Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гусейнов, А. Х. Ханмамедов, Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки, *ТМФ*, 1999, том 119, номер 3, 429–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:31:54

© 1999 г.

И. М. Гусейнов*, А. Х. Ханмамедов*

АСИМПТОТИКА ПРИ $t \rightarrow \infty$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ

Получены формулы, позволяющие находить решение цепочки Тоды с помощью метода обратной задачи рассеяния, и исследована асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепочка Тоды

$$\begin{aligned} D_t a_n &= \frac{1}{2} a_n (b_n - b_{n+1}), \quad a_n = a_n(t) > 0, \\ D_t b_n &= a_{n-1}^2 - a_n^2, \quad b_n = b_n(t), \quad n \in Z, \end{aligned} \quad (1.1)$$

является интересным примером интегрируемой дифференциально-разностной модели, обладающей разнообразными приложениями в физике твердых тел. Хорошо известно, что метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) позволяет детально исследовать задачу Коши для цепочки Тоды в случае быстроубывающих начальных условий [1–4] и в периодическом случае [4]. Интерес представляют также и задачи с более сложным поведением решения уравнения (1.1) при $n \rightarrow \pm\infty$, когда

$$\begin{aligned} a_n(0) &\rightarrow c_1, \quad b_n(0) \rightarrow m_1, \quad n \rightarrow \infty, \\ a_n(0) &\rightarrow c_2, \quad b_n(0) \rightarrow m_2, \quad n \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Цель настоящей работы – построение асимптотического разложения при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (1.1), (1.2). Подобные вопросы исследовались для уравнений Кортевега–де Фриза [5] и цепочки Вольтерра [6].

В разделе 2 изучается задача рассеяния для разностного уравнения второго порядка, коэффициенты которого стремятся к различным постоянным пределам на $\pm\infty$. Подобная задача для одномерного уравнения Шредингера рассматривалась в работе [7]. В быстроубывающем случае задачи рассеяния изучались в работах [1–4, 8]. В третьем

*Бакинский государственный университет им. М.Э. Расул-заде, Баку, Азербайджан

разделе с помощью МОЗР решается задача (1.1), (1.2). Последний раздел посвящен исследованию асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (1.1), (1.2).

В данной работе предполагается, что решение задачи (1.1), (1.2) обладает определенными свойствами гладкости, достаточно быстро стремится к своим пределам при $n \rightarrow \pm\infty$ и что дискретный спектр вспомогательной линейной задачи отсутствует.

2. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим разностное уравнение

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.1)$$

с коэффициентами a_n и b_n , удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} a_n > 0, \quad \operatorname{Im} b_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n - c_1| + |b_n - m_1|) + \sum_{n=-\infty}^{-1} |n|(|a_n - c_2| + |b_n - m_2|) < \infty, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Пусть Γ_j – комплексная плоскость с разрезом по отрезку $[m_j - 2c_j, m_j + 2c_j]$, а $\partial\Gamma_j$ – ее граница ($j = 1, 2$). Положим

$$z_j(\lambda) = \frac{\lambda - m_j}{2c_j} + \sqrt{\left(\frac{\lambda - m_j}{2c_j}\right)^2 - 1},$$

выбирая такую ветвь корня в плоскости Γ_j , что $|z_j(\lambda)| \leq 1$ при $\lambda \in \Gamma_j$ ($j = 1, 2$).

В дальнейшем мы часто будем опускать зависимость функции $z_j(\lambda)$ от λ . Таким образом, в формулах, где участвуют z_j и λ , всегда подразумевается, что z_j задана, как в приведенном выше равенстве.

Обозначим через $f_n(\lambda)$ и $g_n(\lambda)$ решения уравнения (2.1) с асимптотиками

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda) z_1^{-n} &= 1, \quad \lambda \in \bar{\Gamma}_1, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} g_n(\lambda) z_2^n &= 1, \quad \lambda \in \bar{\Gamma}_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При условии (2.2) такие решения существуют, определяются асимптотиками (2.3) однозначно и оказываются регулярными функциями λ при $\lambda \in \Gamma_1$ и $\lambda \in \Gamma_2$, соответственно.

