Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Э. Р. Рахметов, Стратегия областей в асимптотическом разложении двухпетлевых вершинных фейнмановских диаграмм, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 1, 64–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:35:08

СТРАТЕГИЯ ОБЛАСТЕЙ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ДВУХПЕТЛЕВЫХ ВЕРШИННЫХ ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ

Обсуждаются и иллюстрируются на двухпетлевых примерах общие правила вычисления коэффициентов при произвольных степенях и логарифмах в асимптотическом разложении фейнмановских диаграмм в судаковском пределе. Описаны особенности, связанные с вычислением отдельных членов в разложении, в частности введение вспомогательной аналитической регуляризации.

1. Наиболее простые явные формулы ([1–3], а также [4]) для асимптотических разложений фейнмановских диаграмм в различных пределах импульсов и масс вне массовой оболочки, когда импульсы считаются большими или малыми в евклидовом смысле, были обобщены на некоторые пределы на массовой оболочке, типичные для пространства Минковского [5–7], в частности на судаковский предел. Предписания для этих пределов были сформулированы с использованием (пред)вычитаний в некотором семействе подграфов данного графа.

Недавно были предложены явные предписания для разложения фейнмановских интегралов вблизи порога [8]. Это было сделано с помощью стандартной физической стратегии, основанной на анализе областей в пространстве петлевых импульсов. Следует, однако, отметить, что эта стратегия областей обычно применялась только для вычисления и суммирования ведущих логарифмов, в частности в судаковском пределе (см., например, [9]). Заметим, что информация о ведущих логарифмах присутствует только во вкладах некоторых специфических областей, так что интегрирование по другим областям вообще не рассматривается.

В работе [8] утверждалось (и было продемонстрировано для порогового разложения), что имеет смысл использовать эту стратегию областей для вычисления коэффициентов при любой степени и логарифме в произвольном пределе. В такой расширенной формулировке стратегия сводится к следующим предписаниям:

а) рассмотрим все области петлевых импульсов, типичные для данного предела, и разложим в каждой области подынтегральное выражение в ряд Тейлора по параметрам, которые считаются малыми в данной области;

* Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: smirnov@theory.npi.msu.su; rahmetov@theory.npi.msu.su.

Рис. 1. Двухпетлевая планарная вершинная диаграмма

Рис. 2. Двухпетлевая непланарная вершинная диаграмма

б) разложенное (в каждой области по-разному) подынтегральное выражение проинтегрируем по всей области петлевых импульсов;

в) положим равным нулю любой безмасштабный интеграл (даже если он не регуляризован, например, размерной регуляризацией).

Как отмечалось в работе [8], именно шаг “б” далеко не тривиален. Можно верить, что эта стратегия законна для любого предела импульсов и масс. Например, она приводит к хорошо известным формулам для асимптотических разложений в случае типично евклидовых пределов [1, 2] (доказанных в [3]), так что мы имеем косвенное подтверждение, по крайней мере для таких теорий. Отметим, что для этих пределов, а также для предела на массовой оболочке, рассмотренного в работах [5, 6], набор соответствующих областей определяется разбиением всех петлевых импульсов на большие (жесткие) и малые (мягкие).

В настоящей работе мы проверяем на двухпетлевых примерах эту эвристическую процедуру для вычисления коэффициентов при любой степени и логарифме в асимптотическом разложении фейнмановских диаграмм в судаковском пределе [10]. Мы рассмотрим два общепринятых варианта этого предела для вершинных диаграмм с внешними импульсами p_1 , p_2 и $q = p_1 - p_2$.

ПРЕДЕЛ 1. Два внешних импульса вне массовой оболочки, $p_1^2 = p_2^2 = m^2 = -\mu^2$, $Q^2 \equiv -q^2 \rightarrow \infty$; все внутренние массы нулевые.

ПРЕДЕЛ 2. Два внешних импульса на массовой оболочке, $p_1^2 = p_2^2 = 0$, $Q^2 \rightarrow \infty$; некоторые внутренние массы ненулевые.

