Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, С. Сайто, Конечномерные аналоги струнной $s \leftrightarrow t$ дуальности
и уравнение пентагона, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 1, 54–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:19:50

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ СТРУННОЙ $s \leftrightarrow t$ ДУАЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЕ ПЕНТАГОНА

Одна из форм функционального уравнения пентагона (ФУП), встречающегося в теории интегрируемых моделей, предложена для алгебраического описания явления, известного в физике как $s \leftrightarrow t$ дуальность. Приведены два простых геометрических примера решений ФУП, причем один из них в частном случае дает известное выражение Венециано для четырехчастичной амплитуды. Полученные решения ФУП интерпретируются в терминах соотношений в группах Ли.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее характерных свойств рассеяния в теории струн, а также в некоторых процессах сильного взаимодействия является так называемая $s \leftrightarrow t$ дуальность. Она может быть изображена диаграммой, приведенной на рис. 1.

Рис. 1. Уравнение $s \leftrightarrow t$ дуальности.

Мы принимаем здесь точку зрения, что четырехточечные амплитуды $A(k, l, m, n)$, где k, l, m, n — некоторые “квантовые числа”, получаются в обеих частях рис. 1 из трехточечных амплитуд $A(k, l, m)$ интегрированием по квантовому числу, отвечающему внут-

* Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия.
E-mail: igor@prima.tu-chel.ac.ru

† Токийский городской университет, Токио, Япония. E-mail: saito@phys.metro-u.ac.jp

 Рис. 2. Диаграмма, “топологически” объясняющая $s \leftrightarrow t$ дуальность.

ренной линии, так что аналитически дуальность выглядит так:

$$\int A(k, l, s) A(s, m, n) d\mu(s) = \int A(k, m, t) A(t, l, n) d\mu(t), \quad (1)$$

где μ – некоторая мера. В формуле (1) трехточечная амплитуда считается симметричной по всем своим аргументам. Если это не так, то формулу (1) следует уточнить, как мы увидим ниже в разделе 4.

Как известно, вследствие $s \leftrightarrow t$ дуальности резко уменьшается количество фейнмановских диаграмм: любые две диаграммы с одинаковым количеством внешних линий и циклов эквивалентны.

Какие математические структуры составляют основу такой дуальности? Конечно, в рамках обычной теории струн ее можно объяснить “геометрически”, сказав, что обеим частям диаграммы на рис. 1 соответствует на самом деле одна и та же “струнная диаграмма”, или мировой лист струны (рис. 2).

Предположим, однако, что мы хотим найти общий алгебраический механизм $s \leftrightarrow t$ дуальности, не зависящий от таких диаграмм и дающий надежду на новые возможности построения теорий, похожих на теорию струн.

Теория струн тесно связана со многими областями математики. Нас больше всего интересуют ее связи с интегрируемыми моделями. Поэтому мы отметим здесь соответствие между струнами и солитонами [1–3] и то, что струнные амплитуды удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера [4].

Существуют, однако, разные виды фундаментальных уравнений, ответственных за интегрируемость. Наиболее важным считается уравнение тетраэдров (УТ), связанное с $(2+1)$ -мерной интегрируемостью: квантовое УТ [5] для квантовых моделей и функциональное УТ [6, 7] как для классических, так и для квантовых моделей. В то же время различные уравнения неразрывно связаны друг с другом. В частности, УТ связано с уравнением пентагона [8].

Рис. 3. Схема, поясняющая два способа преобразования квантовых чисел.

В этой статье мы приводим аргументы в пользу того, что математической структурой, ответственной за $s \leftrightarrow t$ дуальность, является функциональное уравнение пентагона (ФУП). Мы объясняем это на простых примерах. Как известно, теория струн тесно связана с бесконечномерными группами. Тем не менее мы считаем естественным начать с решений ФУП, связанных с конечномерными группами Ли. Таким образом, наша статья имеет своей скромной целью показать, что может существовать алгебраический механизм $s \leftrightarrow t$ дуальности, опирающийся на решения ФУП; и если мы сможем перейти от конечномерных к бесконечномерным группам (что кажется весьма вероятным), мы получим широкий класс новых теорий типа теории струн.