Справедливы представления с помощью операторов преобразования

$$\begin{aligned} f_n(\lambda) &= \alpha_n z_1^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} z_1^m \right), \\ g_n(\lambda) &= \beta_n z_2^{-n} \left(1 + \sum_{m=-\infty}^{-1} B_{nm} z_2^{-m} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где величины α_n , A_{nm} , β_n , B_{nm} и коэффициенты a_n , b_n уравнения (1.1) связаны равенствами

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n}{c_1}\right)^2 &= 1 + A_{n2} - A_{n-1,2} - (A_{n1} - A_{n-1,1})A_{n1}, \\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{a_n}{c_1}, \quad b_n = m_1 + c_1(A_{n1} - A_{n-1,1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n}{c_2}\right)^2 &= 1 + B_{n+1,-2} - B_{n+2,-2} - (B_{n+1,-1} - B_{n+2,-1})B_{n+1,-1}, \\ \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} &= \frac{a_n}{c_2}, \quad b_n = m_2 + c_2(B_{n+1,-1} - B_{n+2,-1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Справедливы также разложения

$$g_n(\lambda) = a_1(\lambda)\overline{f_n(\lambda)} + b_1(\lambda)f_n(\lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma_1 \setminus \{m_1 \pm 2c_1\}, \quad (2.7)$$

$$f_n(\lambda) = a_2(\lambda)\overline{g_n(\lambda)} + b_2(\lambda)g_n(\lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \{m_2 \pm 2c_2\}. \quad (2.8)$$

Из этих равенств имеем

$$\begin{aligned} a_j(\lambda) &= -\frac{W[f_n(\lambda), g_n(\lambda)]}{c_j(z_j - z_j^{-1})}, \quad j = 1, 2, \\ b_1(\lambda) &= \frac{W[\overline{f_n(\lambda)}, g_n(\lambda)]}{c_1(z_1 - z_1^{-1})}, \\ b_2(\lambda) &= \frac{W[f_n(\lambda), \overline{g_n(\lambda)}]}{c_2(z_2 - z_2^{-1})}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$W[f_n, g_n] = a_n[f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n]$$

— вронскиан функций f_n и g_n . Согласно (2.9) функции $a_j(\lambda)$ ($j = 1, 2$) допускают регулярные продолжения в плоскости (обозначим ее через Γ) с разрезами по отрезкам $[m_1 - 2c_1, m_1 + 2c_1]$ и $[m_2 - 2c_2, m_2 + 2c_2]$. Как и в [8], можно показать, что функции $a_j(\lambda)$ имеют конечное число совпадающих простых вещественных нулей λ_k ($k = 1, \dots, N$), лежащих вне разрезов $[m_j - 2c_j, m_j + 2c_j]$.

Легко устанавливаются следующие свойства коэффициентов перехода:

$$\begin{aligned} a_j(\lambda - i0) &= \overline{a_j(\lambda + i0)}, \\ b_j(\lambda - i0) &= b_j(\lambda + i0), \quad m_j - 2c_j < \lambda < m_j + 2c_j, \\ c_1(z_1 - z_1^{-1})a_1(\lambda) &= c_2(z_2 - z_2^{-1})a_2(\lambda), \quad \lambda \in \overline{\Gamma}, \\ \overline{a_j(\lambda)} &= a_j(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \Gamma, \\ a_j(\lambda) &= \alpha_n \beta_n \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^n + O(|\lambda|^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Gamma, \\ b_j(\lambda) &= \overline{a_j(\bar{\lambda})}, \quad \lambda \in \partial\Gamma_j \setminus \partial\Gamma_{3-j}, \quad \lambda \neq m_j \pm 2c_j, \\ c_1(z_1 - z_1^{-1})b_1(\lambda) &= -c_2(z_2 - z_2^{-1})\overline{b_2(\bar{\lambda})}, \quad \lambda \in (\partial\Gamma_1 \cap \partial\Gamma_2) \setminus \{m_j \pm 2c_j\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{c_1(z_1 - z_1^{-1})}{c_2(z_2 - z_2^{-1})} |a_1(\lambda)|^2 &= 1 + \frac{c_1(z_1 - z_1^{-1})}{c_2(z_2 - z_2^{-1})} |b_1(\lambda)|^2 = \\ &= \frac{c_2(z_2 - z_2^{-1})}{c_1(z_1 - z_1^{-1})} |a_2(\lambda)|^2 = 1 + \frac{c_2(z_2 - z_2^{-1})}{c_1(z_1 - z_1^{-1})} |b_2(\lambda)|^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\lambda \in (\partial\Gamma_1 \cap \partial\Gamma_2) \setminus \{m_j \pm 2c_j\}$.