Мы вычислим ведущее степенное поведение, включая все логарифмы $\ln^j(q^2/m^2)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, безмассовой планарной диаграммы (рис. 1) в первом пределе и сравним полученный результат с известным явным выражением [11]. После такого подтверждения мы применим сформулированное выше эвристическое предписание к непланарной диаграмме (рис. 2), для которой аналитические результаты неизвестны, в пределе 2 при $m_1 = \dots = m_4 = 0$, $m_5 = m_6 = m$. Мы также используем второй пример, для того

чтобы описать технику вычисления отдельных членов разложения. Естественный способ вычислить члены с зависимостью вида $1/(m^2)^{2\epsilon}$ — это введение вспомогательной аналитической регуляризации. В отличие от планарной диаграммы во втором пределе, где возникают полюсы первого порядка по параметру аналитической регуляризации, которые сокращаются в сумме двух вкладов [7], для непланарной диаграммы мы встретим полюсы второго порядка, которые присутствуют в пяти вкладах. Эти полюсы в сумме также сокращаются, и мы получаем результат, совпадающий с размерной регуляризацией.

2. Фейнмановский интеграл для диаграммы на рис. 1 имеет вид

$$F_1(Q, m, \epsilon) = \int \int \frac{d^d k d^d l}{(l^2 - 2p_1 l + m^2)(l^2 - 2p_2 l + m^2)} \times \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k + m^2)(k^2 - 2p_2 k + m^2)k^2(k-l)^2}. \quad (1)$$

Используется размерная регуляризация [12] с $d = 4 - 2\epsilon$. При изложении наших результатов мы будем опускать множители $i\pi^{d/2}$, приходящиеся на каждую петлю, а при выписывании отдельных вкладов в виде разложения по ϵ мы также опустим множители $\exp(-\gamma_E \epsilon)$, приходящиеся на каждую петлю (γ_E — постоянная Эйлера).

Выберем для удобства внешние импульсы следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1 &= \tilde{p}_1 + \frac{m^2}{Q^2} \tilde{p}_2, & p_2 &= \tilde{p}_2 + \frac{m^2}{Q^2} \tilde{p}_1, \\ \tilde{p}_1 &= \left(\frac{Q}{2}, -\frac{Q}{2}, 0, 0 \right), & \tilde{p}_2 &= \left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, 0, 0 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

так что $p_i^2 = m^2$, $\tilde{p}_i^2 = 0$, $2\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = 2\tilde{p}_1 p_2 = Q^2$. В данном пределе следующие области оказываются типичными [9]:

$$\begin{aligned} \text{жесткая (h)} : & \quad k \sim Q, \\ \text{1-коллинеарная (1c)} : & \quad k_+ \sim Q, \quad k_- \sim \frac{m^2}{Q}, \quad \underline{k} \sim m, \\ \text{2-коллинеарная (2c)} : & \quad k_- \sim Q, \quad k_+ \sim \frac{m^2}{Q}, \quad \underline{k} \sim m, \\ \text{сверхмягкая (us)} : & \quad k \sim \frac{m^2}{Q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $k_{\pm} = k_0 \pm k_1$, $\underline{k} = (k_2, k_3)$. Выражение $k \sim Q$ и т.д. подразумевает, что каждая компонента k_{μ} имеет порядок Q .

Следует считать, что каждый из импульсов $k, l, \dots$ принадлежит к одному из перечисленных типов, и предусмотреть разные выборы типов петлевых импульсов, избегая двойного счета. Другие области дают нулевые вклады, в частности, когда один из петлевых импульсов является *мягким*, т.е. при $k \sim m$. Однако, если некоторые массы диаграммы были бы ненулевыми, то некоторые мягкие области породили бы ненулевые вклады (которые бы начинались со следующего после ведущего порядка).

