от критической точки ($N \rightarrow \infty$, $\text{sh } 2K - 1 = \text{const} \neq 0$), в скейлинговом пределе на цилиндре не исчезают. Несмотря на очевидное усложнение корреляционных функций, оказалось возможным обобщить ряд результатов, полученных на бесконечной плоскости, и на случай изотропной модели Изинга на цилиндре [7]. Так, например, в работе [8] было показано, что корреляционные функции модели Изинга на цилиндре удовлетворяют некоторым интегрируемым уравнениям, обобщающим уравнения Пенлеве III и Пенлеве V, полученные для бесконечной плоскости. При рассмотрении скейлингового предела анизотропной модели Изинга на цилиндре тоже не встречается принципиальных трудностей, если принять во внимание некоторые тонкости в определении скейлинговых переменных, обусловленные анизотропией.

Дело в том, что в данном случае имеется два параметра K_x , K_y , и вместо критической точки возникает критическая линия $\text{sh } 2K_x \text{sh } 2K_y - 1 = 0$. Это дает соответствующий произвол в определении параметра удаления от критической линии, которым можно распорядиться так, чтобы в скейлинговом пределе результаты, полученные для анизотропного случая, совпали с результатами, полученными в изотропной ($K_x = K_y$) модели. Такому условию удовлетворяет следующий выбор скейлинговых переменных:

$$\begin{aligned} |r_x| \rightarrow \infty, \quad |r_y| \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad \gamma(0) \rightarrow 0, \\ \gamma(0)r_x = x = \text{const}, \quad \gamma(0)r_y \text{sh } 2K_x = y = \text{const}, \quad \gamma(0)N \text{sh } 2K_x = \beta = \text{const}. \end{aligned} \quad (40)$$

Из-за наличия экспоненциальных множителей в соответствующих суммах и интегралах $e^{-|r_x|\gamma(q)+ir_y q}$, $e^{-N\gamma(q)}$ можно считать, что $q \ll 1$, и, следовательно,

$$\gamma(q) = \gamma(0) \sqrt{1 + \left(\frac{q}{\gamma(0) \text{sh } 2K_x} \right)^2}, \quad \bar{\gamma}(q) = \gamma(0) \text{sh } 2K_x \sqrt{1 + \left(\frac{q}{\gamma(0)} \right)^2}.$$

Для перехода к скейлинговому пределу для цилиндрических параметров Λ , ξ_T , $\eta(q)$ удобно вместо формул (18), (20), (25) использовать эквивалентные им интегральные представления:

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dp \ln \operatorname{cth} \frac{N\bar{\gamma}(p)}{2}, \\ \eta(q) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dp \frac{\cos p - e^{-\gamma(q)}}{\operatorname{ch} \gamma(q) - \cos p} \ln \operatorname{cth} \frac{N\bar{\gamma}(p)}{2}, \\ \xi_T &= \frac{N^2}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{dp dq \bar{\gamma}'(p) \bar{\gamma}'(q)}{\operatorname{sh} N\bar{\gamma}(p) \operatorname{sh} N\bar{\gamma}(q)} \ln \left| \frac{\sin((p+q)/2)}{\sin((p-q)/2)} \right|.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\omega(q) = \sqrt{1 + q^2}.$$

С учетом вышесказанного для корреляционной функции анизотропной двумерной модели Изинга на цилиндре в скейлинговом пределе получаем

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle^{(-)} = \xi \tilde{\xi}_T(\beta) e^{-|x|/\tilde{\Lambda}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}_{2n}(x, y, \beta), \quad (41)$$

$$\langle \sigma(0, 0) \sigma(r_x, r_y) \rangle^{(+)} = \xi \tilde{\xi}_T(\beta) e^{-|x|/\tilde{\Lambda}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}_{2n+1}(x, y, \beta), \quad (42)$$

$$\tilde{g}_n(x, y, \beta) = \frac{1}{n! \beta^n} \sum_{[l]} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-|x|\omega(q_j) + i y q_j - \tilde{\eta}(q_j, \beta)}}{\omega(q_j)} \tilde{F}_n^2[l], \quad (43)$$