Введем коэффициенты отражения, полагая

$$r_j(\lambda) = \frac{b_j(\lambda)}{a_j(\lambda)}, \quad \lambda \in \partial\Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.12)$$

Воспользовавшись методикой, развитой в работе [9], можно доказать, что функции $1/a_j(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in \partial\Gamma_j$, а также что $1/a_j(m_j \pm 2c_j) = 0$ в ситуации общего положения и $1/a_j(m_j \pm 2c_j) \neq 0$ в виртуальном случае.

Легко убедиться, что функции $r_j(\lambda)$ также непрерывны при $\lambda \in \partial\Gamma_j$ и что

$$\begin{aligned} r_j^2(m_j \pm 2c_j) &= 1, \quad m_j \pm 2c_j \notin [m_{3-j} - 2c_{3-j}, m_{3-j} + 2c_{3-j}], \\ -1 &\leq r_j(m_j \pm 2c_j) < 1, \quad m_j \pm 2c_j = m_{3-j} \pm 2c_{3-j}, \\ r_j(m_j \pm 2c_j) &= -1, \quad m_j \pm 2c_j \in (m_{3-j} - 2c_{3-j}, m_{3-j} + 2c_{3-j}), \\ |r_j(m_j \pm 2c_j)| &= 1, \quad r_j(m_j \pm 2c_j) \neq 1, \quad m_j \pm 2c_j = m_{3-j} \mp 2c_{3-j}. \end{aligned}$$

Как и в [5], можно показать, что коэффициенты перехода можно восстановить по коэффициентам $r_j(\lambda)$ и полюсам $1/a_j(\lambda)$.

Пусть

$$\begin{aligned} m_k^{(1)} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^2(\lambda_k) \right)^{-1}, \quad m_k^{(2)} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^2(\lambda_k) \right)^{-1}, \quad k = 1, \dots, N, \\ k_j(\lambda) &= z_j(\lambda) - z_j^{-1}(\lambda), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$m_k^{(1)} m_k^{(2)} = (a'_j(\lambda_k) k_j(\lambda_k))^{-2}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2.$$

Через $\partial\Gamma_j^\pm$ обозначим множества, состоящие из точек верхних разрезов λ -плоскости по отрезкам $[m_j - 2c_j, m_j + 2c_j]$ ($j = 1, 2$).

По коэффициентам перехода можно восстановить коэффициенты a_n , b_n из уравнения (2.1). В самом деле, пусть $\partial\Gamma^+ = \partial\Gamma_1^+ \cup \partial\Gamma_2^+$ и

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{j=1}^N m_j^{(1)} z_1^n(\lambda_j) + \frac{1}{2\pi c_1 i} \oint_{\partial\Gamma_1} \frac{r_1(\lambda)}{k_1(\lambda)} z_1^n(\lambda) d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c_2 i} \int_{\partial\Gamma^+ \setminus \partial\Gamma_1^+} \frac{z_1^n(\lambda) d\lambda}{|a_2(\lambda)|^2 k_2(\lambda)}, \\ \Phi_n &= \sum_{j=1}^N m_j^{(2)} z_2^{-n}(\lambda_j) + \frac{1}{2\pi c_2 i} \oint_{\partial\Gamma_2} \frac{r_2(\lambda)}{k_2(\lambda)} z_2^{-n}(\lambda) d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi c_1 i} \int_{\partial\Gamma^+ \setminus \partial\Gamma_2^+} \frac{z_2^{-n}(\lambda) d\lambda}{|a_1(\lambda)|^2 k_1(\lambda)}. \end{aligned}$$

Сначала A_{nm} и B_{nm} находятся из уравнений

$$F_{2n+m} + A_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{2n+m+k} = 0, \quad m \geq 1, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.13)$$

$$\Phi_{2n+m} + B_{nm} + \sum_{k=-\infty}^{-1} B_{nk} \Phi_{2n+m+k} = 0, \quad m \leq -1, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.14)$$

которые имеют единственные решения при любом n . Тогда

$$\alpha_n^{-2} = 1 + F_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{2n+k}, \quad (2.15)$$

$$\beta_n^{-2} = 1 + \Phi_{2n} + \sum_{k=-\infty}^{-1} B_{nk} \Phi_{2n+k}. \quad (2.16)$$

После этого коэффициенты a_n и b_n определяются по любой из формул (2.5) или (2.6).