В ведущем порядке ($1/Q^4$) мы получаем вклады от следующих девяти областей: (h-h), (1c-h), (2c-h), (1c-1c), (2c-2c), (us-h), (us-1c), (us-2c), (us-us). В этом списке области для петлевых импульсов k и l в (1) указаны соответственно на первом и втором местах. Область (h-h) порождает тейлоровское разложение подынтегрального выражения по параметру m . В ведущем порядке это не что иное, как значение безмассовой планарной диаграммы при $p_1^2 = p_2^2 = 0$, впервые вычисленное в работе [13]. Хотя этот результат можно выразить в гамма-функциях при произвольном ϵ с помощью метода интегрирования по частям [14] (это было впервые сделано в работе [15]), мы его здесь представляем для краткости в разложении по ϵ :

$$\begin{aligned} C_{(h-h)}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(l^2 - 2\tilde{p}_1 l)(l^2 - 2\tilde{p}_2 l)(k^2 - 2\tilde{p}_1 k)(k^2 - 2\tilde{p}_2 k)k^2(k-l)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{4\epsilon^4} + \frac{5\pi^2}{24\epsilon^2} + \frac{29\zeta(3)}{6\epsilon} + \frac{3\pi^4}{32} \right) \frac{1}{(Q^2)^{2+2\epsilon}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Все вклады, связанные со сверхмягкими областями, легко вычисляются в гамма-функциях с помощью α -параметров. В ведущем порядке мы имеем

$$\begin{aligned} C_{(us-us)}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(-2\tilde{p}_1 l + m^2)(-2\tilde{p}_2 l + m^2)(-2\tilde{p}_1 k + m^2)(-2\tilde{p}_2 k + m^2)k^2(k-l)^2} = \\ &= \frac{\Gamma(1-\epsilon)^2 \Gamma(2\epsilon)^2}{\epsilon^2 (-m^2)^{4\epsilon} (Q^2)^{2-2\epsilon}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_{(us-h)}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(l^2 - 2\tilde{p}_1 l)(l^2 - 2\tilde{p}_2 l)(-2\tilde{p}_1 k + m^2)(-2\tilde{p}_2 k + m^2)k^2 l^2} = \\ &= \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(\epsilon)^2\Gamma(-\epsilon)^2}{\Gamma(1-2\epsilon)(-m^2)^{2\epsilon}(Q^2)^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_{(us-1c)}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(-2\tilde{p}_1 l)(l^2 - 2p_2 l + m^2)(-2\tilde{p}_1 k + m^2)(-2\tilde{p}_2 k + m^2)} \times \\ &\times \frac{1}{k^2(l^2 - \frac{(2\tilde{p}_1 l)(2\tilde{p}_2 k)}{Q^2})} = \frac{\Gamma(1-\epsilon)^2 \Gamma(\epsilon) \Gamma(2\epsilon) \Gamma(-\epsilon)}{\epsilon \Gamma(1-2\epsilon)(-m^2)^{3\epsilon} (Q^2)^{2-\epsilon}} \equiv C_{(us-2c)}^{(1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

С использованием α -параметров остальные вклады можно при произвольном ϵ представить через интегралы Меллина–Барнса:

$$\begin{aligned} C_{(1c-1c)}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(-2\tilde{p}_1 l)(l^2 - 2p_2 l + m^2)(-2\tilde{p}_1 k)(k^2 - 2p_2 k + m^2)k^2(k-l)^2} = \\ &= \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(-\epsilon)\Gamma(2\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon)(-m^2)^{2\epsilon}(Q^2)^2} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \frac{\Gamma(s-3\epsilon)\Gamma(s+1-2\epsilon)\Gamma(s+1-\epsilon)\Gamma(\epsilon-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(s+1-3\epsilon)} \equiv \\ &\equiv C_{(2c-2c)}^{(1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
C_{(1c-h)}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(l^2 - 2\tilde{p}_1 l)(l^2 - 2\tilde{p}_2 l)(-2\tilde{p}_1 k)(k^2 - 2p_2 k + m^2)} \times \\
&\times \frac{1}{k^2(l^2 - \frac{(2\tilde{p}_1 k)(2\tilde{p}_2 l)}{Q^2})} = \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)(-m^2)^\epsilon(Q^2)^{2+\epsilon}} \times \\
&\times \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(s-\epsilon)\Gamma(s+1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(s+1-2\epsilon)} \equiv \\
&\equiv C_{(2c-h)}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Мы подразумеваем стандартный способ выбора контуров: ультрафиолетовые (УФ-) полюсы находятся справа, а инфракрасные (ИК-) полюсы — слева от них. Приведенные выше интегралы Меллина–Барнса разлагаются по ϵ с помощью сдвига контуров и выделения вычетов в точках, где УФ- и ИК-полюсы совпадают при $\epsilon \rightarrow 0$. В результате мы получаем