Ниже в разделе 2 мы объясняем, что такое ФУП и как оно естественно возникает при рассмотрении $s \leftrightarrow t$ дуальности. В разделах 3 и 4 приводятся две простые геометрические конструкции трехточечных амплитуд, обладающих свойством дуальности. Амплитуда из раздела 4 обобщает известную четырехчастичную амплитуду Венециано. Наконец, в разделе 5 показано, что наши конструкции могут быть описаны алгебраически в терминах соотношений в группах Ли, а именно в группе движений евклидовой плоскости и группе Гейзенберга.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕНТАГОНА

Наша идея механизма дуальности очень проста. Предположим, что для любых фиксированных квантовых чисел на внешних линиях обеих частей диаграммы на рис. 1 существует некий закон соответствия $f: t \mapsto s$ такой, что

$$t = f(s) \Rightarrow A(k, l, s)A(s, m, n) d\mu(s) = A(k, m, t)A(t, l, n) d\mu(t). \quad (2)$$

Рис. 4. Уравнение пентагона.

Здесь подразумевается, что функция f зависит также от “внешних” переменных k, l, m и n .

Ясно, что условия (2) достаточно для выполнения свойства (1). Рассмотрим теперь диаграмму рассеяния “а” на рис. 3 и преобразуем ее в диаграмму “б” двумя способами, как показано на рис. 3. Предположим, что *всем* линиям диаграммы “а” (включая внутренние) были сопоставлены некоторые квантовые числа. Применяя функцию f , мы получаем квантовые числа и для диаграммы “б”. Весьма естественно потребовать, чтобы функция f удовлетворяла условию совместности: *две последовательности преобразований на рис. 3 должны приводить к одинаковым квантовым числам на диаграмме “б”*. А это условие совместности есть не что иное, как одна из разновидностей ФУП.

На рис. 4 изображен пентагон (пятиугольник), “двойственный по Пуанкаре” диаграмме рис. 3. При этом вершины диаграммы рис. 3 представляются треугольниками, а преобразованию диаграммы рис. 1 соответствуют удаление диагонали четырехугольника и замена ее другой диагональю.

Отметим, что переменные (квантовые числа) сопоставлены *ребрам* (сторонам и диагоналям) пентагона. Существуют и другие разновидности ФУП, в которых переменные принадлежат, например, самим треугольникам, см. [8, 9].

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ДУАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ДЛИН РЕБЕР

Геометрическая картинка рис. 4 сразу подсказывает возможный выбор функции f . А именно, изобразим (рис. 5) “двойственную по Пуанкаре” конфигурацию к диаграмме рис. 1 на евклидовой плоскости и возьмем *длины ребер* в качестве “квантовых чисел”.

Рис. 5. Длины ребер как квантовые числа.

Если длины ребер l_1, l_2, l_3, l_4 и l_5 на рис. 5 заданы, то l_6 определяется из уравнения

$$S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABC} + S_{ACD}, \quad (3)$$

где $S_{\dots}$ – площадь соответствующего треугольника, выраженная через длины его сторон. Например,

$$S_{ABD} = S(l_1, l_2, l_3) = \frac{1}{4} \sqrt{(l_1 + l_2 + l_3)(l_2 + l_3 - l_1)(l_3 + l_1 - l_2)(l_1 + l_2 - l_3)}.$$

То, что такое преобразование $f: l_3 \mapsto l_6$ удовлетворяет уравнению пентагона, очевидно из геометрических соображений (пятиугольник, длины всех сторон и двух диагоналей которого заданы, является “твердым телом”, в котором расстояние между любыми двумя точками фиксировано и не зависит от цепочки алгебраических преобразований, посредством которых мы его вычислили).

Рассмотрим очевидное соотношение

$$d(\alpha + \gamma) = -d(\beta + \delta) \quad (4)$$

для углов на рис. 5, и пусть стороны четырехугольника $ABCD$ заданы и только его диагонали могут меняться. Используя формулы типа

$$\sin \alpha = \frac{2S_{ABD}}{l_1 l_2}, \quad \cos \alpha = \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1 l_2},$$

мы найдем

$$d\alpha = -\frac{d \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{l_3 dl_3}{2S_{ABD}},$$

Рис. 6. Угловые коэффициенты как квантовые числа.