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ И ОЦЕНКИ ЯДРА F_{2n+m}

Предположим теперь, что коэффициенты a_n и b_n в уравнении (2.1) зависят от времени t и удовлетворяют уравнению (1.1). Установим, каким образом меняются данные рассеяния (коэффициенты перехода и нормировки $m_k^{(1)}$, $m_k^{(2)}$) во времени.

Пусть $f_n(\lambda, t)$ и $g_n(\lambda, t)$ — определяемые асимптотиками (2.3) решения уравнения (2.1) при $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$. Они связаны друг с другом соотношениями (2.7) и (2.8), где коэффициенты $a_j(\lambda)$ и $b_j(\lambda)$ теперь зависят от t .

Легко устанавливается закон изменения во времени данных рассеяния:

$$\begin{aligned} a_j(\lambda, t) &= a_j(\lambda, 0) \exp \left\{ \left(c_1 \frac{z_1 - z_1^{-1}}{2} - c_2 \frac{z_2 - z_2^{-1}}{2} \right) t \right\}, \\ b_j(\lambda, t) &= b_j(\lambda, 0) \exp \left\{ (-1)^j \left(c_1 \frac{z_1 - z_1^{-1}}{2} - c_2 \frac{z_2 - z_2^{-1}}{2} \right) t \right\}, \\ r_j(\lambda, t) &= r_j(\lambda, 0) \exp \{ (-1)^j c_j (z_j - z_j^{-1}) t \}, \\ m_k^{(j)}(t) &= m_k^{(j)}(0) \exp \{ (-1)^j c_j (z_j(\lambda_k) - z_j^{-1}(\lambda_k)) t \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Формулы (3.1), (2.13), (2.14), (2.5), (2.6) позволяют найти решение задачи Коши для цепочки Тоды при любом t с начальными данными $a_n(0)$ и $b_n(0)$, имеющими асимптотику (1.2).

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи (1.1), (1.2) при $t \rightarrow \infty$ и при больших положительных n . Для этих целей более удобным оказывается уравнение (2.13).

Будем предполагать, что начальные данные $a_n(0)$, $b_n(0)$ достаточно быстро стремятся к своим пределам на $\pm\infty$, так что коэффициенты $r_j(\lambda, 0)$, $1/a_j(\lambda, 0)$ обладают определенными свойствами гладкости. Предположим также, что функция $a_j(\lambda, 0)$ не имеет нулей в плоскости Γ . Тогда ядро $F_{2n+m}(t)$ состоит из двух слагаемых:

$$F_{2n+m}^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi c_1 i} \oint_{\partial\Gamma_1} \frac{r_1(\lambda, 0)}{k_1(\lambda)} z_1^{2n+m} \exp \{ c_1 (z_1 - z_1^{-1}) t \} d\lambda, \quad (3.2)$$

$$F_{2n+m}^{(2)}(t) = \frac{1}{2\pi c_2 i} \int_{\partial\Gamma^+ \setminus \partial\Gamma_1^+} \frac{z_1^{2n+m} \exp \{ c_1 (z_1^{-1} - z_1) t \}}{|a_2(\lambda, 0)|^2 k_2(\lambda)} d\lambda. \quad (3.3)$$

С помощью этих формул можно доказать, что при $m_1 + 2c_1 \geq m_2 + 2c_2$ главный вклад в асимптотику $F_{2n+m}(t)$ для больших t дает $F_{2n+m}^{(1)}(t)$. Поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что $m_1 + 2c_1 < m_2 + 2c_2$.