$$\begin{aligned}
(Q^2)^2 [C_{(1c-1c)}^{(1)} + C_{(2c-2c)}^{(1)} + C_{(1c-h)}^{(1)} + C_{(2c-h)}^{(1)}] &= -\frac{1}{2\epsilon^4} + \left(L^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) \frac{1}{2\epsilon^2} + \\
&+ \left(\frac{1}{2}L^3 - \frac{\pi^2}{6}L - \frac{17\zeta(3)}{3}\right) \frac{1}{\epsilon} + \frac{7}{24}L^4 - 4\zeta(3)L - \frac{\pi^4}{144},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $L = \ln(Q^2/\mu^2)$ и мы положили для краткости $\mu = 1$. (Отметим, что в отдельных вкладах имеются как члены с $\ln(Q^2/\mu^2)$, так и с $\ln(\mu^2)$.)

Собирая все девять вкладов вместе, мы наблюдаем, что полюсы по ϵ , которые оказываются очень разной природы (УФ, ИК и коллинеарные), сокращаются, и мы получаем

$$(Q^2)^2 F_1(Q, m, 0) \stackrel{Q \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4}L^4 + \frac{\pi^2}{2}L^2 + \frac{7\pi^4}{60} \tag{11}$$

в согласии с разложением хорошо известного результата [11] в ведущем порядке.

3. Разложение планарной диаграммы (см. рис. 1) при $m_1 = \dots = m_4 = 0$, $m_5 = m_6 = m$ в пределе 2 было в произвольном порядке получено в работе [7] с помощью стратегии вычитающих операторов. Отметим, что те же самые выражения для всех вкладов разложения можно получить с помощью стратегии областей. На этом языке список ненулевых вкладов состоит из (h-h), (1c-h), (2c-h), (1c-1c) и (2c-2c), а также вклада, который начинается со следующего за ведущим порядка и происходит от области, где импульс центральной линии мягкий, а второй петлевой импульс жесткий.

Рассмотрим теперь разложение непланарной диаграммы (см. рис. 2) в пределе 2. Фейнмановский интеграл можно записать как

$$\begin{aligned}
F_2(Q, m, \epsilon) &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{((k+l)^2 - 2p_1(k+l))((k+l)^2 - 2p_2(k+l))} \times \\
&\times \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(l^2 - 2p_2 l)(k^2 - m^2)(l^2 - m^2)},
\end{aligned} \tag{12}$$

где p_1 и p_2 удовлетворяют соотношениям для $\tilde{p}_{1,2}$ в предыдущем пункте. Мы также используем второй выбор петлевых импульсов, когда k и l являются соответственно импульсами линий 3 и 4 и который получается перестановкой масс и соответствует интегралу (12) с $m_1 = m_2 = m_5 = m_6 = 0$, $m_3 = m_4 = m$.

Ненулевые вклады в разложение в ведущем порядке порождаются следующими областями: (h-h), (h-2c), (2c-h), (1c-1c), (2c-2c), (2c-1c), (1c-1c)', (2c-2c)' и (us-us)'. Как и выше, мы указываем область для петлевого импульса k на первом месте, а для l – на втором. Штрихом обозначены области для второго естественного выбора петлевых импульсов. Вклад (h-h) дается безмассовой непланарной диаграммой. В виде разложения по ϵ результат можно найти в работе [13]:

$$C_{(h-h)}^{(2)} = \left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\pi^2}{\epsilon^2} - \frac{83\zeta(3)}{3\epsilon} - \frac{59\pi^4}{120} \right) \frac{1}{(Q^2)^{2+2\epsilon}}. \quad (13)$$