причем суммирование производится по целым l ,

$$\sum_{[l]} = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty},$$

квазиимпульсы принимают значения $q_j = 2\pi l_j / \beta$, а цилиндрические параметры и форм-фактор определены выражениями

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}^{-1}(\beta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp \ln \operatorname{cth} \frac{\beta\omega(p)}{2}, \\ \tilde{\eta}(q_j, \beta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp \frac{2\omega(q_j)}{\omega^2(q_j) + p^2} \ln \operatorname{cth} \frac{\beta\omega(p)}{2}, \\ \tilde{\xi}_T(\beta) &= \frac{\beta^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp dq \omega'(p) \omega'(q)}{\operatorname{sh} \beta\omega(p) \operatorname{sh} \beta\omega(q)} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|, \\ \tilde{F}_n[l] &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q_i - q_j}{\omega(q_i) + \omega(q_j)}.\end{aligned}$$

Как видим, спиновый коррелятор на цилиндре в скейлинговом режиме, определенном формулами (40), дается теми же функциями перенормированных координат, что и в изотропной модели. Поэтому все результаты работы [8] (детерминантные представления корреляционных функций, дифференциальные уравнения) применимы и к анизотропному случаю.

6. СПИНОВЫЙ МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Для вычисления многоточечных корреляционных функций на цилиндре и торе необходимо (и достаточно) иметь формулы не только для формфакторов, но и для остальных спиновых матричных элементов. Так, парный изинговский коррелятор на периодической решетке с размерами $M \times N$ в ферромагнитной области параметров можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \sigma(0,0) \sigma(r_x, r_y) \rangle &= \frac{\text{Tr} \{ \hat{\sigma}(0,0) \mathcal{T}^{r_x} \hat{\sigma}(0, r_y) \mathcal{T}^{M-r_x} \}}{\text{Tr} \mathcal{T}^M} = \\ &= \sum_{K=0}^{[N/2+1]} \sum_{L=0}^{[N/2+1]} \sum_{q_1, \dots, q_{2K}}^{(\text{NS})} \sum_{p_1, \dots, p_{2L}}^{(\text{R})} |_{\text{NS}} \langle q_1 \dots q_{2K} | \hat{\sigma}(0,0) | p_1 \dots p_{2L} \rangle_{\text{R}}|^2 \times \\ &\times \frac{1}{(2K)! (2L)!} \exp \left(i r_y \sum_{j=1}^{2K} q_j - i r_y \sum_{j=1}^{2L} p_j \right) \times \\ &\times \left\{ \exp \left[-(M - r_x) \sum_{j=1}^{2K} \gamma(q_j) - r_x (\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^{2L} \gamma(p_j)) \right] + \right. \\ &\left. + \exp \left[-r_x \sum_{j=1}^{2K} \gamma(q_j) - (M - r_x) (\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^{2L} \gamma(p_j)) \right] \right\} \left[\text{Tr} \left(\frac{\mathcal{T}}{\lambda_0} \right)^M \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где λ_0 – максимальное собственное значение трансфер-матрицы, соответствующее собственному вектору $|\emptyset\rangle_{\text{NS}}$.

В работе [9] мы предложили формулу для произвольных спиновых матричных элементов в изотропной модели Изинга на решетке конечных размеров. Обобщение этой формулы на анизотропный случай легко построить, исходя из двух допущений, вытекающих из результатов, полученных в предыдущих разделах.

1. Допустим, что все отличия, к которым приводит анизотропия модели, заключаются в переопределении функции $\gamma(q)$ в формуле для спинового матричного элемента и в появлении в ней множителя

$$\frac{t_y(1 - t_x^2)}{t_x(1 - t_y^2)}$$

в некоторой степени (см. например, формулу (36)).

2. Предположим также, что в скейлинговом пределе (40) *все* многоточечные корреляционные функции даются теми же формулами [7], [9], что и в изотропном случае.