Пусть

$$\begin{aligned} d &= \ln \left(\frac{m_2 + 2c_2 - m_1}{2c_1} + \sqrt{\left(\frac{m_2 + 2c_2 - m_1}{2c_1} \right)^2 - 1} \right), \\ m_3 &= \max \{ m_1 + 2c_1, m_2 - 2c_2 \}, \\ d_0 &= \ln \left(\frac{m_3 - m_1}{2c_1} + \sqrt{\left(\frac{m_3 - m_1}{2c_1} \right)^2 - 1} \right), \\ F_{2n+m}^{(3)}(t) &= \frac{1}{2\pi c_2 i} \int_{m_1+2c_1}^{m_2+2c_2} \frac{z_1^{2n+m} \exp \{ c_1 (z_1^{-1} - z_1) t \}}{|a_2(\lambda, 0)|^2 k_2(\lambda + i0)} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} |F_{2n+m}^{(2)}(t) - F_{2n+m}^{(3)}(t)| &< \frac{A}{(2n+m)^2}, \\ |F_{2n+m}^{(1)}(t)| &< \frac{A}{(2n+m)^2}, \quad 2n+m > 2c_1 \frac{\operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} t, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где через A обозначаются, вообще говоря, различные постоянные.

Введем обозначения

$$S(\lambda) = (a_1(\lambda + i0, 0) \overline{a_2(\lambda + i0, 0)})^{-1}, \quad m_3 < \lambda < m_2 + 2c_2, \\ a(u) = iS(m_1 + 2c_1 \cos(iu)).$$

Нетрудно показать, что $a(u) > 0$ при $d_0 < u < d$ и

$$F_{2n+m}^{(3)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{d_0}^d a(u) \exp \{-u(2n+m) + 2c_1 t \operatorname{sh} u\} du. \quad (3.6)$$

Представим $F_{2n+m}^{(3)}(t)$ в виде

$$F_{2n+m}^{(3)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta}^d a(u) \exp \left\{ -u \left(2n+m - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -2c_1 t u \left(\frac{\operatorname{sh} d}{d} - \frac{\operatorname{sh} u}{u} \right) \right\} du + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{d_0}^{\Delta} a(u) \exp \{-u(2n+m) + 2c_1 t \operatorname{sh} u\} du = I_1 + I_2,$$

где Δ выбирается так, чтобы уравнение

$$2c_1 u \left(\frac{\operatorname{sh} d}{d} - \frac{\operatorname{sh} u}{u} \right) = r^2$$

было однозначно разрешимо относительно u при $\Delta \leq u \leq d$. В этом случае функция $u = u(r)$ бесконечно дифференцируема в точке $r = 0$ и

$$u'(r) = \frac{d}{c_1} \frac{r}{\operatorname{sh} d - d \operatorname{ch} u(r)}.$$

В первом интеграле перейдем к новой переменной интегрирования:

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} a(u(r)) u'(r) \exp \left\{ - \left(2n+m - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t \right) u(r) \right\} \exp(-tr^2) dr,$$

где

$$\delta = \left(2c_1 \Delta \left(\frac{\operatorname{sh} d}{d} - \frac{\operatorname{sh} \Delta}{\Delta} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Будем говорить, что реализуется ситуация общего положения, если решения $f_n(\lambda, 0)$ и $g_n(\lambda, 0)$ линейно независимы при $\lambda = m_2 + 2c_2$. В противном случае будем говорить, что реализуется виртуальный случай.

Разлагая подынтегральное выражение по степеням r , как это сделано в [5], находим, что справедливы следующие соотношения:

а) в ситуации общего положения и при

$$n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{N+1}$$

(N – любое натуральное число) имеем

$$I_1 = \frac{1}{\pi} da_+ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \exp \{ -d(2n + m - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t) \}}{(2c_1)^{k+1} (d \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} d)^{k+1} k!} \times \\ \times \frac{(2n + m - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t)^k}{t^{k+\frac{3}{2}}} (1 + \delta_k(t)) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где

$$a_+ = (a(u(r)))'|_{r=0} > 0, \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \\ \delta_k(t) = O(t^{-\frac{1}{2}}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2};$$

б) в виртуальном случае и при

$$n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^N$$

имеем

$$I_1 = \frac{1}{\pi} da_- \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \exp \{ -d(2n + m - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t) \}}{(2c_1)^{k+1} (d \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} d)^{k+1} k!} \times \\ \times \frac{(2n + m - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t)^k}{t^{k+\frac{1}{2}}} (1 + \delta_k(t)) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где

$$a_- = \lim_{r \rightarrow 0} ra(u(r)) > 0, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Далее, из выражения для I_2 видно, что

$$I_2 = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{при} \quad n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{N+1}.$$

Таким образом, предполагая, что $t \rightarrow \infty$, получаем следующие окончательные формулы:

а) в ситуации общего положения и при

$$n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{N+1}$$

имеем

$$F_{2n+m}(t) = \frac{1}{\pi} da_+ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \exp \{-d(2n+m-2c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t)\}}{(2c_1)^{k+1} (d \text{ch } d - \text{sh } d)^{k+1} k!} \times \\ \times \frac{(2n+m-2c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t)^k}{t^{k+\frac{3}{2}}} (1 + \delta_k(t)) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}); \quad (3.7)$$

б) в виртуальном случае и при

$$n > c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^N$$

имеем

$$F_{2n+m}(t) = \frac{1}{\pi} da_- \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \exp \{-d(2n+m-2c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t)\}}{(2c_1)^{k+1} (d \text{ch } d - \text{sh } d)^{k+1} k!} \times \\ \times \frac{(2n+m-2c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t)^k}{t^{k+\frac{1}{2}}} (1 + \delta_k(t)) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad (3.8)$$

где

$$\delta_k(t) = O(t^{-\frac{1}{2}}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

4. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПРИ $t \rightarrow \infty$

Для простоты все дальнейшие рассуждения будут проведены в ситуации общего положения.

Рассмотрим пространство последовательности $\varphi = \{\varphi_m\}_1^\infty \in l^2(1, \infty)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

и введем в нем операторы

$$(\mathbb{F}\varphi)_m = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2n+m+k}^{(N)}(t) \varphi_k, \quad (4.1)$$

$$(G\varphi)_m = \sum_{k=1}^{\infty} G_{2n+m+k}^{(N)}(t) \varphi_k, \quad (4.2)$$

где

$$F_{2n+m}^{(N)}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{da_+ \Gamma(k + \frac{3}{2}) \exp \{-d(2n+m-2c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t)\}}{(2c_1)^{k+1} (d \text{ch } d - \text{sh } d)^{k+1} k!} \times \\ \times \frac{(2n+m-2c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t)^k}{t^{k+\frac{3}{2}}} (1 + \delta_k(t)), \quad (4.3)$$

$$G_{2n+m}^{(N)}(t) = F_{2n+m}(t) - F_{2n+m}^{(N)}(t). \quad (4.4)$$

Легко проверить, что

$$\|G\| + \|G_{2n+m}^{(N)}\| \leq At^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \right). \quad (4.5)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Оператор $E + \mathbb{F}$ в пространстве $l^2(1, \infty)$ имеет ограниченный обратный, причем норма оператора $R = (E + \mathbb{F})^{-1}$ ограничена равномерно по t и

$$n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{N+1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Пусть

$$w = -F_{2n+m}^{(N)}(t), \quad g = -G_{2n+m}^{(N)}(t), \quad \varphi = A_{nm}(t).$$

Тогда уравнение (2.13) можно записать в операторном виде

$$\varphi + \mathbb{F}\varphi + G\varphi = w + g.$$

В силу леммы имеем

$$\varphi + RG\varphi = Rw + Rg.$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, находим, что

$$\varphi = Rw + Rg - \sum_{k=1}^{\infty} (RG)^k [Rw + Rg].$$

Учитывая (4.5) и лемму, получаем

$$\varphi = Rw + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Итак, главный вклад в асимптотику решения задачи (1.1), (1.2) в области

$$n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{N+1}$$

дает решение Rw уравнения (2.13) с вырожденным ядром $F_{2n+m}^{(N)}(t)$.

Заменяем в уравнении (2.13) ядро F_{2n+m} вырожденным $F_{2n+m}^{(N)}$:

$$F_{2n+m}^{(N)}(t) + A_{nm}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(t) F_{2n+m+k}^{(N)}(t) = 0, \quad m \geq 1. \quad (4.7)$$

Пусть

$$\xi = 2n - 2c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t.$$

Поскольку

$$(\xi + m)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j m^j \xi^{k-j} \quad \left(C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!} \right),$$

то, полагая

$$w_{ij} = \frac{1}{\pi} \frac{da_+ \Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right) C_i^j (1 + \delta_i(t))}{(2c_1)^{i+1} (d \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} d)^{i+1} i!},$$