Вклад (us-us)' легко вычисляется в гамма-функциях:

$$\begin{aligned} C_{(us-us)'}^{(2)} &= \iint \frac{d^d k d^d l}{(-2p_1(k+l))(-2p_2(k+l))(-2p_1 k + m^2)(-2p_2 l + m^2)k^2 l^2} = \\ &= \frac{1}{(Q^2)^{2-2\epsilon}(m^2)^{4\epsilon}} [\Gamma(\epsilon)\Gamma(2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)]^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Вклад (2c-h) задается как

$$\begin{aligned} C_{(2c-h)}^{(2)} &= \iint \frac{d^d k d^d l}{(l^2 - 2p_1 l + \frac{(2p_2 k)(2p_1 l)}{Q^2})(l^2 - 2p_2(k+l) + \frac{(2p_2 k)(2p_1 l)}{Q^2})} \times \\ &\times \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(l^2 - 2p_2 l)(k^2 - m^2)l^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

а совпадающий с ним (h-2c)-вклад ведущего порядка получается перестановкой k и l . Используя α -параметры и (дважды) представление Меллина–Барнса, мы получаем

$$C_{(h-2c)}^{(2)} = C_{(2c-h)}^{(2)} = \left(-\frac{3}{\epsilon^4} + \frac{\pi^2}{\epsilon^2} + \frac{22\zeta(3)}{\epsilon} + \frac{16\pi^4}{45} \right) \frac{1}{(Q^2)^{2+\epsilon}(m^2)^\epsilon}. \quad (16)$$

Вклад (1c-1c) имеет вид

$$\begin{aligned} C_{(1c-1c)}^{(2)} &= \iint \frac{d^d k d^d l}{(-2p_1(k+l))((k+l)^2 - 2p_2(k+l))} \times \\ &\times \frac{1}{(-2p_1 k)(l^2 - 2p_2 l)(k^2 - m^2)(l^2 - m^2)}, \end{aligned} \quad (17)$$

а вклад (2c-2c) получается перестановкой k и l . Мы должны также рассмотреть аналогичные вклады (1c-1c)' и (2c-2c)' со вторым выбором петлевых импульсов. Соответствующие выражения получаются перестановкой масс (см. выше). Пятый ненулевой вклад коллинеарно-коллинеарного типа происходит из области (2c-1c). Оказывается,

что эти вклады регуляризованы размерно только в сумме. Удобно ввести вспомогательную аналитическую регуляризацию в линии 3 и 4, подставив

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)^{1+x_1} (l^2 - 2p_2 l)^{1+x_2}}$$

в подынтегральное выражение. В отличие от планарной двухпетлевой диаграммы в этом пределе [5] у нас появляются полюсы по x_i вплоть до второго порядка. В частности, вклад (2с-1с) вычисляется в гамма-функциях при произвольном ϵ :

$$\begin{aligned} C_{(2\text{с-1с})}^{(1)} &= \int \int \frac{d^d k d^d l}{(-2p_1 l + \frac{(2p_2 k)(2p_1 l)}{Q^2})(-2p_2 k + \frac{(2p_2 k)(2p_1 l)}{Q^2})} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(l^2 - 2p_2 l)(k^2 - m^2)(l^2 - m^2)} = \\ &= \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)\Gamma(-x_1 - \epsilon)\Gamma(-x_2 - \epsilon)\Gamma(x_1 + \epsilon)\Gamma(x_2 + \epsilon)}{\Gamma(1 + x_1)\Gamma(1 + x_2)\Gamma(-\epsilon)^2(-m^2)^{x_1+x_2+2\epsilon}(Q^2)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