Опуская выкладки, приведем лишь конечное выражение для спинового матричного элемента, которое следует из сделанных допущений:

$$\begin{aligned} |_{\text{NS}} \langle q_1 \dots q_K | \hat{\sigma}(0,0) | p_1 \dots p_L \rangle_{\text{R}}|^2 &= \xi \xi_T \prod_{j=1}^K \frac{e^{\eta(q_j) + \Lambda^{-1}}}{N \text{sh } \gamma(q_j)} \prod_{j=1}^L \frac{e^{-\eta(p_j) - \Lambda^{-1}}}{N \text{sh } \gamma(p_j)} \times \\ &\times \left[\frac{t_y(1 - t_x^2)}{t_x(1 - t_y^2)} \right]^{\frac{(K-L)^2}{2}} \prod_{i < j}^K \frac{\sin^2 \frac{q_i - q_j}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\gamma(q_i) + \gamma(q_j)}{2}} \prod_{i < j}^L \frac{\sin^2 \frac{p_i - p_j}{2}}{\text{sh}^2 \frac{\gamma(p_i) + \gamma(p_j)}{2}} \prod_{\substack{1 \leq i \leq K \\ 1 \leq j \leq L}} \frac{\text{sh} \frac{\gamma(q_i) + \gamma(p_j)}{2}}{\sin \frac{q_i - p_j}{2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Подобно изотропной модели, это представление было проверено на конечнорядных изинговских цепочках с $N = 1, 2, 3, 4$. Выражение (44), разумеется, совпадает в скейлинговом пределе с классическим результатом [10] на непрерывной бесконечной плоскости, а также с соответствующим результатом на непрерывном бесконечном цилиндре [11].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее время нанoeлектроника имеет дело с системами на решетках с цилиндрической геометрией. Там, однако, элементарной ячейкой является шестиугольник. Преобразованием звезда–треугольник модель Изинга на такой решетке можно свести к модели Изинга на треугольной решетке. Простой вид формул, полученных в данной работе, позволяет надеяться, что подобные результаты можно получить и в этом случае.

Точные выражения для корреляционных функций известны также для нескольких одномерных квантовых систем, в частности, XXZ -магнетика Гейзенберга [12]. В этих моделях с помощью анзаца Бете удалось вычислить матричные элементы локальных операторов на собственных состояниях гамильтониана. Можно попытаться использовать наши результаты при анализе таких интегрируемых одномерных моделей в конечном объеме и/или при ненулевой температуре.

Благодарности. Авторы благодарны С. З. Пакуляку, В. Н. Рубцову и В. Н. Шаду-ре за интерес к работе и полезные замечания. Один из авторов (О. Л.) хотел бы также выразить благодарность Ф. А. Смирнову за приглашение в LPTHE-Jussieu (Paris) и обсуждение публикуемых здесь результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке программы INTAS (грант № 03-51-3350) и ГФФИ Украины (грант № 2.7/00152).

Список литературы

- [1] *A. I. Bugrij.* ТМФ. 2001. Т. 127. № 1. С. 143.
- [2] *A. I. Bugrij, O. O. Lisovoy.* ЖЭТФ. 2002. Т. 121. № 6. С. 1328; hep-th/0106270.
- [3] *B. M. McCoy, T. T. Wu.* The Two-Dimensional Ising Model. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1973.
- [4] *K. Yamada.* Prog. Theor. Phys. 1984. V. 71. P. 1416.
- [5] *J. Palmer, C. A. Tracy.* Adv. Appl. Math. 1981. V. 2. P. 329.
- [6] *T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch.* Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 316.
- [7] *A. I. Bugrij.* Form factor representation of the correlation function of the two dimensional Ising model on a cylinder. In: Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory. NATO Sci. Ser. II. Eds. S. Pakuliak, G. von Gehlen. Dordrecht: Kluwer, 2001. P. 65; hep-th/0107117.
- [8] *O. Lisovyy.* Adv. Theor. Math. Phys. 2001. V. 5. № 5. P. 909; hep-th/0108015.
- [9] *A. I. Bugrij, O. Lisovyy.* Phys. Lett. A. 2003. V. 319. P. 390.
- [10] *B. Berg, M. Karowski, P. Weisz.* Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 2477.
- [11] *P. Fonseca, A. Zamolodchikov.* Ising field theory in a magnetic field: analytic properties of the free energy. hep-th/0112167.
- [12] *N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras.* Form factors of the XXZ Heisenberg spin-(1/2) finite chain. math-ph/9807020.

Поступила в редакцию 28.VII.2003 г.