получим

$$\begin{aligned} F_{2n+m}^{(N)}(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{t^{i+\frac{3}{2}}} \sum_{j=0}^i w_{ij} m^j \xi^{i-j} e^{-d(\xi+m)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} m^j \sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} \xi^{i-j} e^{-d(\xi+m)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ищем решение уравнения (4.7) в виде

$$A_{nm}(t) = \sum_{d=0}^{N-1} a_{\alpha}(n, t) m^{\alpha} e^{-dm}. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в (4.7) и учитывая (4.8), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{N-1} a_{\alpha}(n, t) m^{\alpha} e^{-dm} + \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} \xi^{i-j} e^{-d\xi} \right) m^j e^{-dm} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} a_{\alpha}(n, t) k^{\alpha} e^{-dk} \right) \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} (\xi+k)^{i-j} e^{-d(\xi+k)} m^j \right) e^{-dm} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{N-1} a_{\alpha}(n, t) m^{\alpha} e^{-dm} + \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} \xi^{i-j} e^{-d\xi} \right) m^j e^{-dm} + \\ + \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{\alpha=0}^{N-1} a_{\alpha}(n, t) \sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} (\xi+k)^{i-j} e^{-d\xi} e^{-2dk} \right) m^j e^{-dm} = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $m^j e^{-dm}$, получим

$$\begin{aligned} a_j(n, t) + \sum_{\alpha=0}^{N-1} a_{\alpha}(n, t) \left(\sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} e^{-d\xi} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} (\xi+k)^{i-j} e^{-2dk} \right) = \\ = - \sum_{i=j}^{N-1} \frac{w_{ij}}{t^{i+\frac{3}{2}}} e^{-d\xi} \xi^{i-j}, \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из системы (4.10) находятся коэффициенты $a_j(n, t)$, $j = 0, \dots, N-1$. Используя (4.9), мы восстанавливаем $A_{nm}(1)$. При этом согласно (2.6) и (4.6) при

$$n > c_1 \frac{\text{sh } d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{N+1}$$

имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{n+1}(t)}{c_1} \right)^2 &= 1 + A_{n+1,2}(t) - A_{n,2}(t) - (A_{n+1,1}(t) - A_{n,1}(t)) A_{n+1,1}(t) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \\ b_{n+1}(t) &= m_1 + c_1 (A_{n+1,1}(t) - A_{n,1}(t)) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В частности, полагая $N = 1$, после несложных преобразований доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. При отсутствии дискретного спектра решение задачи Коши для цепочки Тоды при $t \rightarrow \infty$ и

$$n > c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t - \frac{1}{2d} \ln t^{\frac{3+1}{2}}$$

представляется в виде

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2(t) &= c_1^2 + 4c_1^2(e^{-d} - e^{-3d})^2 \varphi_{\pm}(n+1, t) \times \\ &\quad \times \varphi_{\pm}^{-2}(n, t) \varphi_{\pm}^{-1}(n-1, t) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \\ b_{n+1}(t) &= m_1 + 4c_1(1 - e^{-2d})^{-2} \varphi_{\pm}^{-1}(n, t) \varphi_{\pm}^{-1}(n-1, t) + O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm}(n, t) &= \operatorname{ch} \left[d \left(n - c_1 \frac{\operatorname{sh} d}{d} t \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{w_{\pm}(t)}{e^{2d} - 1} \right], \\ w_{\pm}(t) &= \frac{1}{2\pi c_1} \frac{da_{\pm} \Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{d \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} d} t^{-\frac{2+1}{2}}, \end{aligned}$$

знак плюс соответствует случаю ситуации общего положения, а минус – виртуальному случаю.

Список литературы

- [1] *H. Flashka.* Phys. Rev. 1974. V. 139. № 6. P. 1924–1925.
- [2] *H. Flashka.* Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. № 3. P. 703–716.
- [3] *С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 2. С. 543–555.
- [4] *М. Тода.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [5] *Е. Я. Хруслов.* Мат. сб. 1976. Т. 99. № 2. С. 261–281.
- [6] *В. Л. Верещагин.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 335–344.
- [7] *И. А. Андерс, В. П. Котляров.* ТМФ. 1991. Т. 88. № 1. С. 72–84.
- [8] *Г. Ш. Гусейнов.* ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 5. С. 1045–1048.
- [9] *И. М. Гусейнов.* Дифф. уравнения. 1985. Т. 21. № 11. С. 1993–1995.

Поступила в редакцию 30.XII.1997 г.,
после доработки 17.VI.1998 г.