С использованием техники α -параметров и представления Меллина–Барнса для других (е-е)-вкладов мы получаем результат в виде разложения по x_i . Затем мы выключаем аналитическую регуляризацию (сначала $x_2 \rightarrow x_1$, а затем $x_1 \rightarrow 0$), замечаем, что в сумме всех пяти вкладов выпадает сингулярная зависимость по x_i , и получаем следующий результат в разложении по ϵ :

$$\begin{aligned} (Q^2)^2 [C_{(1\text{с-1с})}^{(2)} + C_{(2\text{с-2с})}^{(2)} + C_{(1\text{с-1с})'}^{(2)} + C_{(2\text{с-2с})'}^{(2)} + C_{(2\text{с-1с})}^{(2)}] &= \\ &= \frac{19}{4\epsilon^4} - \frac{9}{2\epsilon^3} L + \left(L^2 - \frac{11\pi^2}{4} \right) \frac{1}{2\epsilon^2} - \left(\frac{3\pi^2}{4} L + \frac{97\zeta(3)}{6} \right) \frac{1}{\epsilon} + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{12} L^2 + 9\zeta(3)L - \frac{23\pi^4}{32}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $L = \ln(Q^2/m^2)$ и мы положили для краткости $m = 1$.

Собирая все вклады ведущего порядка, видим, что полюсы по ϵ сокращаются, и мы приходим к следующему результату:

$$(Q^2)^2 F_2(Q, m, 0) \stackrel{Q \rightarrow \infty}{\sim} \frac{7}{12} L^4 - \frac{\pi^2}{2} L^2 + 20\zeta(3)L - \frac{31\pi^4}{180}. \quad (20)$$

С помощью некоторой компьютерной алгебры можно обобщить этот результат на любой порядок разложения по $1/Q^2$.

Благодарности. В. Смирнов благодарен М. Бенеке, А. И. Давыдичеву и К. Г. Четыркину за полезные обсуждения. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-02-16981), а работа В. Смирнова, кроме того, Фольксвагенским фондом (грант № I/73611).

Список литературы

- [1] *S. G. Gorishnii.* On the construction of operator expansions and effective theories in the MS-scheme. General formalism. Препринт ОИЯИ Е2-86-176. Дубна: ОИЯИ, 1986; On the construction of operator expansions and effective theories in the MS-scheme. Examples. Infrared finiteness of coefficient functions. Препринт ОИЯИ Е2-86-177. Дубна: ОИЯИ, 1986; Nucl. Phys. B. 1989. V. 319. P. 633.
- [2] *К. Г. Четыркин.* ТМФ. 1988. Т. 75. С. 26; Т. 76. С. 207.
- [3] *V. A. Smirnov.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 134. P. 109; Renormalization and asymptotic expansions. Basel: Birkhäuser, 1991.
- [4] *V. A. Smirnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. P. 1485; Asymptotic expansions of Feynman integrals on the mass shell in momenta and masses. In: Proc. of the 5th International Conference on Physics beyond the Standard Model, Balholm, Norway, 1997. Eds. G. Eigen, P. Osland, B. Stugu. N. Y.: AIP, 1997. P. 354; hep-ph/9708423.
- [5] *V. A. Smirnov.* Phys. Lett. B. 1997. V. 394. P. 205.
- [6] *A. Czarnecki, V. A. Smirnov.* Phys. Lett. B. 1997. V. 394. P. 211.
- [7] *V. A. Smirnov.* Phys. Lett. B. 1997. V. 404. P. 101.
- [8] *M. Beneke, V. A. Smirnov.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 522. P. 321.
- [9] *J. C. Collins.* Sudakov form factors. In: Perturbative QCD. Ed. A.H. Mueller. Singapore: World Scientific, 1989. P. 573.
- [10] *Б. Б. Судаков.* ЖЭТФ. 1956. V. 30. P. 87.
- [11] *N. I. Ussyukina, A. I. Davydychev.* Phys. Lett. B. 1993. V. 298. P. 363.
- [12] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189; *C. G. Bollini, J. J. Giambiagi.* Nuovo Cimento B. 1972. V. 12. P. 20.
- [13] *R. J. Gonsalves.* Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 1542.
- [14] *K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 192. P. 159.
- [15] *G. Kramer, B. Lampe.* J. Math. Phys. 1997. V. 28. P. 945.

Поступила в редакцию 28.XII.1998 г.