и аналогично для β , γ и δ . Подставляя эти дифференциалы углов в (4) и принимая во внимание уравнение (3), нетрудно вывести соотношение

$$\frac{l_3 dl_3}{S_{ABD} \cdot S_{BCD}} = -\frac{l_6 dl_6}{S_{ABC} \cdot S_{ACD}}. \quad (5)$$

Соотношение (5) вместе с (3) подсказывает следующий вид трехточечной амплитуды $A(l_1, l_2, l_3)$ и меры $d\mu(l)$, удовлетворяющих условию (2):

$$A(l_1, l_2, l_3) = \frac{e^{\lambda S(l_1, l_2, l_3)}}{S(l_1, l_2, l_3)}, \quad (6)$$

где λ – произвольная фиксированная константа, и

$$d\mu(l) = l dl. \quad (7)$$

Что касается знака минус в (5), его роль становится ясной при выборе пути интегрирования по l_3 и/или l_6 . Здесь, как представляется, есть некоторая свобода. Если рассматривать длины как комплексные переменные, уравнение (3) при заданных l_1, l_2, l_4 и l_5 определяет некоторую риманову поверхность, точки которой суть пары (l_3, l_6) . Поэтому, возможно, в качестве контуров интегрирования можно взять какие-то циклы на этой поверхности. Здесь мы не будем рассматривать такую возможность, а просто наивно примем, что $ABCD$ – выпуклый четырехугольник на обычной вещественной евклидовой плоскости, и пусть l_3 изменяется от своего наименьшего значения, совместимого с этим условием (и с данными l_1, l_2, l_4 и l_5), до своего наибольшего значения. Тогда ясно, что l_6 изменяется от *своего наибольшего до своего наименьшего значения*. При изменении направления интегрирования по l_6 знак минус исчезает, и в результате формула (1) приобретает вид

$$\int_{(l_3)_{\min}}^{(l_3)_{\max}} \frac{e^{\lambda S(l_1, l_2, l_3)}}{S(l_1, l_2, l_3)} \frac{e^{\lambda S(l_3, l_4, l_5)}}{S(l_3, l_4, l_5)} l_3 dl_3 = \int_{(l_6)_{\min}}^{(l_6)_{\max}} \frac{e^{\lambda S(l_1, l_5, l_6)}}{S(l_1, l_5, l_6)} \frac{e^{\lambda S(l_2, l_4, l_6)}}{S(l_2, l_4, l_6)} l_6 dl_6.$$

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ДУАЛЬНОСТЬ ДЛЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ – ОБОБЩЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ВЕНЕЦИАНО

Схема рис. 4 подсказывает, что имеется и еще один выбор преобразования, удовлетворяющего ФУП. Для данного ребра возьмем в качестве квантового числа его *угловой коэффициент* k (если концы ребра в фиксированной системе координат, не обязательно ортогональной, суть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , то $k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$). Нетрудно видеть, что если величины k_1, k_2, k_3, k_4 и k_5 на рис. 6 заданы, то k_6 определяется однозначно. Выпишем формулу для нахождения k_6 в следующем виде:

$$\frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1} \cdot \frac{k_3 - k_5}{k_3 - k_4} = \frac{k_6 - k_2}{k_6 - k_4} \cdot \frac{k_6 - k_5}{k_6 - k_1}. \quad (8)$$

Это соотношение имеет форму

$$F(ABD) \cdot G(BCD) = H(ABC) \cdot K(ACD). \quad (9)$$

Под этим мы подразумеваем, что левая часть является произведением двух выражений, соответствующих треугольникам ABD и BCD , тогда как правая часть соответствует аналогично треугольникам ABC и ACD . Поэтому соотношение (8) аналогично (3), хотя оно “мультипликативно”, а не “аддитивно”.

Отметим, что, во-первых, уравнение (8) имеет также решение $k_6 \equiv k_3$, которое нас не интересует. Будем считать, что мы его отбросили. Во-вторых, преобразование $f: k_3 \mapsto k_6$ при данных k_1, k_2, k_4 и k_5 инволютивно.

То, что преобразование f удовлетворяет уравнению пентагона, следует из того, что пятиугольник, в котором заданы угловые коэффициенты всех сторон и двух диагоналей, определен однозначно с точностью до подобия и сдвига.

Очень важно, что существуют еще два мультипликативных соотношения, дающих ту же зависимость $f: k_3 \mapsto k_6$ и имеющих ту же форму (9):

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_3} \cdot \frac{k_4 - k_3}{k_4 - k_5} = \frac{k_4 - k_2}{k_4 - k_6} \cdot \frac{k_1 - k_6}{k_1 - k_5} \quad (10)$$

и

$$\frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_3} \cdot \frac{k_5 - k_3}{k_5 - k_4} = \frac{k_2 - k_6}{k_2 - k_4} \cdot \frac{k_5 - k_1}{k_5 - k_6}. \quad (11)$$

В качестве аналога формулы (5) можно взять

$$\frac{dk_3}{(k_3 - k_2)(k_3 - k_5)} = -\frac{dk_6}{(k_6 - k_2)(k_6 - k_5)}. \quad (12)$$

Несложно проверить, что (12) следует из формулы (8) при условии $k_6 \neq k_3$.

Важной особенностью формул (8)–(12) является то, что они остаются верными после мёбиусова (рационального) преобразования всех k :

$$k_j \mapsto \frac{ak_j + b}{ck_j + d}, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Такие преобразования соответствуют просто другому выбору системы координат для диаграммы рис. 6.

Наиболее общая формула типа (1), которую мы можем вывести из (8)–(12), получается, если возвести все члены в (8) в некоторую степень α , в (10) – в некоторую степень β , в (11) – в некоторую степень γ и перемножить соответствующие члены этих уравнений и уравнения (12). Используя соотношения

$$k_3 = k_2 \Leftrightarrow k_6 = k_5 \quad \text{и} \quad k_3 = k_5 \Leftrightarrow k_6 = k_2,$$

мы можем выбрать, например, кривую, соединяющую k_2 и k_5 , как путь интегрирования и записать окончательную формулу в виде

$$\begin{aligned} \int_{k_2}^{k_5} A(k_3, k_1, k_2 | -\alpha, \beta, -\gamma) A(k_3, k_4, k_5 | -\alpha, -\beta, \gamma) dk_3 = \\ = \int_{k_2}^{k_5} A(k_6, k_4, k_2 | -\alpha, \beta, \gamma) A(k_6, k_1, k_5 | -\alpha, -\beta, -\gamma) dk_6, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$A(l, m, n | \lambda, \mu, \nu) = (l - m)^{\lambda - \mu} (m - n)^{\mu - \nu} (n - l)^{\nu - \lambda - 1}. \quad (14)$$

Обе части формулы (13) обобщают известное выражение Венециано [10, 11] для четырехточечной амплитуды. Чтобы это увидеть, положим

$$k_1 = k_4 = \infty, \quad k_2 = 0, \quad k_5 = 1.$$

Тогда, например, левая часть (13) дает с точностью до постоянного множителя

$$\int_0^1 k_3^{\alpha - \gamma - 1} (k_3 - 1)^{\alpha + \gamma - 1} dk_3,$$

что совпадает с амплитудой Венециано с точностью до очевидного изменения обозначений.

Будет несомненно очень интересно сравнить пятиточечную и вообще N -точечную амплитуды, которые можно получить таким образом, с амплитудами из классических работ [12–15].

5. ОБСУЖДЕНИЕ: ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Объясним, почему мы считаем, что наши конструкции связаны с группами Ли. Рассмотрим два вида преобразований, действующих на точки (x, y) евклидовой плоскости: сдвиг на a вдоль оси x –

$$S(a): (x, y) \mapsto (x + a, y) \quad (15)$$

и поворот на угол ϕ –

$$R(\phi): (x, y) \mapsto (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi).$$

Существование треугольника со сторонами l, m, n и *внешними* углами α, β, γ означает равенство

$$R(\alpha) \circ S(n) \circ R(\beta) \circ S(l) \circ R(\gamma) \circ S(m) = 1. \quad (16)$$

Отметим, что группа движений евклидовой плоскости трехпараметрическая, и поэтому α, β и γ могут быть определены по известным l, m и n . Соотношения, аналогичные (16), могут быть выписаны также для четырех- и пятиугольников, и все геометрические построения раздела 3 могут быть описаны в терминах таких соотношений.

Конструкции же раздела 4 никак не связаны с евклидовым расстоянием, так что, по нашему мнению, здесь более подходящей является трехпараметрическая группа, порожденная преобразованием $S(a)$ (15) и преобразованием

$$T(\kappa): (x, y) \mapsto (x, y + \kappa x).$$

Тогда существование треугольника, проекции сторон которого на ось x суть a, b, c (где $a + b + c = 0$), а их угловые коэффициенты $-l, m, n$, описывается равенством

$$S(a) \circ T(l - m) \circ S(b) \circ T(m - n) \circ S(c) \circ T(n - l) = 1. \quad (17)$$

С алгебраической точки зрения, группа, порожденная преобразованиями $S(a)$ и $T(\kappa)$, есть не что иное как группа Гейзенберга. Это сразу видно из соотношения

$$T(\kappa) \circ S(a) \circ T(-\kappa) \circ S(-a) = C(\kappa a),$$

где

$$C(a) : (x, y) \mapsto (x, y + a)$$

— центральный элемент для любого a .

Мы считаем, что изучение соотношений типа (16), (17) в больших группах является алгебраическим ключом для построения широких обобщений теории струн.

Благодарности. Один из авторов (И.Г.К.) с удовольствием благодарит Токийский городской университет (Tokyo Metropolitan University) за грант на проведение исследований (TMU Fellowship for research), профессора этого университета С. Сайто за гостеприимство, а также Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку по гранту 98-01-00895.

Список литературы

- [1] *S. Saito*. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. № 16. P. 1798.
- [2] *S. Saito*. Integrability of strings. In: Nonlinear Fields: Classical, Random, Semiclassical. Eds. P. Garbaczewski and Z. Popowicz. Singapore: World Scientific, 1991. P. 286.
- [3] *K. Sogo*. J. Phys. Soc. Japan. 1987. V. 56. № 7. P. 2291.
- [4] *S. Saito*. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 8289.
- [5] *A. B. Zamolodchikov*. Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 489.
- [6] *R. M. Kashaev*. On discrete 3-dimensional equations associated with the local Yang-Baxter relation. Preprint ENSLAPP-L-569/95. Lyon: ENS-Lyon, 1995; solv-int/9512005.
- [7] *P. M. Kashaev, И. Г. Корепанов, С. М. Сергеев*. ТМФ. 1998. Т. 117. № 3. С. 370; *R. M. Kashaev, I. G. Korepanov, and S. M. Sergeev*. Functional tetrahedron equation, solv-int/9801015; *В. В. Фок, Л. О. Чехов*. Квантовые модулярные преобразования, соотношение пятиугольника и геодезические. Тр. МИАН (принято в печать).
- [8] *R. M. Kashaev, S. M. Sergeev*. Commun. Math. Phys. 1998. V. 195. P. 309; On pentagon, ten-term, and tetrahedron relations, q-alg/9607032.
- [9] *P. M. Kashaev*. ТМФ. 1999. Т. 118. № 3. С. 398.
- [10] *G. Veneziano*. Nuovo. Cimento A. 1968. V. 57. P. 190.
- [11] *M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten*. Superstring Theory. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [12] *K. Bardakçi, H. Ruegg*. Phys. Lett. B. 1968. V. 28. № 5. P. 342.
- [13] *M. A. Virasoro*. Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22. № 1. P. 37.
- [14] *C. J. Goebel, B. Sakita*. Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22. № 6. P. 257.
- [15] *Z. Koba, H. B. Nielsen*. Nucl. Phys. B. 1969. V. 12. P. 517.

Поступила в редакцию 18.XII.1998 г.